УДК 532.516; 532.582

О ПОВЕДЕНИИ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о движении твердого шара в покоящейся вдали от него вязкой жидкости, происходящем вследствие заданных пульсаций шара и наличия силы тяжести.

Экспериментальные и теоретические исследования [1–8] позволили установить, что колебательные воздействия на жидкость с твердым телом могут приводить к качественным изменениям в поведении тела.

В работе [7] поставлена и решена задача о движении пульсирующего твердого шара в не ограниченной извне вязкой несжимаемой жидкости, совершающей колебания на бесконечности, в отсутствие силы тяжести. В данной работе рассмотрена задача о движении пульсирующего твердого шара в не ограниченной извне вязкой несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, в присутствии силы тяжести. Обнаружено, что поведение пульсирующего шара может качественно отличаться от поведения шара постоянного объема, пульсирующий шар может вести себя необычно, парадоксально.

1. В вязкой несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится тело — сжимаемый твердый шар. Жидкость на бесконечности покоится относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Радиус шара заданным образом периодически с периодом T изменяется со временем t. Распределение составляющей шар среды симметрично относительно его центра (центр инерции и центр шара совпадают). Имеется постоянное поле силы тяжести; ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$. Течение жидкости является не зависящим от начальных условий. Положение шара определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{S}$ его центра. Требуется найти, как $\boldsymbol{S}$ зависит от t.

Представляемая постановка задачи соответствует тому, что жидкость, содержащая тело, заполняет замкнутый сосуд, и пульсации тела (периодические изменения со временем объема тела) происходят вследствие деформаций сосуда (см. [7]). Отметим, однако, что причиной пульсаций тела могут быть силы, действующие внутри него. Тогда тело совершает движение в жидкости, испытывающей воздействия колебательного характера, которые порождает само тело.

Будем рассматривать течение жидкости и движение шара относительно прямоугольной системы координат $X_1 = X - S_X$, $X_2 = Y - S_Y$, $X_3 = Z - S_Z$ (S_X, S_Y, S_Z — соответственно X-, Y-, Z-компоненты вектора $\boldsymbol{S}$).

Пусть $\tau = t/T$; $A = A_0(1+æa)$ — радиус шара (A_0 ($A_0 > 0$) — постоянная; $æ$ ($æ < 1$) — наибольшее значение $|A - A_0|/A_0$; $a = \mathrm{Real} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$ (a_m — постоянные)); $x_1 = X_1/A_0$; $x_2 = X_2/A_0$; $x_3 = X_3/A_0$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; ρ — плотность жидкости; m — масса шара; $\mu = 3m/(4\pi A_0^3 \rho)$; (s) — поверхность шара (уравнение (s) есть $r = 1 + æa$); $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к (s); $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k} = -T^2 \boldsymbol{g}/A_0$ ($\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$); $\boldsymbol{V}$ — скорость жидкости;

$\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{V}/A_0$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{W} = d\boldsymbol{S}/dt$; $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{W}/A_0$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = A_0^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\mathcal{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\wp = T^2\mathcal{P}/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на шар со стороны жидкости; $\boldsymbol{f} = T^2\boldsymbol{F}/(\rho A_0^4) = \iint\limits_{(s)} \wp \cdot \boldsymbol{n}\, ds$.

Уравнение движения центра инерции шара, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на (s) и при $r \to \infty$, имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{f} - \frac{4\pi}{3}\,\mu\Big(\frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau} + \boldsymbol{\alpha}\Big) = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau} - \boldsymbol{\alpha}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0; \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{v} = æ\frac{da}{d\tau}\boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad (s), \qquad \boldsymbol{v} \sim -\boldsymbol{w} \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{1.2}$$

2. Будем рассматривать задачу (1.1), (1.2) при малых по сравнению с единицей значениях Re.

Предположим, что при $\mathrm{Re} \to 0$

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}_{(0)} + \mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}_{(1)}, \quad p \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}\,p_{(0)} + p_{(1)}, \quad \boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{w}_{(0)} + \mathrm{Re}\,\boldsymbol{w}_{(1)}. \tag{2.1}$$

Согласно (1.1), (1.2), (2.1) в L-м ($L = 0,\ 1$) приближении имеем

$$\boldsymbol{f}_{(L)} - L\,\frac{4\pi}{3}\,\mu\Big(\frac{d\boldsymbol{w}_{(0)}}{d\tau} + \boldsymbol{\alpha}\Big) = 0,$$
$$\nabla p_{(L)} - \Delta\boldsymbol{v}_{(L)} + L\Big[\frac{\partial\boldsymbol{v}_{(0)}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}_{(0)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{(0)} + \frac{d\boldsymbol{w}_{(0)}}{d\tau} + \boldsymbol{\alpha}\Big] = 0, \tag{2.2}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{(L)} = 0;$$

$$\boldsymbol{v}_{(L)} = (1 - L)æ\frac{da}{d\tau}\boldsymbol{n} \quad \text{при} \quad r = 1 + æa, \quad \boldsymbol{v}_{(L)} \sim -\boldsymbol{w}_{(L)} \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{2.3}$$

где

$$\boldsymbol{f}_{(L)} = \iint\limits_{(s)} \wp_{(L)}\cdot\boldsymbol{n}\,ds \tag{2.4}$$

($\wp_{(L)}$ есть $\wp$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{(L)}$, $p = p_{(L)}$, $\mathrm{Re} = 1$ ($\wp \sim (1/\mathrm{Re})\wp_{(0)} + \wp_{(1)}$, $\boldsymbol{f} \sim (1/\mathrm{Re})\boldsymbol{f}_{(0)} + \boldsymbol{f}_{(1)}$ при $\mathrm{Re} \to 0$)).

Пусть $L = 0$. В нулевом приближении из-за действия силы тяжести не может происходить перемещение шара с отличной от нуля скоростью относительно находящейся на бесконечности жидкости; центр инерции шара покоится относительно системы координат X, Y, Z, течение жидкости симметрично относительно начала координат x_1, x_2, x_3. Задача (2.2)–(2.4) имеет решение

$$\boldsymbol{v}_{(0)} = æ\frac{da}{d\tau}\,(1 + æa)^2 r^{-3}\boldsymbol{r}, \qquad p_{(0)} = c_{(0)};$$
$$\boldsymbol{f}_{(0)} = 0; \tag{2.5}$$
$$\boldsymbol{w}_{(0)} = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$; $c_{(0)}$ — функция τ.

Пусть $L = 1$. Задача (2.2)–(2.4) имеет решение

$$v_{(1)r} = w_{(1)}\{-1 + (1/2)(1+æa)[3 - (1+æa)^2 r^{-2}]r^{-1}\}\cos\theta,$$

$$v_{(1)\theta} = w_{(1)}\{1 - (1/4)(1+æa)[3 + (1+æa)^2 r^{-2}]r^{-1}\}\sin\theta, \qquad v_{(1)\varphi} = 0,$$

$$p_{(1)} = \Big[-\alpha r + \frac{3}{2}\,w_{(1)}(1+æa)r^{-2}\Big]\cos\theta + æ\,\frac{d[(da/d\tau)(1+æa)^2]}{d\tau}\,r^{-1} - \\ - \frac{1}{2}\,æ^2\Big(\frac{da}{d\tau}\Big)^2(1+æa)^4 r^{-4} + c_{(1)};$$

$$\boldsymbol{f}_{(1)} = (4\pi/3)(1+æa)^3\boldsymbol{\alpha} - 6\pi(1+æa)\boldsymbol{w}_{(1)}; \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{w}_{(1)} = (2/9)[(1+æa)^2 - \mu(1+æa)^{-1}]\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.8}$$

Здесь θ — угол между векторами $(0,0,1)$ и (x_1,x_2,x_3); φ — угол между векторами $(1,0,0)$ и $(x_1,x_2,0)$ (r, θ, φ — сферические координаты); $v_{(1)r}$, $v_{(1)\theta}$, $v_{(1)\varphi}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\boldsymbol{v}_{(1)}$; $c_{(1)}$ — функция τ.

3. Используя (2.6), (2.8), получим

$$\boldsymbol{W} = (2/9)[\mu(1+æa)^{-1} - (1+æa)^2]\,A_0^2\boldsymbol{g}/\nu. \tag{3.1}$$

При $æ = 0$, для шара постоянного объема, (3.1) принимает вид

$$\boldsymbol{W} = W_0\boldsymbol{k}, \tag{3.2}$$

где $W_0 = (2/9)(1-\mu)A_0^2 g/\nu$. Отметим, что (3.2) совпадает с формулой Стокса для скорости, с которой движется шар постоянного объема в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса в присутствии силы тяжести [9, 10].

Из (3.1) следует

$$\boldsymbol{S} = \bar{W}t\boldsymbol{k} + \tilde{\boldsymbol{S}}, \tag{3.3}$$

где $\bar{W} = (2/9)[\langle(1+æa)^2\rangle - \mu\langle(1+æa)^{-1}\rangle]A_0^2 g/\nu$ $\Big(\langle\cdots\rangle = \int\limits_{\tau}^{\tau+1}\cdots d\tau\Big)$; $\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} S_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{S}_0$, S_m — постоянные). Соотношением (3.3) приближенно определяется зависимость $\boldsymbol{S}$ от t.

Согласно (3.3) шар движется вдоль оси Z, и его движение состоит из колебаний и перемещения с постоянной скоростью

$$\bar{\boldsymbol{W}} = \bar{W}\boldsymbol{k}. \tag{3.4}$$

Используя (3.2), (3.4), проведем сопоставление поведения пульсирующего шара с поведением шара постоянного объема.

А. Пусть $\mu < 1$. Тогда $W_0 > 0$, шар постоянного объема всплывает; пульсирующий шар может всплывать быстрее, чем шар постоянного объема (при $\bar{W} > W_0$), всплывать медленнее, чем шар постоянного объема (при $0 < \bar{W} < W_0$), не всплывать и не тонуть (при $\bar{W} = 0$), тонуть (при $\bar{W} < 0$).

Б. Пусть $\mu = 1$. Тогда $W_0 = 0$, шар постоянного объема покоится; пульсирующий шар может всплывать (при $\bar{W} > 0$), тонуть (при $\bar{W} < 0$).

В. Пусть $\mu > 1$. Тогда $W_0 < 0$, шар постоянного объема тонет; пульсирующий шар может тонуть быстрее, чем шар постоянного объема (при $\bar{W} < W_0$), тонуть медленнее, чем шар постоянного объема (при $W_0 < \bar{W} < 0$), не тонуть и не всплывать (при $\bar{W} = 0$), всплывать (при $\bar{W} > 0$).

Г. Пусть $\mu \lesseqqgtr 1$. Тогда $W_0 \gtreqqless 0$; пульсирующий шар может перемещаться так же, как шар постоянного объема (при $\bar{W} = W_0$).

4. Рассмотрим силовое воздействие на шар со стороны жидкости.

В соответствии с (2.5), (2.7) имеем

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{A}} + \boldsymbol{F}_{\text{C}}, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{A}} = F_{\text{A}}\boldsymbol{k} = -(4\pi/3)A^3\rho\boldsymbol{g}$ — выталкивающая сила Архимеда; $\boldsymbol{F}_{\text{C}} = -6\pi\rho\nu A\boldsymbol{W}$ — сила сопротивления Стокса.

Из (3.1), (4.1) следует

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle = \langle\boldsymbol{F}_{\text{A}}\rangle - 6\pi\rho\nu A_0\bar{\boldsymbol{W}} + \boldsymbol{F}_{\text{к}}, \tag{4.2}$$

где

$$\boldsymbol{F}_{\text{к}} = -6\pi\rho\nu A_0 æ\langle a\tilde{\boldsymbol{W}}\rangle = (4\pi/3)æ[2æ\langle a^2\rangle + æ^2\langle a^3\rangle - \mu\langle a(1+æa)^{-1}\rangle]A_0^3\rho\boldsymbol{g} \tag{4.3}$$

($\tilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W} - \bar{\boldsymbol{W}}$).

Представим $\langle\boldsymbol{F}_{\text{A}}\rangle$ в виде

$$\langle\boldsymbol{F}_{\text{A}}\rangle = \boldsymbol{F}_{\text{A}0} - (4\pi/3)æ^2(3\langle a^2\rangle + æ\langle a^3\rangle)A_0^3\rho\boldsymbol{g}, \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{A}0} = F_{\text{A}0}\boldsymbol{k} = -(4\pi/3)A_0^3\rho\boldsymbol{g}$. Согласно (4.4) $\langle F_{\text{A}}\rangle > F_{\text{A}0}$. Это соотношение, в частности, указывает на то, что при $\mu < 1$, в то время как шар постоянного объема всплывает, пульсирующий шар должен всплывать тем более. Однако, как отмечено выше, при $\mu < 1$ пульсирующий шар может, например, тонуть. Таким образом, пульсирующее тело в жидкости в присутствии массовой силы может вести себя необычно, парадоксально. Причина такого поведения пульсирующего шара состоит в том, что шар вследствие периодических изменений его объема и наличия силы тяжести колеблется вдоль вертикальной оси относительно находящейся на бесконечности жидкости, а одновременное осуществление этих колебаний и упомянутых изменений объема шара приводит к тому, что на шар со стороны жидкости действует сила $\boldsymbol{F}_{\text{к}}$ (см. (4.1)–(4.3)). В соответствии с (4.3) $\boldsymbol{F}_{\text{к}}$ не зависит от t, направление $\boldsymbol{F}_{\text{к}}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{g}$, противоположно направлению $\langle\boldsymbol{F}_{\text{A}}\rangle$. Под действием силы $\boldsymbol{F}_{\text{к}}$ реализуются как эффект "шар постоянного объема всплывает — пульсирующий шар тонет", так и другие типы поведения пульсирующего шара.

5. Пусть значения $æ$ малы по сравнению с единицей.

Из (3.4) следует, что при $æ \to 0$

$$\bar{\boldsymbol{W}} \sim (2/9)[(\mu - 1)(1 + æ^2\langle a^2\rangle) - \mu æ^3\langle a^3\rangle]A_0^2\boldsymbol{g}/\nu. \tag{5.1}$$

Зависимость a от τ может быть задана так, чтобы $\langle a^3\rangle$ было положительным, отрицательным либо равным нулю (например, $\langle a^3\rangle \gtrless 0$, если $a = (\lambda/5)(4\cos 2\pi\tau + \cos 4\pi\tau)$ ($\lambda = \pm 1$); $\langle a^3\rangle = 0$, если $a = \lambda\cos 2\pi\tau$).

Используя (3.2), (5.1), нетрудно убедиться в том, что все упомянутые выше типы поведения пульсирующего шара являются возможными. В частности, согласно (3.2), (5.1) эффект "шар постоянного объема всплывает — пульсирующий шар тонет" имеет место при $1 + æ^3\langle a^3\rangle < \mu < 1$.

6. Полученные в данной работе результаты показывают, что в присутствии массовой силы для возникновения качественных изменений в поведении тела в жидкости может быть достаточно лишь осуществления пульсаций тела.

Как отмечалось ранее (см., например, [11, 12]), колебательные воздействия на жидкость с включениями могут использоваться в качестве средства для управления включениями. Изложенное выше демонстрирует еще одну, новую возможность вибрационного управления включениями в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челомей В. Н.** Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
3. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
4. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. № 1. С. 100, 101.
6. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
7. **Сенницкий В. Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
8. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
9. **Бэтчелор Д.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
10. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
11. **Sennitskii V. L.** Vibrational management of inclusions in liquid // 1st Intern. workshop on material processing in high gravity: Program and abstracts. Dubna (USSR), 1991.
12. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.

Поступила в редакцию 5/II 2001 г.