ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТЕЙШИХ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. А. Желтухин (*Новосибирск*)

Рассмотрим термогидродинамическую систему в виде канала переменного сечения, в котором течет газ и происходят различные процессы — теплообмен, горение, массообмен и др. Эти процессы, равно как и само изменение сечения, будем называть воздействиями на термогидродинамическую систему.

Воздействие считаем сосредоточенным, если оно происходит на достаточно коротком участке канала, так что этот участок можно заменить сечением со скачкообразным изменением параметров системы.

Система с тремя сосредоточенными воздействиями. За независимые безразмерные параметры [1] примем τ — время и ξ — координату; зависимыми безразмерными параметрами (малыми возмущениями) будут v — скорость, p — давление, s — энтропия.

Сосредоточенные воздействия, приложенные ко входу — ξ_1, выходу — ξ_2 и к промежуточному сечению — ξ_0, характеризуются импедансными и переходными соотношениями

$$\begin{aligned}
&v_1 + \lambda_1 p_1 = 0 \\
&s_1 + \mu_1 p_1 = 0 \qquad (\xi = \xi_1) \\
&v_2 + \lambda_2 p_2 + \mu_2 s_2 = 0 \qquad (\xi = \xi_2) \\
&v_2 = k_{11} v_1 + k_{12} p_1 + k_{13} s_1 \\
&p_2 = k_{21} v_1 + k_{22} p_1 + k_{23} s_1 \qquad (\xi = 0_0) \\
&s_2 = k_{31} v_1 + k_{32} p_1 + k_{33} s_1
\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 < \xi_0 < \xi_2 \\ \xi_0 = 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Здесь λ_i, μ_i, k_{ij} — действительные числа. Между сечениями сосредоточенных воздействий малые возмущения описываются уравнениями [1]

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + M_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \frac{\partial p_i}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial \tau} + M_i \frac{\partial p_i}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial s_i}{\partial \tau} + M_i \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0 \tag{2}$$

$$(M_i \text{ — числа Маха, } i = 1, 2)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$v_i = [A_i \varphi_1(\xi) + B_i \varphi_2(\xi)]\, e^{\beta\tau}, \quad p_i = [A_i \varphi_2(\xi) + B_i \varphi_1(\xi)]\, e^{\beta\tau}, \quad s_i = C_i \varphi_3(\xi)\, e^{\beta\tau} \tag{3}$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(\exp\frac{-\beta\xi}{M_i+1} + \exp\frac{-\beta\xi}{M_i-1}\right), \qquad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}\left(\exp\frac{-\beta\xi}{M_i+1} - \exp\frac{-\beta\xi}{M_i-1}\right), \qquad \varphi_3(\xi) = \exp\frac{-\beta\xi}{M_i} \tag{4}$$

Здесь A_i, B_i, C_i — константы интегрирования, $\beta = \nu + i\omega$ — комплексная частота.

После подстановки (3), (4) в (1) получается однородная система уравнений для отыскания коэффициентов A, B, C. Чтобы система имела ненулевые решения, необходимо, чтобы ее определитель $D(\beta) = 0$. Характеристическое уравнение $D(\beta) = 0$ служит для определения собственных комплексных частот системы — $\beta_2, \beta_1, \ldots$

Если хотя бы у одной собственной частоты β_n действительная часть ν_n положительна, то термогидродинамическая система неустойчива.

Уравнение $D(\beta) = 0$ в развернутом виде представим так:

$$A_{13} z_1 z_3 + A_{14} z_1 z_4 + A_{23} z_2 z_3 + A_{24} z_2 z_4 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4 + A_0 = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= (\lambda_1 + 1)(1 - \lambda_2)(k_{11} - k_{12} - k_{21} + k_{22}), & A_1 &= 2\mu_2(\lambda_1 + 1)(k_{31} - k_{32}) \\
A_{14} &= (\lambda_1 + 1)(1 + \lambda_2)(k_{11} - k_{12} + k_{21} - k_{22}), & A_2 &= 2\mu_2(\lambda_1 - 1)(k_{31} + k_{32}) \\
A_{23} &= (\lambda_1 - 1)(1 - \lambda_2)(k_{11} + k_{12} - k_{21} - k_{22}), & A_3 &= 2\mu_1(1 - \lambda_2)(k_{13} - k_{23}) \\
A_{24} &= (\lambda_1 - 1)(1 + \lambda_2)(k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}), & A_4 &= 2\mu_1(1 + \lambda_2)(k_{13} + k_{23})
\end{aligned} \tag{6}$$

$$A_0 = 4\mu_1\mu_2 k_{33}$$

$$z_1 = e^{r_1\beta}, \qquad z_2 = e^{r_2\beta}, \qquad z_3 = e^{r_3\beta}, \qquad z_4 = e^{r_4\beta} \tag{7}$$

$$r_1 = \frac{-\xi_1}{M_1(1 - M_1)}, \qquad r_2 = \frac{-\xi_1}{M_1(1 + M_1)}, \qquad r_3 = \frac{\xi_2}{M_2(1 - M_2)}, \qquad r_4 = \frac{\xi_2}{M_2(1 + M_2)}$$

При фиксированном значении ν и переменном ω уравнение (5) принимает вид

$$B_{13}y_1y_3 + B_{14}y_1y_4 + B_{23}y_2y_3 + B_{24}y_2y_4 + B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 + B_4y_4 + B_0 = 0 \quad (8)$$

$$y_j = e^{ir_j\omega}, \quad B_{jk} = A_{jk}e^{(r_j+r_k)\nu}, \quad B_j = A_je^{r_j\nu}, \quad B_0 = A_0 \quad (9)$$

Величины y_1, y_2, y_3, y_4 являются периодическими функциями ω. Так как в общем случае величины r_j несоизмеримы, то имеет место явление эргодичности, заключающееся в том, что при бесконечном увеличении ω величины y_j сколь угодно близко проходят от любой точки (a_1, a_2, a_3, a_4), где a_j — произвольные комплексные числа, лежащие на единичной окружности — $a_j\bar{a}_j = 1$.

Это позволяет в уравнении (8) считать величины y_j независимым [2], подчиненными единственному ограничению

$$y_j\bar{y}_j = 1 \quad (10)$$

Система с двумя сосредоточенными воздействиями, примыкающими ко входу и выходу. В этом случае нужно положить

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \xi, \quad M_2 = M, \quad k_{jj} = 1, \quad k_{jl} = 0 \quad (j \neq l) \quad (11)$$

Тогда

$$A_{13} = 2(\lambda_1 + 1)(1 - \lambda_2), \quad A_{24} = 2(\lambda_1 - 1)(1 + \lambda_2), \quad A_0 = 4\mu_1\mu_2$$

$$r_3 = \frac{\xi}{M(1 - M)}, \qquad r_4 = \frac{\xi}{M(1 + M)} \quad (12)$$

и характеристическое уравнение (5) принимает вид

$$(\lambda_1 + 1)(1 - \lambda_2)\exp\frac{\xi\beta}{M(1 - M)} + (\lambda_1 - 1)(1 + \lambda_2)\exp\frac{\xi\beta}{M(1 + M)} + 2\mu_1\mu_2 = 0 \quad (13)$$

Признак устойчивости 1. Для устойчивости динамической системы с двумя сосредоточенными воздействиями, примыкающими ко входу и выходу, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства:

для дозвуковых течений ($M < 1$)

$$|(1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)| > |(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)| + 2|\mu_1\mu_2| \quad (14)$$

для сверхзвуковых течений ($M > 1$)

$$|(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)| > |(1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)| + 2|\mu_1\mu_2| \quad (15)$$

Этот признак устойчивости есть следствие более общего предложения [2].

Если динамическая система имеет линейное характеристическое уравнение

$$B_1y_1 + B_2y_2 + \ldots + B_ny_n + B_0 = 0, \qquad B_j = A_je^{r_i\nu}, \qquad y_j\bar{y}_j = 1 \quad (16)$$

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_n > 0 \quad (17)$$

то для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$|A_1| \geqslant |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| + |A_0| \quad (18)$$

Характеристическое уравнение (16), частным случаем которого будет уравнение (13), получается для динамических систем с двумя сосредоточенными воздействиями, примыкающих ко входу и выходу, но более сложного вида, чем рассматривается в настоящем параграфе, а именно систем с запаздыванием воздействия и систем с субстанциональными волнами не только энтропии, но и других видов, например волнами концентраций.

Чтобы вывести (14) и (15) из (18), необходимо лишь принять во внимание легко усматриваемые неравенства, необходимые для удовлетворения условия (17)

$$\frac{1}{M(1 - M)} > \frac{1}{M(1 + M)} > 0 \qquad \text{при } M < 1 \quad (19)$$

$$\frac{1}{M(1 + M)} > 0 > \frac{1}{M(1 - M)} \qquad \text{при } M > 0 \quad (20)$$

Динамическая система с тремя сосредоточенными воздействиями без учета волн энтропии. Этот случай имеет место, когда вследствие большой диссипации субстанциональные волны быстро затухают.

Характеристическое уравнение такой системы получается из общего уравнения (5), если в нем положить $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и ввести новые обозначения

$$z_1 = e^{r_1\beta}, \quad z_2 = e^{r_2\beta}, \quad r_1 = \frac{2\xi_1}{1 - M_1^2}, \quad r_2 = \frac{2\xi_2}{1 - M_2^2}, \quad \frac{A = A_{24}, \quad B = B_{14}}{C = A_{23}, \quad D = A_{13}} \tag{21}$$

Вместо уравнений (5) и (8) получатся уравнения

$$A + Bz_1 + Cz_2 + Dz_1z_2 = 0 \tag{22}$$

$$A + Be^{r_1\nu}y_1 + Ce^{r_2\nu}y_2 + De^{(r_1+r_2)\nu}y_1y_2 = 0 \tag{23}$$

или

$$\bar{A} + \bar{B}y_1 + \bar{C}y_2 + \bar{D}y_1y_2 = 0$$

$$\bar{A} = A, \quad \bar{B} = Be^{r_1\nu}, \quad \bar{C} = Ce^{r_2\nu}, \quad \bar{D} = De^{(r_1+r_2)\nu} \tag{24}$$

Сделаем в (24) замену переменных

$$y_1 = \frac{i - x_1}{i + x_1}, \qquad y_2 = \frac{i - x_2}{i + x_2}. \tag{25}$$

Получится комплексный полином, и уравнение (24) распадется на два уравнения для действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} &-(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}) + (\bar{A} - \bar{B} - \bar{C} + \bar{D})\, x_1x_2 = 0 \\ &(\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \bar{D})\, x_1 + (\bar{A} + \bar{B} - \bar{C} - \bar{D})\, x_2 = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда, исключая x_2, получим

$$[(\bar{A} - \bar{B})^2 - (\bar{C} - \bar{D})^2]\, x_1^2 = (\bar{C} + \bar{D})^2 - (\bar{A} - \bar{B})^2 \tag{27}$$

Чтобы термогидродинамическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы (27) не имело действительных решений. Из этого следует:

Признак устойчивости 2. Термогидродинамическая система с тремя сосредоточенными воздействиями без учета волн энтропии устойчива, если при любом положительном ν

$$\frac{(\bar{C} + \bar{D})^2 - (\bar{A} + \bar{B})^2}{(\bar{A} - \bar{B})^2 - (\bar{C} - \bar{D})^2} < 0 \tag{28}$$

и неустойчива, если при некотором $\nu > 0$

$$\frac{(\bar{C} + \bar{D})^2 - (\bar{A} + \bar{B})^2}{(\bar{A} - \bar{B})^2 - (\bar{C} - \bar{D})^2} > 0 \tag{29}$$

Уравнения (26) дают возможность не только сформулировать условие устойчивости, но и простым геометрическим построением найти корни характеристического уравнения (5). Для этого на оси $-\infty < \nu < \infty$ найдем интервалы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, для которых выполняется (29). Таких интервалов конечное число [2]. В каждом из таких интервалов по формулам (27) и (25) определим функции

$$y_1^*(\nu), \qquad y_2^*(\nu); \qquad \omega_1^*(\nu) = \arg y_1^*, \ \omega_2^*(\nu) = \arg y_2^*$$

На квадрате со сторонами 2π вспомогательной плоскости $\Omega_1\Omega_2$ построим кривые по параметрическим уравнениям

$$\Omega_1(\nu) = r_1\omega^*, \qquad \Omega_2(\nu) = r_2\omega_2^*$$

Назовем эти кривые $\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}, \ldots$ Проведем в квадрате прямую линию Γ

$$\Omega_1 = r_1\omega, \qquad \Omega_2 = r_2\omega, \qquad 0 < \omega < \infty$$

При этом, дойдя до стороны квадрата, прямая Γ перескакивает на противоположную его сторону и продолжается с тем же наклоном. Такое поведение прямой объясняется периодичностью функций $\exp(ir_1\omega)$, $\exp(ir_2\omega)$.

Пересечение прямой Γ с кривыми $\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}, \ldots$ даст последовательность пар чисел $\nu_1, \omega_1; \nu_2, \omega_2, \ldots$ При этом величина ν берется с прямой Γ, а величина ω читается на кривой Γ_α.

Поступила 12 VIII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. Физматгиз, 1961.
2. Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 4