ПМТФ, № 4, 1968

ДЖОУЛЕВЫ ПОТЕРИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СЖИМАЕМОСТЬЮ ГАЗА

А. Б. Ватажин

(Москва)

Известно, что в проводящей среде, движущейся в неоднородном магнитном поле, возникают замкнутые электрические токи, которые вызывают дополнительные энергетические потери и ухудшают характеристики магнитогидродинамических каналов [1].

Однако образование вихревых электрических токов происходит и при течении среды в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости движения, если канал имеет переменное поперечное сечение, а среда — сжимаемая [1].

Предлагаемая статья посвящена изучению некоторых особенностей таких движений. При проведении анализа предполагается, что течение газа происходит в каналах со слабоизменяющейся геометрией.

1. Рассмотрим движение проводящего невязкого и нетеплопроводного газа в плоском канале $|x^\circ| < \infty$, $h_1(x^\circ) < y < h_* + h_2(x^\circ)$ ($h_* = \mathrm{const} > 0$) при наличии однородного поперечного магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B_*)$. Предположим, что индуцированным магнитным полем можно пренебречь, электропроводность σ и параметр Холла для электронов β постоянны, а скольжение ионов не существенно. Будем считать, что верхняя и нижняя стенки канала слабо отклоняются от поверхностей $y = h_*$ и $y = 0$, соответственно, и эти отклонения медленно изменяются вдоль течения. Это условие математически записывается следующим образом:

$$\frac{h_1(x^\circ)}{h_*} = \varepsilon f^-(x), \quad \frac{h_2(x^\circ)}{h_*} = \varepsilon f^+(x) \quad \left(x = \frac{x^\circ}{h_*}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon = \mathrm{const}$ — малый параметр, характеризующий отклонение геометрии от канала постоянного сечения, а функции f^-, f^+ и их производные — порядка единицы. Будем предполагать, что функции f^- и f^+ равны нулю при $x = -\infty$ (и ограничены при $x = \infty$).

В дальнейшем будут рассматриваться течения, характеризующиеся однородным распределением газодинамических параметров при $x = -\infty$. Если бы сечение канала не изменялось по x° (течение происходило в канале $0 < y^\circ < h_*$), то эти однородные распределения параметров сохранялись бы в произвольном сечении. В этом случае в канале происходило бы разделение электрического заряда, и плотность электрического тока $\mathbf{j}$ равнялась нулю.

В том случае, когда сечение канала изменяется по x°, в движущемся газе (параметры которого неоднородны) возникают электрические токи, и на газ начинают действовать электромагнитные силы. При этом, если геометрия канала удовлетворяет условиям (1.1), то отклонения газодинамических параметров от однородных распределений при $x = -\infty$ и возникающие электрические токи (и силы) оказываются порядка ε. Таким образом, уравнения магнитной газовой динамики можно линеаризовать по параметру ε около решения для канала постоянного сечения, которое, как указы-

[1] Многочисленные работы, посвященные изучению этих эффектов, указаны в обзорах [2, 3].

валось выше, имеет вид (1.2)

$$u=1,\quad v=0,\quad \rho=1,\quad p=p_*=\mathrm{const},\ \varphi=-y,\quad j_x=0,\ j_y=0$$

Здесь и в дальнейшем величины осевой и поперечной скоростей u и v отнесены к характерной скорости U, компоненты j_x и j_y — к $\sigma UB_* / c$ (c — скорость света в вакууме), электрический потенциал — к $UB_* h_* / c$, плотность ρ и давление p — к ρ_* и $\rho_* U^2$ (ρ_* — характерная плотность), координаты x и y — к высоте h_*.

Решение задачи можно искать в виде следующих рядов по степеням ε:

$$\begin{aligned} u&=1+\varepsilon u_1(x,y)+\ldots, & v&=\varepsilon v_1(x,y)+\ldots\\ \rho&=1+\varepsilon\rho_1(x,y)+\ldots, & p&=p_*+\varepsilon p_1(x,y)+\ldots\\ \varphi&=-y+\varepsilon\varphi_1(x,y)+\ldots, & \mathbf{j}&=\varepsilon\mathbf{j}_1(x,y)+\ldots \end{aligned}\qquad(1.3)$$

Подставляя (1.3) в систему уравнений магнитной газовой динамики и используя сделанные предположения для величин первого приближения, находим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial p_1}{\partial x}=sj_{y1},\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial p_1}{\partial y}=-sj_{x1}\qquad(1.4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{1}{M^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}=0$$

$$\left(s=\frac{\sigma B_*^2 h_*}{c^2\rho_* U},\quad M=(\gamma p_*)^{-1/2}\right)$$

$$\begin{gathered} j_{x1}=\frac{1}{1+\beta^2}\left[-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+v_1+\beta\left(u_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]\\ j_{y1}=\frac{1}{1+\beta^2}\left[-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-u_1-\beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-v_1\right)\right]\\ \frac{\partial j_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial j_{y1}}{\partial y}=0 \end{gathered}\qquad(1.5)$$

В системе (1.4) первые два соотношения будут проекциями уравнения импульсов на оси x и y, третье выражение — уравнение неразрывности, а четвертое — уравнение энергии, согласно которому энтропия газа в первом приближении остается постоянной. Это следует из того, что джоулева диссипация оказывается величиной порядка ε^2.

Безразмерные величины s и M представляют собой параметр магнитогазодинамического взаимодействия и число Маха.

Соотношения в системе (1.5) следуют из закона Ома и уравнения неразрывности для электрического тока.

Из двух первых уравнений (1.3) и последнего соотношения в (1.5) вытекает, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=0\qquad\left(\omega=\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\qquad(1.6)$$

Здесь ω — вихрь скорости.

Так как $\omega=0$ при $x=-\infty$, то, согласно (1.6), течение в канале будет безвихревым и можно ввести потенциал скоростей

$$u_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad v=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\qquad(1.7)$$

После несложных преобразований для функций Φ и φ из (1.4) — (1.5) получаем уравнения

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{sM^2}{1+\beta^2}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]\qquad(1.8)$$

$$\Delta\varphi_1=\beta\Delta\Phi\qquad(1.9)$$

Будем считать, что стенки канала — идеальные изоляторы и непроницаемы для газа. После линеаризации граничные условия на стенках записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = f^{+1}(x) \qquad \text{при } y = 1 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = f^{-1}(x) \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.12}$$

Уравнение (1.8) — эллиптического типа при $M < 1$ и гиперболического — при $M > 1$. При $M \approx 1$ линейная теория, как известно [4] оказывается неприменимой.

В случае несжимаемой жидкости ($M = 0$) функция Φ — гармоническая, которая находится независимо (при помощи граничных условий (1.11) и (1.12)) от соотношений с электромагнитными членами. Электрический потенциал φ_1 также удовлетворяет уравнению Лапласа, причем, как нетрудно заметить, функции φ_1 и Φ будут действительной и мнимой частями аналитической функции (при этом удовлетворяется граничное условие (1.10)), т. е.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{1.13}$$

Подставляя (1.13) в систему (1.5), находим, что $j_{x_1} \equiv 0$, $j_{y_1} \equiv 0$, т. е. при $M = 0$ изменение формы поперечного сечения не вызывает появления электрических токов. Это объясняется тем, что при $\mathbf{B} = \mathrm{const}$ индуцируемая разность потенциалов в канале с непроводящими стенками зависит только от объемного расхода газа, который при $M = 0$ не изменяется по длине канала. Поэтому сделанный вывод должен оставаться справедливым при произвольном (не только медленном) изменении формы канала и произвольном (не обязательно безвихревом) течении на выходе.

Для того чтобы доказать это утверждение, заметим, что в случае несжимаемой жидкости компоненты j_x и j_y можно записать в виде [5,2]

$$j_x = \frac{1}{1+\beta^2}\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \beta\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right), \quad j_y = \frac{1}{1+\beta^2}\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \beta\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right), \quad \Delta\Omega = 0 \tag{1.14}$$

$$(\Omega = \varphi + \psi)$$

Здесь ψ — функция тока жидкости. На стенках канала (которые по предположению, непроводящие) выполняется условие $\partial\Omega / \partial n = -\beta\partial\Omega / \partial\tau$ (τ и n — единичные векторы касательной и нормали к стенке). Сформулированная кривая задача имеет решение [1] $\Omega = \mathrm{const}$; отсюда следует, что $\mathbf{j} \equiv 0$.

Если же среда будет сжимаемой, то при изменении формы сечения объемный расход G не остается постоянным. При $M < 1$ величина G уменьшается или увеличивается в зависимости от того, возрастает или убывает площадь поперечного сечения F по длине канала [2]. Если же поток сверхзвуковой, то наоборот, $dG / dx > 0$ при $dF / dx > 0$ и $dG / dx < 0$ при

[1] Заметим, что если часть стенок канала представляет собой электроды, то решение Ω-const в общем случае не удовлетворяет физическому содержанию задачи. Решение для j_x и j_y необходимо строить в классе функций, не ограниченных вблизи точек контакта электродов и изоляторов, в которых изменяется вид граничных условий.

[2] Указанное изменение G имеет место при несильном магнитогидродинамическом взаимодействии.

$dF / dx < 0$. Поэтому индуцируемая разность потенциалов между нижней и верхней стенками канала изменяется по x, в результате чего возникают вихревые электрические токи.

Система уравнений (1.8) — (1.12), из которой определяются газодинамические и электромагнитные параметры в первом приближении, может быть решена с помощью преобразования Фурье.

2. Рассмотрим течение при слабом магнитогидродинамическом взаимодействии, когда $s \ll 1$. В этом случае распределение потенциала находится из известного уравнения линейной газовой динамики

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Предположим, что нижняя стенка канала определяется уравнением $y = 0$, т. е. $f^- \equiv 0$.

В начале исследуем дозвуковые течения ($\delta^2 = 1 - M^2 > 0$).

Согласно асимптотическому условию при $x = -\infty$ и предположению об ограниченности функции $f^+(x)$ при $x = \infty$ имеем

$$|\Phi(x, y)| < \text{const} \exp(\tau_+ x), \quad |\varphi_1(x, y)| < \text{const} \exp(\tau_+ x) \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$
$$|\Phi(x, y)| < \text{const} \exp(\tau_- x), \quad |d_1(x, y)| < \text{const} \exp(\tau_- x) \quad \text{при} \quad x \to \infty$$
$$0 < \tau_- < \tau_+ \qquad (2.2)$$

Соотношения (2.2) отражают тот факт, что функции Φ и φ_1 экспоненциально стремятся к нулю при $x \to -\infty$ и значительно медленнее возрастают при $x \to \infty$. Более точно, при $x \to \infty$ величина φ_1 оказывается всегда ограниченной, а потенциал Φ линейно изменяется по x, если $f^+(x) \to \text{const} \neq 0$ при $x \to \infty$, и ограничен, если функция $f^+(x)$ при больших x колеблется около некоторого постоянного значения.

Для решения системы (2.1), (1.9) — (1.12) используем преобразование Фурье

$$\xi^\circ(y, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, y) \exp(i\alpha x)\, dx \quad (a = \nu + i\tau,\ \tau_- < \tau < \tau_+) \qquad (2.3)$$

Под функцией ξ здесь понимаются функции $\Phi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ и $f^{+\prime}(x)$. Согласно (2.2), ξ^0 будет аналитической функцией аргумента α в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ [6].

Система уравнений относительно изображений искомых функций имеет вид

$$-\delta^2\alpha^2\Phi^\circ + \frac{d^2\Phi^\circ}{dy^2} = 0, \quad -\alpha^2\varphi_1^\circ + \frac{d^2\varphi_1^\circ}{dy^2} = \beta\left(-\alpha^2\Phi^\circ + \frac{d^2\Phi^\circ}{dy^2}\right)$$
$$\Phi^{\circ\prime}(0, \alpha) = 0, \quad \Phi^{\circ\prime}(1, \alpha) = t(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (df^+ / dx) \exp(i\varkappa x)\, dx \qquad (2.4)$$
$$\varphi_1^{\circ\prime} - i\alpha\Phi^\circ - \beta(i\alpha\varphi_1^\circ + \Phi^{\circ\prime}) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \text{ и } y = 0$$

Здесь штрих означает производную по y.

Решение системы (2.4) представляется формулами

$$\Phi^\circ = \frac{t(\alpha)\,\text{ch}(\alpha\delta y)}{\alpha\delta\,\text{sh}(\alpha\delta)}, \quad \varphi_1^\circ = \frac{it(\alpha)}{\alpha\delta\,\text{sh}(\alpha\delta)\,\text{sh}\,\alpha} \{\text{ch}(\alpha\delta)\,\text{ch}(\alpha y) - \text{ch}[\alpha(1 - y)] +$$
$$+ i\beta[\text{sh}[\alpha(1 - y)] + \text{ch}(\alpha\delta)\,\text{sh}(\alpha y) - \text{ch}(\alpha\delta y)\,\text{sh}\,\alpha]\} \qquad (2.5)$$

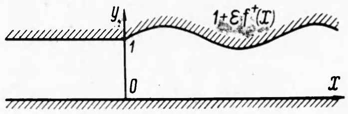
Оригиналы $\Phi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ находятся с помощью теоремы обращения [6]

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau^*}^{\infty+i\tau^*} \Phi^\circ \exp(-i\alpha x)\, d\alpha, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty=i\tau^*}^{\infty+i\tau^*} \varphi_1^\circ \exp(-i\alpha x)\, d\alpha \qquad (2.6)$$
$$(0 < \tau_- < \tau^* < \tau_t)$$

Интегралы (2.6) после конкретизации функции $t(\alpha)$ могут быть вычислены с помощью теории вычетов.

Пусть функция $f^+(x)$ имеет следующий вид (фиг. 1):

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \sin kx & \text{при } x > 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$



Фиг. 1

Величина $t(\alpha)$ определяется в этом случае формулой

$$t(\alpha) = -\frac{i\alpha k}{\sqrt{2\pi}\,(k^2 - \alpha^2)} \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в выражения (2.6) и используя теорему о вычетах и лемму Жордана [7], найдем, что для вычисления интегралов (2.6) при $x > 0$ необходимо просуммировать вычеты подынтегральных функций в области $\tau < \tau^*$, а при $x < 0$ просуммировать вычеты в области $\tau > \tau^*$.

В результате вычислений находим

$$\Phi_{x>0} = \Phi^*(x, y) + \frac{k}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi y)\exp(-n\pi x/\delta)}{k^2 + (n\pi/\delta)^2}$$

$$\varphi_1 = \varphi^*(x, y) + \frac{k}{\delta^2}\Sigma_1 + \frac{k}{\delta}\Sigma_2 \qquad \Phi^*(x, y) = \frac{\cos(kx)\operatorname{ch}(k\delta y)}{\delta \operatorname{sh} k\delta}\quad \frac{1}{k\delta^2} \qquad (2.9)$$

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{\delta \operatorname{sh} k \operatorname{sh} k\delta}\{\sin kx[\operatorname{ch}(k\delta)\operatorname{ch}(ky)] - \operatorname{ch}[k(1-y)] -$$

$$-\beta\cos kx[\operatorname{sh}[k(1-y)] + \operatorname{ch}(k\delta)\operatorname{sh}(k\delta y)\operatorname{sh} k]\} \qquad (2.10)$$

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\exp(-r_n x[\chi_n(y) + \beta\varkappa_n(y)]}{(k^2 + r_n^2)\sin r_n}, \qquad r_n = \frac{n\pi}{\delta}$$

$$\chi_n = (-1)^n\cos(r_n y) - \cos[r_n(1-y)]$$

$$\varkappa_n = \sin[r_n(1-y)] + (-1)^n\sin(r_n y) - \cos(r_n\delta y)\sin r_n \qquad (2.11)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\exp(-q_n x)[\mu_n(y) + \beta\nu_n(y)]}{(k^2 + q_n^2)\sin(q_n\delta)} \qquad q_n = n\pi$$

$$\mu_n = \cos(q_n\delta)\cos(q_n y) - \cos[q_n(1-y)]$$

$$\nu_n = \sin[q_n(1-y)] + \cos(q_n\delta)\sin(q_n y)$$

$$\Phi_{x<0} = \frac{k}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(r_n\delta y)\exp(r_n x)}{k^2 + r_n^2} \qquad (2.12)$$

$$\varphi_{1\,x<0} = \frac{k}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp(r_n x)[\chi_n(y) - \beta\varkappa_n(y)]}{(k^2 + r_n^2)\sin r_n} + \frac{k}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp(q_n x)[\mu_n(y) - \beta\nu_n(y)]}{(k^2 + q_n^2)\sin q_n\delta}$$

Функции $\Phi^*(x, y)$ и $\varphi^*(x, y)$ определенные формулами (2.10), представляют собой периодическую незатухающую часть решения при больших x, связанную с синусоидальным изменением профиля канала. Соответствующие этой части решения токи j_x^* и j_y^* даются формулами

$$j_x^* = \frac{k\cos kx}{\delta\operatorname{sh}(k\delta)\operatorname{sh} k}[\delta\operatorname{sh}(k\delta y)\operatorname{sh} k - \operatorname{ch}(k\delta)\operatorname{ch}(ky) + \operatorname{ch}[k(1-y)]]$$

$$j_y^* = \frac{k\sin kx}{\delta\operatorname{sh}(k\delta)\operatorname{sh} k}[\operatorname{ch}(k\delta y)\operatorname{sh} k - \operatorname{ch}(k\delta)\operatorname{sh}(ky) - \operatorname{sh}[k(1-y)]] \qquad (2.13)$$

Как следует из (2.13), распределение токов j_x^* и j_y^* (в отличие от потенциала) не зависит от параметра Холла β.

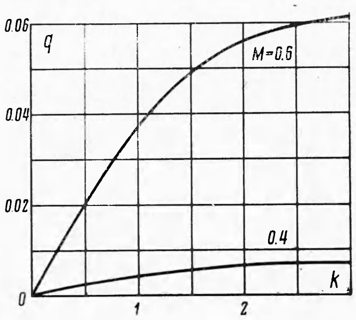
Джоулева диссипация q в объеме канала $0 < y < 1$, $(N\pi / k) < x < (N+1)\pi / k$ $(N \gg 1)$, соответствующем полудлине волны π / k, определяется выражением

$$q = \frac{\pi k}{2\delta^2 \operatorname{sh}^2 k\delta}\left[\frac{1+\delta^2}{4k\delta}\operatorname{sh}(2k\delta) + \frac{1-\delta^2}{2} + (1+l^2)\frac{\operatorname{sh}(2k)}{2k} - \right.$$

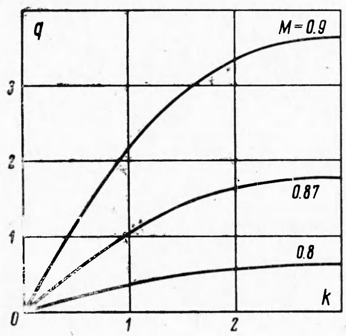
$$\left. - \frac{4l}{k}\operatorname{ch} k \operatorname{sh}\left[{}^1/_2\, k(1+\delta)\right]\operatorname{sh}\left[{}^1/_2\, k(1-\delta)\right] - \frac{2}{k}\operatorname{sh} k \operatorname{ch}(k\delta)\right] \qquad (2.14)$$

$$\left(q = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\lambda/\lambda} \left(j_x^{*2} + j_y^{*2}\right) dx dy, \quad l = \frac{\operatorname{ch} k - \operatorname{ch}(k\delta)}{\operatorname{sh} k}\right)$$

Зависимости $q(k)$ при различных числах Маха показаны на фиг. 2 и 3. С увеличением M джоулевы потери возрастают. Наиболее значительное увеличение диссипации



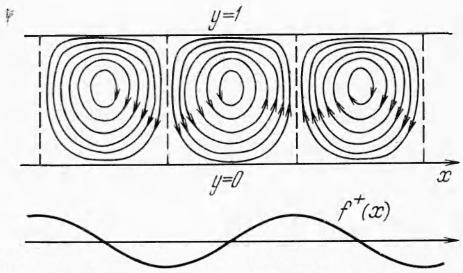
Фиг. 2



Фиг. 3

q наблюдается при M, близких к единице. Однако необходимо помнить, что точность линейного приближения при этом уменьшается. С уменьшением k джоулева диссипация стремится к нулю, так как уменьшается скорость измерения профиля канала.

При возрастании k джоулева диссипация в пределах полуволны (и в любом фиксированном объеме канала) увеличивается. Как показывает формула (2.14), $q \to \infty$ при $k \to \infty$. Однако линейная теория и полученная на ее основании формула (2.14) при больших k, вследствие неограниченного возрастания модуля производной $f^{+\prime}(x)$, оказываются неприменимы. Формальное же объяснение неограниченного роста q при $k \to \infty$ состоит в том, что уменьшение длины волны $1 / \pi k$ сопровождается возрастанием кинетической энергии потока.



Фиг. 4

Линии электрического тока в канале при больших x показаны на фиг. 4. Наибольшая разность потенциалов между нижней и верхней стенками индуцируется в сечениях $x_{1N} = (3/2\pi \times 2N\pi) / k$, а наименьшая — при $x_{2N} = (1/2\pi + 2N\pi) / k$ (N — большое целое число). В сечениях x_{1N} поток газа характеризуется наибольшим, а в сечениях x_{2N} — наименьшим объемными расходами. Распределение электрического тока согласуется с отмеченными особенностями распределения потенциала.

3. Рассмотрим сверхзвуковое течение газа ($M > 1$). Предположим, что $f^-(x) \equiv 0$, $s = 0$, $\beta = 0$, а $f^+(x)$ определяется (2.7). С помощью преобразования Фурье находим изображения функций Φ° и $\varphi_1{}^\circ$, а затем их оригиналы

$$\Phi = -\frac{k}{2\pi i\delta}\int\limits_{-\infty+i\tau^*}^{\infty+i\tau^*}\frac{\cos(\alpha\omega y)\exp(-i\alpha x)\,d\alpha}{(k^2-\alpha^2)\sin(\alpha\omega)} \qquad (\omega^2 = M^2 - 1,\ 0 < \tau_- < \tau^* < \tau_+)$$

$$\varphi_1 = \frac{k}{2\pi i\delta}\int\limits_{-\infty+i\tau^*}^{\infty+i\tau^*}\frac{i\left[\operatorname{ch}\left[\alpha(1-y)\right] - \cos(\alpha\omega)\operatorname{ch}(\alpha y)\right]\exp(-i\alpha x)\,d\alpha}{(k^2-\alpha^2)\operatorname{sh}\alpha\sin(\alpha\omega)} \qquad (3.1)$$

С помощью теоремы о вычетах находим

$$\Phi_{x>0} = \frac{1}{k\omega^2} - \frac{\cos(k\omega y)\cos(kx)}{\omega\sin(k\omega)} + \frac{2k}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(r_n\omega y)\cos r_n x}{k^2 - r_n^2} \quad \left(r_n = \frac{n\pi}{\omega}\right) \tag{3.2}$$

$$\varphi_{1\,x>0} = \frac{\sin(kx)\,[\operatorname{ch}[k(1-y)] - \cos(k\omega)\operatorname{ch}(ky)]}{\omega \operatorname{sh} k \sin(k\omega)} +$$

$$+ \frac{2k}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(r_n x)\,[\operatorname{ch}[r_n(1-y)] + (-1)^{n+1}\operatorname{ch}(r_n y)]}{(k^2 - r_n^2)\operatorname{sh} r_n} +$$

$$+ \frac{k}{\omega}\sum(-1)^n \frac{\exp(-q_n x)\,\zeta_n(y)}{(k^2 + q_n^2)\operatorname{sh}(q_n\omega)} \tag{3.3}$$

$$\Phi_{x<0} = 0, \qquad \varphi_{1\,x<0} = \frac{k}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \exp(q_n x)\,\zeta_n(y)}{(k^2 + q_n^2)\operatorname{sh}(q_n\omega)} \tag{3.4}$$

$$(q_n = n\pi, \ \zeta_n(y) = \cos[q_n(1-y)] - \operatorname{ch}(q_n\omega)\cos(q_n y))$$

При получении формул (3.2) — (3.4) предполагалось, что k не совпадает ни с одним значением r_n.

Как показывают полученные формулы, распределение скоростей при больших x зависит не только от «локальной» геометрии канала (первые два члена в формуле (3.2)), но также и возмущений, которые распространяются по характеристикам вниз по потоку от сечения $x = 0$, многократно отражаясь от стенок канала (третий член в этой формуле).

Несмотря на то, что отсутствуют возмущения скорости при $x < 0$ (возмущения скорости равны нулю левее характеристики $y = 1 - x\omega^{-1}$), электрические токи в этой области отличны от нуля.

Согласно формуле (3.4), ток j_x отрицателен при $y = 0$ и положителен при $y = 1$. Это согласуется с тем, что в области $0 < x < 1/2\pi k^{-1}$ разность потенциалов между нижней и верхней стенками с ростом x монотонно возрастает.

Объемный расход газа G на основании (1.2) и (3.2), определяется формулой

$$G = \int_0^1 u\,dy = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0 \\ 1 + \varepsilon\sin(kx)/\omega^2 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Поступила 6 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б. Джоулевы потери в канале переменного сечения, обусловленные сжимаемостью газа. В сб. Аннотации докладов. Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, М., АН СССР, 1968.
2. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. В кн. Шерклиф Дж. «Теория электромагнитного измерения расхода», М., «Мир», 1965.
3. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. М., ВИНИТИ, 1966.
4. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Емец Ю. П. О распределении тока на проницаемых электродах при наличии эффекта Холла в потоке электропроводной среды. ПМТФ, 1966, № 4.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1966.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.