УДК 551.511.32.532:517.4

МОДЕЛЬ КУМУЛЯНТОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА КРУПНОМАСШТАБНЫМИ ВИХРЕВЫМИ СТРУКТУРАМИ

Б. Б. Илюшин

Институт теплофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

Представлена модель для вычисления кумулянтов четвертого порядка. Из неравенств Шварца установлена зависимость между коэффициентами модели, позволяющая определить их численные значения. Использование алгебраической версии модели для параметризации процессов турбулентной диффузии в уравнениях переноса для корреляций третьего порядка не требует дополнительной эмпирической информации и позволяет корректно описать турбулентный перенос крупномасштабными вихревыми структурами. Гипотезы Миллионщикова для этого оказывается недостаточно.

Введение. В последние годы интенсивно развивались новые направления исследования турбулентных течений, базирующиеся на построении замкнутых уравнений турбулентного переноса и их численной реализации на компьютерах. Широкое применение получил подход, основанный на использовании двухпараметрической модели турбулентности, а также моделей второго порядка замыкания, которые эффективны с вычислительной точки зрения и позволяют получить результаты с точностью, достаточной для многих прикладных задач. Однако использование таких моделей для описания турбулентного переноса в стратифицированных течениях в ряде случаев дает качественно неверный результат (см., например, [1]). Анизотропный характер влияния плавучести на структуру турбулентности в основном сказывается на длинноволновой области спектра турбулентных пульсаций [2]. Эта область спектра соответствует крупномасштабным вихревым структурам (КВС), содержащим основную часть энергии турбулентности. Согласно экспериментальным и теоретическим исследованиям в стратифицированных течениях формируются следующие КВС: турбулентные пятна при устойчивой стратификации и когерентные структуры в случае неустойчивой стратификации, под воздействием которых в основном осуществляется турбулентный перенос. Эффекты перемежаемости и асимметрии вертикального турбулентного переноса, обусловленные влиянием на него КВС, делают распределения вероятностей турбулентных пульсаций существенно негауссовскими. Для описания структуры турбулентности таких течений используются модели третьего порядка замыкания, в которых тройные корреляции (асимметрия) вычисляются из дифференциальных уравнений переноса (см., например, [3, 4]). В данной работе дается уточнение таких моделей.

Применимость гипотезы квазинормальности Миллионщикова. Гипотеза квазинормальности Миллионщикова для вычисления четвертых моментов пульсаций скорости (а также смешанных ковариаций четвертого порядка пульсаций скорости, температуры и концентрации) статистических характеристик турбулентных течений часто используется для замыкания при построении полуэмпирических моделей турбулентного пе-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-02-16001; 98-01-00719) и Международной ассоциации содействия сотрудничеству с учеными из новых независимых государств бывшего Советского Союза (грант INTAS-OPEN-97-2022).

реноса второго и третьего порядков. Согласно этой гипотезе кумулянтами четвертого порядка можно пренебречь по сравнению с соответствующими корреляционными функциями. Применительно к моментам гидродинамических полей указанная гипотеза означает, что можно пользоваться равенством, позволяющим выражать четвертые моменты через вторые:
$$C_{ijkl} = \langle u_i u_j u_k u_l \rangle - \langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l \rangle - \langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l \rangle - \langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l \rangle, \qquad (1)$$
где C_{ijkl} — кумулянт четвертого порядка пульсаций скорости.

В ряде случаев использование (1) приводит к противоречащим законам физики результатам [2] (в [5, 6], например, к появлению отрицательных участков спектра кинетической энергии турбулентности). Последнее обстоятельство является следствием того, что при заданных вторых и третьих моментах распределение вероятности с равными нулю четвертыми кумулянтами может и не существовать; оно тесно связано с недопустимостью произвольного обрывания ряда Тейлора для логарифма характеристического функционала.

При построении полуэмпирических моделей турбулентности использование (1) позволяет объединить в уравнениях переноса для тройных корреляций члены, описывающие турбулентную диффузию и генерацию нелинейного взаимодействия пульсаций. Полученные дифференциальные уравнения первого порядка для третьих моментов не учитывают необходимый механизм ослабления тройных корреляций. Для его учета в [4, 7] уравнения дополнялись диффузионными слагаемыми, а в [3] использовалась операция «обрезания» величины тройных корреляций в соответствии с обобщенными неравенствами Шварца (clipping approximation). В обоих случаях процедура учета демпфирования третьих моментов представляется физически некорректной. В работе [6] показано, что для описания начальной стадии возникновения турбулентности в потоках вязкой несжимаемой жидкости область применения гипотезы (1) ограничена такими малыми амплитудами пульсаций, при которых третьи моменты малы, в то время как гипотеза о равенстве нулю кумулянтов пятого порядка (при ненулевых значениях кумулянтов четвертого порядка) позволяет существенно расширить область применимости модели. Аналогичный подход используется и в данной работе. Он позволяет получить алгебраические модели для кумулянтов четвертого порядка, включающие механизм демпфирования тройных корреляций (при подстановке в дифференциальные уравнения переноса для тройных корреляций). При этом полученные модели не требуют привлечения дополнительных эмпирических коэффициентов.

Модель кумулянтов четвертого порядка скорости и температуры. Теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют о формировании при неустойчивой стратификации в атмосферном пограничном слое (АПС) крупномасштабных конвективных вихрей (когерентных структур) [1, 8], под воздействием которых в основном осуществляется турбулентный перенос импульса, тепла и вещества. Такой перенос носит контрградиентный характер и не может быть физически корректно описан при помощи существующих моделей турбулентности второго и третьего порядков замыкания. В частности, модели тройных корреляций градиентного типа (учитывающие в том числе эффект плавучести [9, 10]) в приземном слое дают отрицательную величину асимметрии пульсаций вертикальной компоненты скорости в прямом противоречии с данными измерений [11], а в модели [3], содержащей дифференциальные уравнения переноса для моментов до третьего порядка включительно, используется физически некорректная процедура clipping approximation.

Пульсации скорости крупномасштабных конвективных вихрей соответствуют малым значениям волнового вектора $\boldsymbol{k}$ в спектре кинетической энергии турбулентности (КЭТ). Использование гипотезы Миллионщикова при описании трехмерной турбулентности приводит к появлению отрицательной области спектра КЭТ при малых $\boldsymbol{k}$ [2], что может являться причиной некорректности моделей турбулентности при описании переноса крупномасштабными вихревыми структурами.

Для получения замкнутой модели турбулентного переноса, не предполагающей равенства нулю кумулянтов четвертого порядка, в данной работе процедура замыкания выполняется на уровне пятых моментов, т. е. используется предположение о равенстве нулю кумулянтов пятого порядка. Необходимо заметить, что согласно теореме Марцинкевича [12] производящая функция кумулянтов не может быть полиномом степени, большей, чем 2, т. е. либо все кумулянты, кроме первых двух, равны нулю (нормальное распределение), либо имеется бесконечное число отличных от нуля кумулянтов. В данной работе используется предположение о том, что полученные в результате обрывания ряда Тейлора производящей функции на n-м члене уравнения для кумулянтов порядка $n-2$ учитывают основные физические механизмы, и поэтому вносимая на их величину погрешность будет незначительной. Так, для получения распределения кумулянтов (корреляций) третьего порядка последние вычисляются из дифференциальных уравнений переноса; кумулянты четвертого порядка определяются приближенно (по алгебраическим выражениям), а кумулянты пятого порядка полагаются равными нулю, как вносящие пренебрежимо малый вклад. Полученные результаты [13] моделирования вертикального турбулентного переноса в конвективном АПС свидетельствуют о правомерности такого подхода.

Уравнения для моментов скорости второго и четвертого порядка в приближении Буссинеска [1] имеют вид

$$\frac{\partial\langle u_iu_ju_ku_l\rangle}{\partial t}+U_m\,\frac{\partial\langle u_iu_ju_ku_l\rangle}{\partial x_m}=-\frac{\partial\langle u_iu_ju_ku_lu_m\rangle}{\partial x_m}-\sum_{ijkl}\Big[\langle u_iu_ju_ku_m\rangle\,\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+$$

$$+\langle u_iu_ju_k\rangle\,\frac{\partial\langle u_lu_m\rangle}{\partial x_m}+\beta g_m\langle u_iu_ju_k\theta\rangle\delta_{ml}+\frac{1}{\rho}\Big\langle u_iu_ju_k\,\frac{\partial p}{\partial x_l}\Big\rangle-\nu\Big\langle u_iu_ju_k\,\frac{\partial^2u_l}{\partial x_m\,\partial x_m}\Big\rangle\Big]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\langle u_iu_j\rangle}{\partial t}+U_k\,\frac{\partial\langle u_iu_j\rangle}{\partial x_k}=-\frac{\partial\langle u_iu_ju_k\rangle}{\partial x_k}-$$

$$-\sum_{ij}\Big[\langle u_iu_k\rangle\,\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\beta g_k\langle u_i\theta\rangle\delta_{jk}+\frac{1}{\rho}\Big\langle u_i\,\frac{\partial p}{\partial x_j}\Big\rangle-\nu\Big\langle u_i\,\frac{\partial^2u_j}{\partial x_k\,\partial x_k}\Big\rangle\Big], \quad (3)$$

где U_i, u_i — средняя и пульсационная составляющие мгновенной скорости; p — пульсации давления; $\beta=1/\Theta$ — коэффициент объемного расширения; Θ и θ — средняя и пульсационная потенциальная температура; g_m — вектор ускорения свободного падения; ρ, ν — плотность и вязкость жидкости. В (2), (3) используется обозначение суммы функций, стоящих под знаком $\sum\limits_{ijkl}$, отличающихся циклической перестановкой индексов i, j, k, l: $\sum\limits_{ijkl}F(u_i,u_j,u_k,u_l,u_m)=F(u_i,u_j,u_k,u_l,u_m)+F(u_l,u_i,u_j,u_k,u_m)+F(u_k,u_l,u_i,u_j,u_m)+F(u_j,u_k,u_l,u_i,u_m)$.

Для выражения моментов пятого порядка в уравнении (2) используется предположение о равенстве нулю кумулянтов пятого порядка:

$$C_{ijklm}=\langle u_iu_ju_ku_lu_m\rangle-\langle u_iu_j\rangle\langle u_ku_lu_m\rangle-\langle u_iu_k\rangle\langle u_ju_lu_m\rangle-\langle u_iu_l\rangle\langle u_ku_ju_m\rangle-$$

$$-\langle u_iu_m\rangle\langle u_ku_lu_j\rangle-\langle u_ju_k\rangle\langle u_iu_lu_m\rangle-\langle u_ju_l\rangle\langle u_iu_ku_m\rangle-\langle u_ju_m\rangle\langle u_iu_ku_l\rangle-$$

$$-\langle u_ku_l\rangle\langle u_iu_ju_m\rangle-\langle u_ku_m\rangle\langle u_iu_ju_l\rangle-\langle u_lu_m\rangle\langle u_iu_ju_k\rangle=0. \quad (4)$$

Заметим, что в [14] показана корректность использования (4) для кумулянтов C_{33333} и C_{33331} при анализе измеренных статистических характеристик турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Уравнение для кумулянтов четвертого порядка (далее кумулянтов) C_{ijkl} с учетом (2)–(4) имеет вид

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial t}+U_m\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_m}=\sum_{ijkl}\Big\{-C_{ijkm}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}-C_{ijk\theta}\beta g_m\delta_{ml}-\frac{1}{\rho}\Big[\Big\langle u_iu_ju_k\frac{\partial p}{\partial x_l}\Big\rangle-$$
$$-\langle u_iu_j\rangle\Big\langle u_k\frac{\partial p}{\partial x_l}\Big\rangle-\langle u_iu_k\rangle\Big\langle u_j\frac{\partial p}{\partial x_l}\Big\rangle-\langle u_iu_l\rangle\Big\langle u_j\frac{\partial p}{\partial x_k}\Big\rangle\Big]+\nu\Big[\Big\langle u_iu_ju_k\frac{\partial u_l}{\partial x_m\partial x_m}\Big\rangle-$$
$$-\langle u_iu_j\rangle\Big\langle u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_m\partial x_m}\Big\rangle-\langle u_iu_k\rangle\Big\langle u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_m\partial x_m}\Big\rangle-\langle u_iu_l\rangle\Big\langle u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_m\partial x_m}\Big\rangle\Big]-$$
$$-\langle u_iu_ju_m\rangle\frac{\partial\langle u_ku_l\rangle}{\partial x_m}-\langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_ku_l\rangle}{\partial x_m}\Big\}-\langle u_iu_ku_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_l\rangle}{\partial x_m}-\langle u_ju_lu_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_k\rangle}{\partial x_m},\qquad(5)$$

где $C_{ijk\theta}=\langle u_iu_ju_k\theta\rangle-\langle u_iu_j\rangle\langle u_k\theta\rangle-\langle u_iu_k\rangle\langle u_j\theta\rangle-\langle u_ju_k\rangle\langle u_i\theta\rangle$ — смешанный кумулянт пульсаций скорости и потенциальной температуры. Уравнение (5) включает неизвестные кумулянты (третье и четвертое слагаемые в правой части уравнения). В приближении больших чисел Рейнольдса слагаемое с вязкостью вносит пренебрежимо малый вклад и в данной работе полагается равным нулю. Из уравнения (5) следует, что смешанный кумулянт пульсаций скорости и производной от пульсаций давления стремится к нулю при приближении турбулентности к равновесному состоянию (гауссовской турбулентности с нулевыми кумулянтами порядка выше второго). Для его параметризации используется предположение о релаксационном характере стремления турбулентности к равновесному состоянию. Тогда кумулянт с пульсациями давления может быть представлен в виде релаксационного слагаемого C_{ijkl}/τ_4 ($\tau_4=\tau/C_4$, $\tau=E/\varepsilon$ — характерный временной масштаб турбулентности; $E=1/2\langle u_iu_i\rangle$ — плотность КЭТ (на единицу массы); ε — спектральный поток КЭТ (скорость диссипации КЭТ); C_4 — коэффициент пропорциональности между характерным временным масштабом турбулентности и характерным временем релаксации кумулянтов), а уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial t}+U_m\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_m}=\sum_{ijkl}\Big[-C_{ijkm}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}-C_{ijk\theta}\beta g_m\delta_{ml}-\langle u_iu_ju_m\rangle\frac{\partial\langle u_ku_l\rangle}{\partial x_m}-$$
$$-\langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_ku_l\rangle}{\partial x_m}\Big]-\langle u_iu_ku_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_l\rangle}{\partial x_m}-\langle u_ju_lu_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_k\rangle}{\partial x_m}-C_4\frac{C_{ijkl}}{\tau}.\qquad(6)$$

Алгебраическое выражение для кумулянта C_{ijkl} получается из (6) в стационарном случае без учета конвективного слагаемого:

$$C_{ijkl}=-\frac{\tau}{C_4}\Big\{\sum_{ijkl}\Big[C_{ijkm}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}+C_{ijk\theta}\beta g_m\delta_{ml}+\langle u_iu_ju_m\rangle\frac{\partial\langle u_ku_l\rangle}{\partial x_m}+$$
$$+\langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_ku_l\rangle}{\partial x_m}\Big]+\langle u_iu_ku_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_l\rangle}{\partial x_m}+\langle u_ju_lu_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_k\rangle}{\partial x_m}\Big\}.\qquad(7)$$

При вычислении эволюции моментов до третьего порядка включительно использование в модели параметризации (7) (уравнения (6) в стационарном случае) для кумулянта C_{ijkl} подразумевает более быструю релаксацию последнего по сравнению с третьими моментами. Это условие накладывает ограничение на величину коэффициента C_4: $C_4>C_3$; C_3 — коэффициент пропорциональности между характерным временным масштабом турбулентности и характерным временем релаксации тройных корреляций (коэффициент модели корреляции с пульсациями давления в уравнениях для третьих моментов). Для определения C_4 рассматривается неравенство Шварца для тройной корреляции $\langle u_i^3\rangle$

$$\langle u_i^2\rangle\langle u_i^4\rangle-\langle u_i^3\rangle^2\geqslant 0.\qquad(8)$$

В работе [3] выполнение условия (8) для корреляции $\langle w^3\rangle$ (с использованием (1) для параметризации момента четвертого порядка $\langle w^4\rangle$) достигалось путем усечения величины тройной корреляции $\langle w^3\rangle$. В данной работе из условия выполнения неравенства (8) определяется верхняя граница численного значения коэффициента C_4. Для этого выписывается более сильное неравенство

$$C_{iiii} \geqslant \langle u_i^3\rangle^2/\langle u_i^2\rangle, \tag{9}$$

затем рассматривается процесс релаксационного затухания однородной турбулентности по законам

$$\langle w^2\rangle = \langle w^2\rangle_0 \exp(-t/\tau), \quad \langle w^3\rangle = \langle w^3\rangle_0 \exp(-C_3t/\tau), \quad C_{iiii} = C_{iiii0}\exp(-C_4t/\tau). \tag{10}$$

Из (9) с учетом (10) следует условие $C_4 \leqslant 2C_3 - 1$. Для корректного использования выражения (7) для кумулянта C_{ijkl} (стационарный случай уравнения (6)) численное значение коэффициента C_4 полагается равным верхней границе полученного условия: $C_4 = 2C_3 - 1$.

Алгебраическая модель кумулянта пульсаций скорости (8) для стратифицированного течения включает смешанные кумулянты пульсаций скорости и потенциальной температуры. С использованием аналогичных рассуждений для них могут быть построены алгебраические модели

$$C_{ijk\theta} = -\frac{\tau}{C_{4\theta}}\Big\{\sum_{ijk}\Big[C_{ijm\theta}\frac{\partial U_k}{\partial x_m} + C_{ijkm}\frac{\partial\Theta}{\partial x_m} + C_{ij\theta\theta}\beta g_m\delta_{km} + \langle u_iu_ju_m\rangle\frac{\partial\langle u_k\theta\rangle}{\partial x_m} + \\ + \langle u_i\theta u_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_k\rangle}{\partial x_m} + \langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle u_ju_k\theta\rangle}{\partial x_m}\Big] + \langle\theta u_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_ju_k\rangle}{\partial x_m}\Big\}; \tag{11}$$

$$C_{ij\theta\theta} = -\frac{\tau}{C_{4\theta}}\Big\{\sum_{ij}\Big[C_{im\theta\theta}\frac{\partial U_j}{\partial x_m} + 2C_{ijm\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x_m} + C_{i\theta\theta\theta}\beta g_m\delta_{jm} + \langle\theta u_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_j\theta\rangle}{\partial x_m} + \\ + 2\langle u_i\theta u_m\rangle\frac{\partial\langle u_j\theta\rangle}{\partial x_m} + \langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle u_j\theta^2\rangle}{\partial x_m}\Big] + \langle\theta^2u_m\rangle\frac{\partial\langle u_iu_j\rangle}{\partial x_m} + \langle u_iu_ju_m\rangle\frac{\partial\langle\theta^2\rangle}{\partial x_m}\Big\}; \tag{12}$$

$$C_{i\theta\theta\theta} = -\frac{\tau}{C_{4\theta}}\Big[C_{m\theta\theta\theta}\frac{\partial U_i}{\partial x_m} + 3C_{im\theta\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x_m} + C_{\theta\theta\theta\theta}\beta g_m\delta_{im} + 3\langle\theta^2u_m\rangle\frac{\partial\langle u_i\theta\rangle}{\partial x_m} + \\ + 3\langle u_iu_m\theta\rangle\frac{\partial\langle\theta^2\rangle}{\partial x_m} + 3\langle\theta u_m\rangle\frac{\partial\langle u_i\theta^2\rangle}{\partial x_m} + \langle u_iu_m\rangle\frac{\partial\langle\theta^3\rangle}{\partial x_m}\Big]; \tag{13}$$

$$C_{\theta\theta\theta\theta} = -\frac{\tau}{C_{4\theta\theta}}\Big[4C_{m\theta\theta\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x_m} + 6\langle u_m\theta^2\rangle\frac{\partial\langle\theta^2\rangle}{\partial x_m} + 4\langle u_m\theta\rangle\frac{\partial\langle\theta^3\rangle}{\partial x_m}\Big]. \tag{14}$$

Поскольку в уравнениях (11)–(13) механизм релаксационного затухания обусловлен корреляциями с пульсациями давления, а в уравнении (14) (как и в уравнениях для корреляций $\langle\theta^2\rangle$ и $\langle\theta^3\rangle$) — молекулярным теплопереносом, релаксационные коэффициенты $C_{4\theta}$ и C_θ для уравнений (11)–(13) и (14) не полагаются равными.

Усиленные неравенства Шварца для кумулянтов $C_{ii\theta\theta}$ и $C_{\theta\theta\theta\theta}$ имеют вид

$$C_{ii\theta\theta} \geqslant \frac{\langle u_i^2\theta\rangle^2}{\langle u_i^2\rangle}, \qquad C_{\theta\theta\theta\theta} \geqslant \langle\theta^3\rangle^2/\langle\theta^2\rangle. \tag{15}$$

Из неравенств (15) при рассмотрении процесса распространения тепла в поле затухающей турбулентности следуют уравнения для релаксационных коэффициентов $C_{4\theta} = 2C_{3\theta\theta} - 1$ и $C_\theta = 2C_{3\theta} - r$, где $C_{3\theta\theta}$ и $C_{3\theta}$ — коэффициенты характерных масштабов времени релаксации тройных корреляций $\langle u_i^2\theta\rangle$ и $\langle\theta^3\rangle$ соответственно, $r = \tau/\tau_\theta$ — отношение масштабов времени пульсаций скорости и температуры ($\tau_\theta = \langle\theta^2\rangle/\varepsilon_\theta$, ε_θ — деструкция турбулентных пульсаций температуры).

В [13] при моделировании эволюции конвективного АПС для параметризации процессов турбулентной диффузии в уравнениях переноса для тройных корреляций $\langle w^3\rangle$ и $\langle w^2\theta\rangle$ использовалась модель (7), (11) без учета в ней эффектов плавучести. Вычисленные профили вертикального потока КЭТ $\langle wE'\rangle$ и корреляции $\langle w^3\rangle$, положительные по всей высоте АПС, согласуются с данными измерений. Однако отсутствие измеренных в АПС распределений моментов четвертого порядка не позволяет оценить адекватность представленной модели для кумулянтов (7), (11)–(14).

В работе [15] измерены распределения дисперсии σ_w ($\sigma_w^2 = \langle w^2\rangle$), асимметрии $S_w = \langle w^3\rangle/\langle w^2\rangle^{3/2}$ и куртозиса $K_w = \langle w^4\rangle/\langle w^2\rangle^2$ вертикальной скорости в пограничном слое на плоской шероховатой пластине. Однако отсутствие в [15] данных о распределении по вертикали характерного временного масштаба турбулентности τ (или спектрального потока КЭТ) также не позволяет проверить адекватность представленной модели для кумулянтов непосредственной подстановкой измеренных величин в (8). Тем не менее с учетом того, что для указанного течения поведение момента третьего порядка $\langle w^3\rangle$ описывается алгебраической моделью градиентного типа, полученной из соответствующего дифференциального уравнения переноса в приближении локального баланса [16]:

$$\langle w^3\rangle = (-3\tau/C_3)\langle w^2\rangle\partial\langle w^2\rangle/\partial z,$$

величина кумулянта может быть определена из алгебраического выражения, полученного из (7):

$$C_{3333} = \frac{C_3/3}{2C_3-1}\left[\frac{\langle w^3\rangle^2}{\langle w^2\rangle} + 4\langle w^3\rangle\,\frac{\partial\langle w^3\rangle/\partial z}{\partial\langle w^2\rangle/\partial z}\right], \tag{16}$$

где $C_3 = 4$ [16].

Профиль куртозиса K_w, вычисленный путем подстановки в (16) аналитических функций, описывающих измеренные в [15] распределения дисперсии σ_w и асимметрии S_w вертикальных пульсаций скорости w (кривые на рис. 1), представлен на рис. 2 (d — высота вытеснения жидкости элементами шероховатости, δ — высота пограничного слоя). Точками на рис. 1, 2 показаны данные измерений [15]. На рис. 2 видно, что для пограничного слоя на плоской пластине алгебраическая модель (7) для кумулянта C_{3333} корректно описывает его поведение.

Представленные результаты, а также результаты работы [13] позволяют заключить, что в пограничных слоях алгебраическая модель для кумулянтов может быть использована

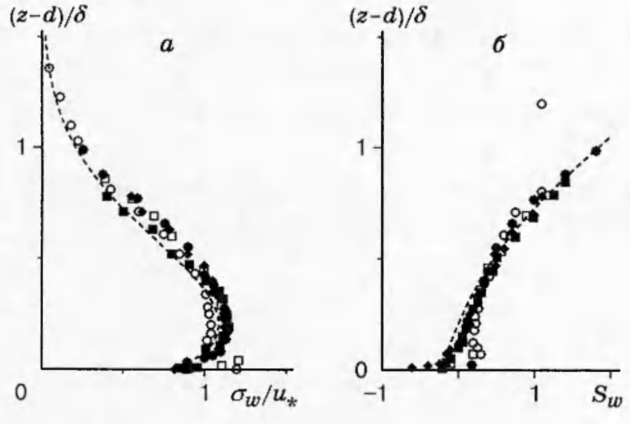

Рис. 1

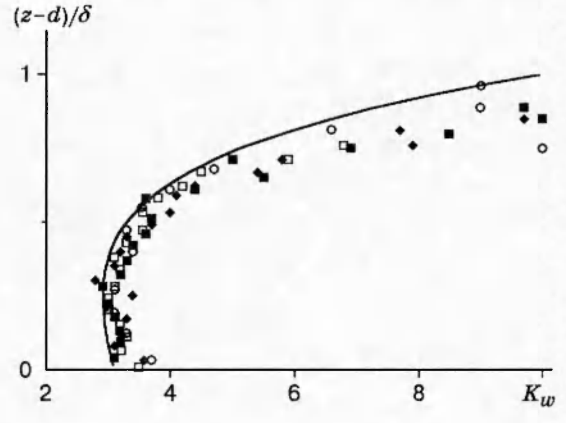

Рис. 2

как для параметризации процессов турбулентной диффузии в уравнениях переноса для моментов третьего порядка, так и для вычисления самих кумулянтов.

Автор выражает благодарность А. Ф. Курбацкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ньистадт Ф. Т. М., Ван Доп Х.** Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей. Л.: Гидрометеоиздат, 1985.
2. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 1, 2.
3. **Andre J. C., De Moor G., Lacarrere P., et al.** Modeling the 24-hour evolution of the mean and temperature structures of the planetary boundary layer // J. Atmospheric Sci. 1978. V. 35, N 10. P. 1861–1883.
4. **Craft T. J., Ridger J. W., Launder B. E.** Importance of third-moment modeling in horizontal, stably-stratified flows // Proc. of the 11th Intern. symp. on turbulent shear flows. Sept. 8–11, 1997. Grenoble (France), 1997. V. 2. P. 2013–2018.
5. **Ogura Y.** Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 4. P. 395–401.
6. **Хазен Э. М.** К нелинейной теории возникновения турбулентности // Докл. АН СССР. 1963. Т. 163, № 6. С. 1282–1287.
7. **Deardorff J. W.** Closure of second- and third-moment rate equations for diffusion in homogeneous turbulence // Phys. Fluids. 1978. V. 21, N 4. P. 525–530.
8. **Schmidt H., Schumann U.** Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations // J. Fluid Mech. 1989. V. 200. P. 511–562.
9. **Canuto V. M., Minotti F., Ronchi C., et al.** Second-order closure PBL model with new third-order moments: comparison with LES data // J. Atmospheric Sci. 1994. V. 51, N 12. P. 1605–1618.
10. **Илюшин Б. В., Курбацкий А. Ф.** Моделирование распространения примеси в конвективном пограничном слое атмосферы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32, № 3. С. 307–322.
11. **Lenschow D. H., Wyngaard J. C., Pennel W. T.** Mean-field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer // J. Atmospheric Sci. 1980. V. 37, N 4. P. 1313–1326.
12. **Гардинер К. В.** Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
13. **Ilyushin B. B., Kurbatskii A. F.** Modeling of turbulent transport in PBL with third-order moments // Proc. of the 11th Intern. symp. on turbulent shear flows. Sept. 8–10, 1997. Grenoble (France), 1997. V. 2. P. 2019–2024.
14. **Jovanovic J., Durst F.** Statistical analysis of dynamic equations for higher-order moments in turbulent wall bounded flows // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, N 11. P. 2886–2900.
15. **Raupach M. R.** Conditional statistics of Reynolds stress in rough-wall and smooth-wall turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 363–382.
16. **Кормак Д., Лил Л., Сейнфелд Дж.** Анализ моделей турбулентности для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Тройные корреляции скорости // Теорет. основы. 1978. Т. 100, № 1. С. 169–177.

Поступила в редакцию 3/XI 1997 г.,
в окончательном варианте — 6/I 1998 г.