

шаге процедуры с учетом соотношений (33) — (36) ищется решение уравнений (38) и (39). Найденные решения подставляются в формулу (40), и с учетом (41), (42) определяется величина  $M_{1s}$ . Далее по (37) определяются моменты  $M_n$ , которые могут быть подставлены в уравнение (24) для  $\varphi$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черчилянни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978.
2. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. — М.: Мир, 1965.
3. Sirovich L., Thurber J. K. Plane wave propagation in kinetic theory // J. Math. Phys. — 1967. — V. 8, N 4.
4. Richardson T. G., Sirovich L. The sound wave boundary value problem in kinetic theory // J. Math. Phys. — 1971. — V. 12, N 8.
5. Thomas J. P., Jr., Siewert C. E. Sound wave propagation in rarefied gas // Trans. Theory and Stat. Phys. — 1979. — V. 8. — P. 219.
6. Aoki K., Gercignani K. A technique for time dependent boundary value problem. 2. Application to sound propagation // ZAMP. — 1984. — V. 35, N 3.
7. Loyalka S. K., Cheng T. C. Sound wave propagation in a rarefied gas // Phys. Fluids. — 1979. — V. 22, N 5.
8. Шекин А. К., Лебле С. Б., Верещанин Д. А. Введение в физическую кинетику разреженных газов. — Калининград: КГУ, 1990.
9. Валландер С. В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131, № 1; Уравнения и постановка задач в аэродинамике разреженных газов // Аэродинамика разреженных газов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. — Вып. 1.
10. Баранцев Р. Г. Метод интегральных моментных кинетических уравнений // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 5.
11. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

г. Калининград

Поступила 24/IV 1992 г.,  
в окончательном варианте — 11/XI 1992 г.

УДК 534.26

С. В. Сухинин, В. Ф. Ахмадеев

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПОГЛОТИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

Исследовано качественное поведение акустических колебаний в камере сгорания с динамическим поглотителем. Построена простая модель, описывающая вынужденные акустические одномерные колебания в камере с поглотителем. Предложены целевые функции, и изучено их поведение в зависимости от управляющих параметров поглотителя. Установлено, что наличие поглотителя может увеличить возможность возникновения автоколебаний в камере сгорания. Для некоторых целевых функций определен оптимальный коэффициент трения в поглотителе. Показано, что существует оптимальный коэффициент трения в поглотителе для всех предложенных целевых функций.

Одна из острых проблем ракетостроения — борьба с акустическими колебаниями в камерах сгорания. Характерными трудностями являются: неточная информация о параметрах основного потока, нелинейность и неопределенность источника колебаний. В силу этих причин численные исследования уравнений акустических колебаний в камерах сгорания нецелесообразны, так как сами уравнения в сильной степени приближенные. Это обуславливает важность качественных исследований акустических колебаний в камерах сгорания.

Наиболее эффективные и распространенные поглотители акустических колебаний в камерах или иных замкнутых объемах — резонаторы Гельмгольца. Однако в некоторых случаях поглотитель может увеличивать восприимчивость камеры к возникновению автоколебаний. Это обуславливает важность выбора оптимальных параметров динамических поглотителей. Ра-

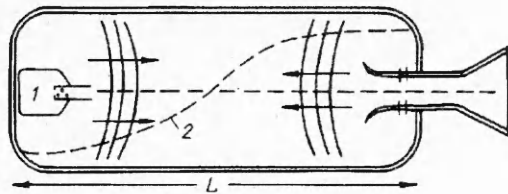


Рис. 1

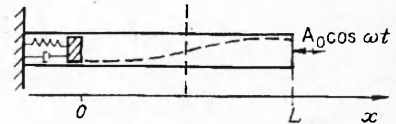


Рис. 2

боты, в которых изучены вопросы оптимизации динамических поглотителей с учетом всей камеры, авторам неизвестны.

Типичная схема расположения динамического поглотителя представлена на рис. 1, где 1 — резонатор Гельмгольца, 2 — амплитуда колебаний давления на основной продольной моде. В окрестности сопла камеры сгорания происходит резкий поворот основного потока, поэтому от сопла наблюдается полное отражение акустических волн. Колебания в камере сгорания считаются продольными акустическими, обусловленными колебаниями задней стенки. Колебания в резонаторе моделируются при помощи механической аналогии — грузика с пружинкой и вязким демпфером. Демпфирующие свойства грузика с пружинкой под действием прямого воздействия на грузик исследованы в [1—3]. Динамический поглотитель колебаний для механических дискретных систем (связанных маятников) достаточно полно изучен в [2, 3]. В [3] рассматривается поглотитель в рамках одномерной теории для прямого воздействия без учета колебаний в камере.

Для оптимизации поглотителя существенным является выбор целевой функции. Вид целевой функции определяется физическим содержанием задачи. В настоящей работе предложены целевые функции, позволяющие выбирать оптимальные параметры динамических поглотителей продольных акустических колебаний в камере сгорания. Проведены численные исследования предложенных целевых функций, определены тенденции изменения эффективности динамического поглотителя при вариации управляющих параметров. В явном виде найдены амплитуды колебаний в камере и колебаний поглотителя. Определены параметры поглотителя, для которых затухание свободных колебаний в камере максимально.

### 1. Поршень с пружиной как поглотитель колебаний в камере сгорания.

**Формулировка задачи.** Пусть в камере с единичной площадью сечения и длиной \$L\$ на одном конце находится источник акустических колебаний давления с известной частотой \$\omega\$ и заданной амплитудой \$\omega A\$ (рис. 2). Необходимо отметить, что \$A\$ есть максимальное отклонение стенки камеры, на которой расположен источник колебаний, от среднего положения. На другом конце камеры эти колебания демпфируются при помощи поглотителя, который состоит из поршня массой \$m\$ на пружине с упругостью \$k\$ и с коэффициентом трения \$\alpha\$. Пусть \$x\$ — ось координат, направленная вдоль камеры, с началом в одном из концов трубы (рис. 2), \$\Phi(x, t)\$ — потенциал скорости частиц газа в акустической волне, \$\Delta\$ — отклонение поршня от положения равновесия. Распространение акустических волн в камере описывается уравнением

$$(1.1) \quad \Phi_{xx} - \Phi_{tt}/c^2 = 0,$$

где \$c\$ — скорость звука в газе; \$\Phi\_{xx}\$ — вторая производная по переменной \$x\$; \$\Phi\_{tt}\$ — вторая производная по времени \$t\$. Источник акустических колебаний расположен на задней стенке камеры сгорания, на которой выполнено условие равенства скоростей

$$(1.2) \quad \Phi_x(L, t) = \omega A \cos(\omega t).$$

Пусть газ имеет плотность \$\rho\$ в состоянии покоя. Колебания поршня описываются соотношением

$$(1.3) \quad m\Delta_{tt} + \alpha\Delta_t + k\Delta = \rho\Phi_t.$$

Здесь \$\Delta\_{tt}\$ — ускорение; \$\Delta\_t\$ — скорость поршня; \$\rho\Phi\_t\$ — сила, действующая на поршень со стороны газа, колеблющегося в камере сгорания; \$\alpha\Delta\_t\$ — сила

трения, действующая на поршень. Кроме этого, на поршне должно быть выполнено кинематическое условие равенства скоростей

$$(1.4) \quad \Delta_t = \Phi_x(0, t).$$

Удобно ввести безразмерные зависимые переменные

$$\Delta^* = \Delta/A, \quad \Phi^*(x, t) = \Phi(x, t)/\omega AL.$$

В этих переменных уравнения (1.1)—(1.4) имеют вид

$$(1.5) \quad \Phi_{xx}^* - \Phi_{tt}^*/c^2 = 0, \quad \Phi_x^*(L, t) = \cos(\omega t)/L, \\ m\Delta_{tt}^* + \alpha\Delta_t^* + k\Delta^* = L\omega\rho\Phi_t^*(0, t), \quad \Delta_t^* = L\omega\Phi_x^*(0, t).$$

Если колебания установившиеся, то можно считать, что

$$\Phi^*(x, t) = \text{Re} \{ [Y \exp(ix\omega/c) + Z \exp(-ix\omega/c)] \exp(i\omega t) \}, \\ \Delta^* = \text{Re} [X \exp(i\omega t)],$$

где  $X, Y, Z$  — комплексные амплитуды соответствующих колебаний или волн;  $X$  — амплитуда колебаний поршня;  $Y$  — амплитуда волны, бегущей от источника колебаний против направления оси  $x$ ;  $Z$  — амплитуда волны, отраженной от левого конца камеры сгорания и бегущей вдоль оси  $x$  (см. рис. 2);  $i$  — мнимая единица. Неизвестные комплексные величины амплитуд  $X, Y$  и  $Z$ , согласно соотношениям (1.5), должны быть решением неоднородной линейной системы уравнений

$$(1.6) \quad Y \exp(i\omega\pi/\omega_k) - Z \exp(-i\omega\pi/\omega_k) = (-i\omega_k)/\omega\pi, \\ (-1 + i\alpha^*/\omega + \omega_n^2/\omega^2) X - i\mu(Y + Z) = 0, \quad X - (\omega\pi/\omega_k)(Y - Z) = 0.$$

Для удобства дальнейшего изложения введены дополнительные обозначения: пусть  $\omega_n = (k/m)^{1/2}$  — частота незатухающих колебаний свободного поршня,  $\omega_k = \pi/L$  — первая собственная частота акустических колебаний газа в камере сгорания,  $M = L\rho$  — масса газа, находящегося в камере сгорания,  $\mu$  — отношение массы газа камеры к массе поршня:  $\mu = M/m$ ,  $\alpha^* = \alpha/m$ .

Основной частотой колебаний в структуре поршень и камера является  $\omega_k$  — частота собственных колебаний в камере, поэтому более удобны обозначения

$$\omega = \omega_k(1 + \kappa), \quad \omega_n = \omega_k(1 + \sigma).$$

В этих обозначениях соотношения (1.6) имеют вид

$$(1.7) \quad Y \exp(i\pi\kappa) - Z \exp(-i\pi\kappa) = i/(1 + \kappa)\pi, \\ \omega X - i\mu(1 + \kappa)^2(Y + Z) = 0, \quad X - ((1 + \kappa)\pi)(Y - Z) = 0.$$

Здесь и далее  $\hat{\alpha} = \alpha^*/\omega_k = \alpha/m\omega_k$ ;  $w = -(1 + \kappa)^2 + i\hat{\alpha}(1 + \kappa) + (1 + \sigma)^2$ . В этих обозначениях решение системы (1.7) запишем как

$$(1.8) \quad X = \frac{i\mu(1 + \kappa)}{\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)}, \\ Y = \frac{[\pi w + i\mu(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa)[\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)]}, \\ Z = \frac{[\pi w - i\mu(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa)[\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)]}.$$

Если масса поршня много больше массы газа в камере, то  $\mu = 0$  и отражение акустических волн от поршня происходит так же, как от упругой стенки. Необходимо отметить, что для моделирования реальных структур величина  $\mu$  должна быть достаточно малой, так как большая часть плоской продольной волны будет отражаться от днища камеры сгорания. Отражение от днища камеры сгорания моделируется большой массой поршня. Следовательно, для реальных структур коэффициент  $\mu$  очень мал ( $\mu \approx 0$ ).

Пусть  $v = (1 + \sigma)^2 - (1 + \kappa)^2$ ,  $w = v + i\hat{\alpha}(1 + \kappa)$ , тогда соотношения (1.8) примут вид

$$X = \frac{i\mu(1 + \kappa)}{\pi [v + i\hat{\alpha}(1 + \kappa)] \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)},$$

$$Y = \frac{[\pi w + i(\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa) + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)]},$$

$$Z = \frac{[\pi w + i(\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa) + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)]}.$$

Более удобно для дальнейших вычислений выделить вещественные и мнимые части решения. Пусть  $a = [\pi v \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)]$ ,  $b = \pi\hat{\alpha}(1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)$ ,  $c = (\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)$ ,  $d = (\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)$ ,  $F = [1/2\pi(1 + \kappa)]$ , тогда

$$Y = F \frac{[\pi w + ic]}{[a + ib]} = F \frac{[\pi w + ic][a - ib]}{[a + ib][a - ib]} = F \left[ \frac{[\pi wa + bc]}{a^2 + b^2} + i \frac{[ac - \pi wb]}{a^2 + b^2} \right],$$

$$Z = F \frac{[\pi w + id]}{[a + ib]} = F \frac{[\pi w + id][a - ib]}{[a + ib][a - ib]} = F \left[ \frac{[\pi wa + bd]}{a^2 + b^2} + i \frac{[ad - \pi wb]}{a^2 + b^2} \right].$$

Так как  $ac = a(\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)$ ,  $ad = a(\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)$ ,  $b^2 = \hat{\alpha}^2 [\pi(1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)]^2$ ,  $bc = \pi\hat{\alpha} \sin(\pi\kappa) (\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)^2$ ,  $bd = \pi\hat{\alpha} \sin(\pi\kappa) (\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)^2$ , то более удобно записать эти выражения в форме

$$Y = F \left[ \frac{\pi wa + \pi\hat{\alpha} \sin(\pi\kappa) (\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)^2}{a^2 + b^2} + \frac{ia(\pi\hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa) - \pi^2 \hat{\alpha} (1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)}{a^2 + b^2} \right],$$

$$Z = F \left[ \frac{\pi wa + \pi\hat{\alpha} \sin(\pi\kappa) (\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)^2}{a^2 + b^2} + \frac{ia(\pi\hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa) - \pi^2 \hat{\alpha} (1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)}{a^2 + b^2} \right].$$

Если  $\mu = 0$ , то

$$Y = \frac{[\pi w + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa)] \sin(\pi\kappa)},$$

$$Z = \frac{[\pi w + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w + i\pi\hat{\alpha}(1 + \kappa)] \sin(\pi\kappa)}.$$

Равенство  $\mu = 0$  означает, что масса поршня значительно больше массы колеблющегося газа в камере. В этом случае резонансные частоты вынужденных колебаний совпадают с собственными частотами камеры  $\kappa = 0$ .

Если колебания поршня происходят без трения ( $\alpha = 0$ ), то, вообще говоря, собственные акустические колебания в камере будут происходить на несколько другой резонансной частоте. Амплитуды колебаний в камере имеют вид

$$Y = \frac{[\pi w + i\mu(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)]},$$

$$Z = \frac{[\pi w + i\mu(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\pi w \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa)]}.$$

Пусть  $\sigma = 0$ , это означает, что свободные колебания поршня на пружинке совпадают с собственными колебаниями газа в камере. Резонансные явления в камере существуют для частоты  $\omega = \omega_\kappa(1 + \kappa)$  колебаний вынуждающей силы, если для  $\kappa$  справедливо соотношение

$$\pi [1 - (1 + \kappa)^2] \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa) = 0.$$

Для малых  $\kappa$ ,  $\mu$  справедливо приближенное выражение для резонансных значений  $\kappa_{1,2}$ :

$$\kappa_{1,2} = \frac{\mu \pm [\mu 2\pi^2(\mu + 4) + \mu^2]^{1/2}}{\pi^2(\mu + 4)} \cong \frac{\pm \sqrt{2\mu}}{2\pi} \cong \pm 0,225\sqrt{\mu}.$$

В реальных камерах  $\mu$  достаточно мала, поэтому выражение для резонансных значений  $\kappa$  обоснованно с физической точки зрения. Наиболее существенно здесь то, что появляются две резонансные частоты. Поэтому наличие резонатора в камере может способствовать развитию акустического автоколебательного процесса, так как две близкие резонансные частоты камеры увеличивают возможность захвата частот гидродинамическими источниками акустических колебаний [4].

Оптимизировать динамический поглотитель можно, изменяя  $\mu$ , частоту незатухающих колебаний свободного поршня  $\sigma$  и коэффициент трения  $\alpha$ ; эти три параметра являются управляющими. Параметр  $\kappa$ , соответствующий частоте колебаний источника акустических волн в камере сгорания, свободный. Кроме определения управляющих и свободных параметров, необходимо ввести целевые функции задачи.

Необходимо отметить, что частота вынужденных акустических колебаний в камере сгорания, вообще говоря, выбирается нелинейным механизмом, поэтому параметр  $\kappa$  должен быть достаточно свободен или независим от управляющих параметров. Более того, можно утверждать, что  $\kappa$  выбирается наилучшим образом для некоторых целевых функций.

**2. Примеры целевых функций.** Известно, что основные источники акустических колебаний в камере сгорания вызваны гидродинамической неустойчивостью основного потока газа, акустические колебания определяют самосинхронизацию источника звука, обусловленного гидродинамической неустойчивостью или иным нелинейным механизмом [4]. Поршень с пружиной помещен в камеру сгорания, для того чтобы ослабить акустическую обратную связь, под действием которой происходит самосинхронизация источника колебаний, и тем самым затянута или остановлена время развития автоколебаний.

Целевые функции обусловлены физическим и техническим содержанием задачи. Такими функциями могут быть: акустическая энергия в камере сгорания, амплитуда отраженной волны, разность акустического давления на противоположных стенках, максимальный коэффициент затухания акустических колебаний в камере сгорания и др.

**А. Акустическая энергия в камере сгорания.** Акустическая энергия  $E$  в камере сгорания может быть вычислена при помощи потенциала скорости [6, 7]

$$E(t) = (1/2) \int_0^L \rho_0 \left[ |\Phi_x(x, t)|^2 + |\Phi_t(x, t)|^2 / (c^2) \right] dx.$$

Для вычисления  $E$  необходимо учесть представление потенциала скорости при помощи комплексных амплитуд. Величины  $|\Phi_x(x, t)|$  и  $|\Phi_t(x, t)|$  вычисляются при помощи комплексных амплитуд  $X, Y, Z$ . Так как имеют место выражения

$$\Delta^* = \Delta / A, \quad \Phi^*(x, t) = \Phi(x, t) / \omega AL, \quad \Delta^* = \operatorname{Re} [X \exp(i\omega t)],$$

$$\Phi^*(x, t) = \operatorname{Re} \{ [Y \exp(ix\omega/c) + Z \exp(-ix\omega/c)] \exp(i\omega t) \},$$

потенциал скорости и его производные запишем в виде

$$\Phi(x, t) = \omega AL \operatorname{Re} \{ [Y \exp(ix\omega/c) + Z \exp(-ix\omega/c)] \exp(i\omega t) \},$$

$$\Phi_x(x, t) = \omega AL \operatorname{Re} \{ (i\omega/c) [Y \exp(ix\omega/c) - Z \exp(-ix\omega/c)] \exp(i\omega t) \},$$

$$\Phi_t(x, t) = \omega AL \operatorname{Re} \{ (i\omega) [Y \exp(ix\omega/c) + Z \exp(-ix\omega/c)] \exp(i\omega t) \}.$$

В дальнейшем удобно вместо функции  $\Phi(x, t)$  или ее производных рассматривать амплитуду колебаний по времени в некоторый фиксированный момент времени  $t_*$  такой, что  $\exp(i\omega t_*) = 1$ . В этом случае  $\Phi(x) = \Phi(x, t_*)$ ,  $\Phi_x(x) = \Phi_x(x, t_*)$ ,  $\Phi_t(x) = \Phi_t(x, t_*)$ . Акустическая энергия в камере сгорания

$$(2.1) \quad E(\alpha, \mu, \sigma, \kappa, t_*) = (1/2) \int_0^L \rho_0 \left[ |\Phi_x(x)|^2 + |\Phi_t(x)|^2 / (c^2) \right] dx.$$

Для вычисления  $E$  как функции управляющих параметров задачи необходимо в (2.1) подставить представление комплексных амплитуд (1.8).

Оптимизация динамического поглотителя акустических колебаний в камере сгорания состоит в выборе параметров поглотителя  $\alpha, \mu, \sigma$  таким образом, чтобы акустическая энергия вынужденных колебаний  $E(\alpha, \mu, \sigma, \kappa, t_*)$  была наименьшей для некоторого множества значений  $\kappa$ . Не менее важной для приложений является задача изучения зависимости энергии от управляющих параметров. Для понимания механического смысла взаимодействия параметров резонансного поглотителя ниже численно исследован пример. Цель — изучение акустической энергии в камере в зависимости от частоты вынужденных колебаний, описываемой безразмерным параметром  $\kappa$ , и коэффициента поглощения  $\hat{\alpha}$ .

Пусть отношение массы газа в камере к массе поршня считается фиксированной величиной и частота свободных колебаний резонансного поглотителя  $\omega_n$  совпадает с частотой акустических собственных колебаний в камере  $\omega_k = \omega_n = \omega_k(1 + \sigma)$ , поэтому  $\sigma = 0$ . Для удобства вычисления можно считать, что  $L = \pi, A = 1$ . В реальных случаях частота вынужденных акустических колебаний в камере мало отличается от собственной частоты акустических колебаний в камере сгорания, поэтому можно считать, что  $|\kappa| \ll 1$ , кроме того,  $\mu$  должна быть достаточно малой, так как в реальных конструкциях большая часть акустической энергии отражается от передней стенки (см. рис. 1). Для примера можно считать, что  $\mu = 0,01$ . Так как  $\mu$  и  $\kappa$  являются достаточно малыми, то справедливы приближенные выражения для  $a$  и  $b$ , полученные при помощи разложения в ряд Тэйлора соответствующих величин с точностью до малых величин второго порядка  $\kappa^2$ :

$$a = [\pi v \sin(\pi \kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi \kappa)] = \mu + \mu \kappa - \pi^2(\mu + 4)\kappa^2/2,$$

$$b = \pi \hat{\alpha}(1 + \kappa) \sin(\pi \kappa) = \pi^2 \hat{\alpha} \kappa(1 + \kappa), \quad v = -\kappa - \kappa^2.$$

Поэтому выражения для комплексных амплитуд  $Y, Z$  имеют вид

$$Y = F \left[ \frac{\pi v a + \hat{\alpha} \kappa \pi^2 (\pi \hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa)^2 + i a (\pi \hat{\alpha} + \mu)(1 + \kappa) - \pi^2 v \hat{\alpha} (1 + \kappa) \pi \kappa}{[\mu + \mu \kappa - \pi^2(\mu + 4)\kappa^2/2]^2 + [\pi^2 \hat{\alpha} \kappa(1 + \kappa)]^2} \right],$$

$$Z = F \left[ \frac{\pi v a + \alpha \kappa \pi^2 (\pi \hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa)^2 + i a (\pi \hat{\alpha} - \mu)(1 + \kappa) - \pi^2 v \hat{\alpha} (1 + \kappa) \pi \kappa}{[\mu + \mu \kappa - \pi^2(\mu + 4)\kappa^2/2]^2 + [\pi^2 \hat{\alpha} \kappa(1 + \kappa)]^2} \right].$$

При помощи этих выражений акустическая энергия в камере исследовалась численно для малых значений  $\alpha$  и  $\kappa$ . Результаты представлены на рис. 3 и 4 для  $\mu = 0,01$  и изменения  $\alpha$  и  $\kappa$  на интервалах соответственно  $\pm 0,1$  и  $\pm 0,2$ . Необходимо отметить наиболее существенные факты: а) две близкие ре-

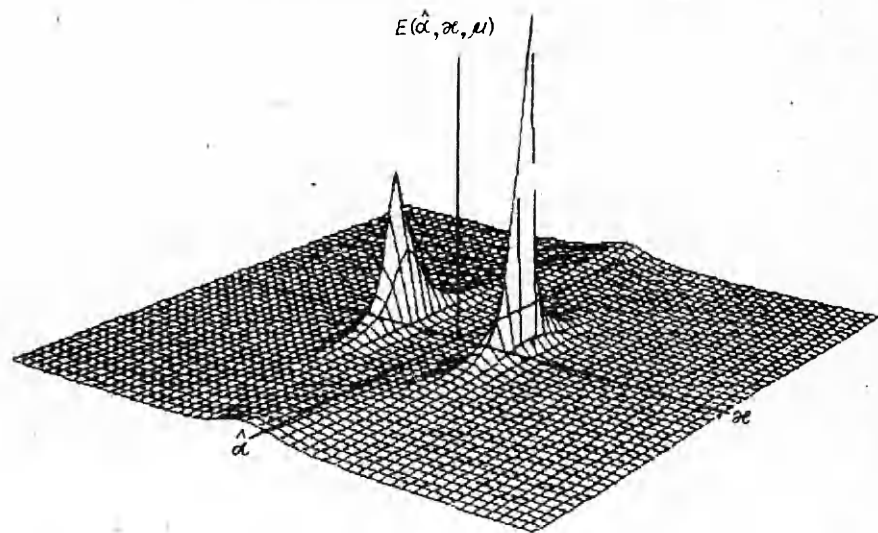


Рис. 3

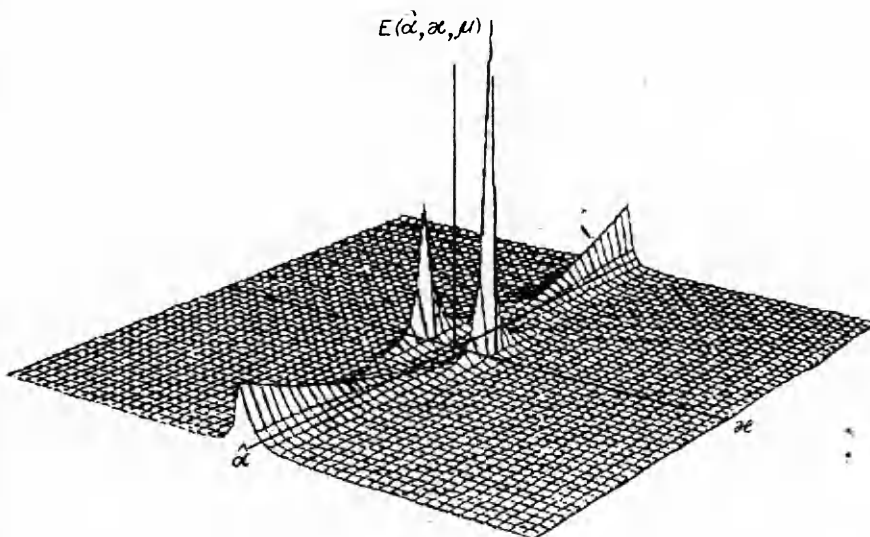


Рис. 4

зонансные частоты вынужденных колебаний, б) эффективное подавление колебаний при увеличении коэффициента поглощения  $\alpha$  от нуля (отсутствие поглощения) до оптимального значения коэффициента, в) при дальнейшем возрастании значений коэффициента поглощения  $\alpha$  акустическая энергия в камере сгорания увеличивается, г) существует оптимальный коэффициент поглощения.

Б. Амплитуда отраженной волны. В этом случае необходимо подобрать параметры поглотителя таким образом, чтобы  $|Z|$  — амплитуда волны, отраженной от стенки камеры, противоположной источнику колебаний, была минимальной;  $Z$  — комплексная амплитуда волны, отраженной от динамического поглотителя:

$$Z = \frac{[\mu + i(\pi\alpha - \mu)(1 + \kappa)]}{2\pi(1 + \kappa) [\mu \sin(\pi\kappa) + \mu(1 + \kappa) \cos(\pi\kappa) + i\pi\alpha(1 + \kappa) \sin(\pi\kappa)]}$$

Нетрудно заметить, что для этой целевой функции будут те же самые значения резонансных частот вынужденных колебаний, что и для акустической энергии в камере сгорания. Для малых значений  $\kappa$ ,  $\alpha$  и  $\mu = 0,01$  амплитуда отраженной волны исследовалась численно. На рис. 5 представ-

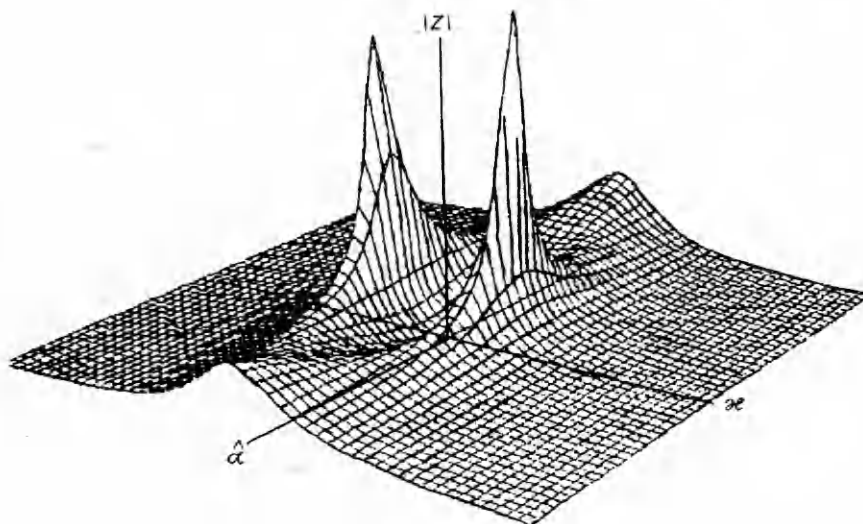


Рис. 5

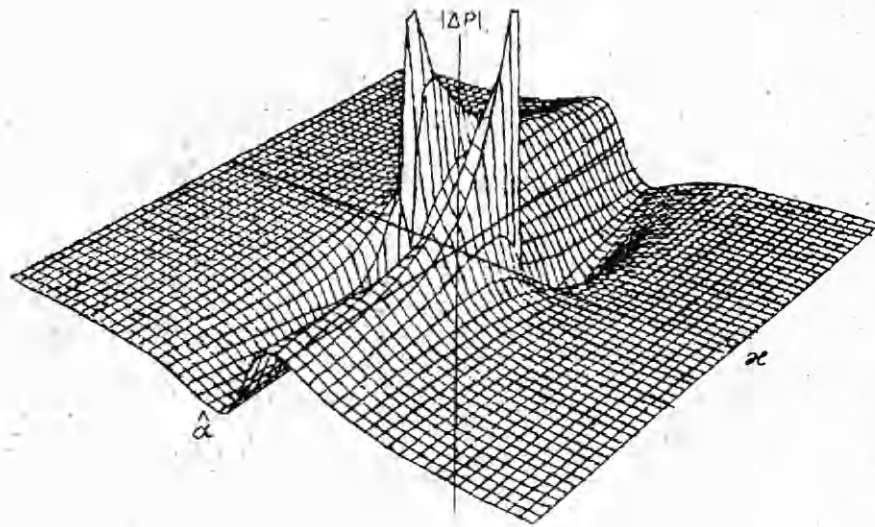


Рис. 6

лены результаты расчета для  $|\kappa| < 0,1$  и  $|\alpha| < 0,1$ . Необходимо отметить одинаковое качественное поведение энергии и амплитуды отраженной волны для малых значений управляющих параметров. Выводы те же, что и для предыдущей целевой функции.

**В. Разность давлений на противоположных стенках.** В этом случае надо подобрать управляющие параметры таким образом, чтобы разность давлений на противоположных стенках камеры сгорания была минимальной. Комплексную величину силы давления  $P(0)$  на левую стенку  $x = 0$  (см. рис. 1) со стороны пружины представим как

$$P(0) = -(i\alpha\omega_* + k)AX.$$

Сила давления на переднюю стенку  $P(0)$  составлена из силы трения и силы деформации пружины. Сила давления  $P(L)$  на заднюю стенку равна силе давления акустической волны:

$$P(L) = -i\rho\omega_*\Phi(L) = i\omega_*^2\rho AL(Y + Z).$$

Комплексная амплитуда колебаний разности давлений  $\Delta P = P(L) - P(0)$  имеет вид

$$\Delta P = P(L) - P(0) = (i\alpha\omega_* + k)AX + i\omega_*^2\rho AL(Y + Z).$$

Значит, абсолютная величина амплитуды колебаний разности давлений

$$|\Delta P| = |(i\alpha\omega_* + k)AX + i\omega_*^2\rho AL(Y + Z)|.$$

При помощи (1.8) это соотношение исследовано численно (рис. 6) для  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 0,01$  и малых значений  $\kappa$  и  $\alpha$  ( $|\kappa| < 0,1$ ,  $|\alpha| < 0,1$ ). Как и для предыдущих целевых функций, разность давлений имеет два резонансных пика для двух значений резонансных частот. Качественно нет различий с предыдущими целевыми функциями.

**3. Максимальный коэффициент затухания.** Другим способом оптимизации динамического резонансного поглотителя может быть принцип выбора управляющих параметров таким образом, чтобы затухание по времени решения задачи (1.1)–(1.4) (без источника колебаний  $A = 0$ ) было максимальным. В этом случае предполагается, что в камере возникли колебания, близкие к продольной моде собственных колебаний, и изучается их поведение во времени. Колебания в системе резонансная камера — динамический поглотитель описываются однородной системой уравнений (1.1)–(1.4) для неизвестных функций  $\Phi(x, t)$  и  $\Delta(t)$ . Здесь учтены: 1) уравнение распространения акустических волн в камере сгорания, 2) условие непротекания на правой стенке камеры  $x = L$ , 3) закон Ньютона для поршня,



4) условие непротекания на поршне — условие равенства скоростей поршня и частиц газа:

$$(3.1) \quad \Phi_{xx} - \Phi_{tt}/c^2 = 0, \quad \Phi_x(L, t) = 0, \\ m\Delta_{tt} + \alpha\Delta_t + k\Delta = \rho\Phi_t(0, t), \quad \Delta_t = \Phi_x(0, t).$$

Пусть колебания происходят с частотой, близкой к собственной частоте колебаний в камере, и с некоторым малым затуханием. В этом случае колебания описываются при помощи комплексной частоты, мнимая часть которой описывает затухание колебаний во времени. Оптимизация параметров динамического резонансного поглотителя в этом случае происходит таким образом, чтобы затухание колебаний было максимальным. Пусть функции  $\Phi(x, t)$  и  $\Delta(t)$ , описывающие колебания газа в камере и поршня, имеют вид

$$(3.2) \quad \Phi(x, t) = \text{Re} [\Phi(x) \exp(i\omega t)] = \exp(-\text{Im} \omega t) \text{Re} [\Phi(x) \exp(i \text{Re} \omega t)], \\ \Delta(t) = \text{Re} [\Delta \exp(i\omega t)] = \exp(-\text{Im} \omega t) \text{Re} [\Delta \exp(i \text{Re} \omega t)].$$

Необходимо отметить, что мнимая часть комплексной частоты  $\omega$  описывает скорость затухания акустических колебаний в камере сгорания. Удобно считать, что комплексная частота  $\omega$  мало отличается от частоты собственных колебаний  $\omega_k$  камеры сгорания ( $\omega = \omega_k + \delta\omega$ ), величина  $\delta\omega$  считается достаточно малой ( $\delta\omega = \delta_1 + i\delta_2$ ). Соотношения (3.2) позволяют записать (3.1) как

$$(3.3) \quad \Phi_{xx} - \Phi\omega^2/c^2 = 0, \quad \Phi_x(L) = 0, \\ \omega^2 m\Delta + i\omega\alpha\Delta + k\Delta = i\omega\rho\Phi(0), \quad i\omega\Delta = \Phi_x(0).$$

Оптимизация поглотителя состоит в подборе управляющих параметров задачи (3.3) таким образом, что  $\delta_2$  будет наибольшей возможной величиной. Пусть

$$\Delta = X, \quad \Phi(x) = Y \exp(i\omega L/c) + Z \exp(-i\omega L/c).$$

В силу соотношений (3.3) неизвестные величины  $X, Y, Z$  удовлетворяют системе уравнений

$$(3.4) \quad Y \exp(i\omega L/c) - Z \exp(-i\omega L/c) = 0, \\ (-\omega^2 m + i\omega\alpha + k) X - i\omega\rho(Y + Z) = 0, \quad X - (Y - Z)/c = 0.$$

Система (3.4) имеет нетривиальные решения только для тех значений  $\omega$  — комплексного собственного значения задачи, для которых определитель этой системы равен 0. Поэтому комплексные собственные значения должны быть решением уравнения

$$\det(M) = -i\omega\rho c [1 + \exp(2i\omega L/c)] + (-m\omega^2 + i\omega\alpha + k) [1 - \exp(2i\omega L/c)] = 0,$$

которое эквивалентно соотношению

$$(3.5) \quad \omega c / [\omega^2 - \omega_n^2 - i\omega(\alpha/m)] = (m/\rho) \text{tg}(\omega L/c).$$

Для нулевого трения ( $\alpha = 0$ ) решения (3.5) можно искать графически. Необходимо отметить, что трение считается достаточно малой величиной. Принимая во внимание представление  $\omega = \omega_k + \delta\omega$ , соотношения (3.5) можно линеаризовать относительно малой величины  $\delta\omega$ . Решение линеаризованного уравнения:

$$\delta\omega = c^2 (\rho/m) \omega_k / 2L [(\omega_k^2 - \omega_n^2) - i(\alpha/m) \omega_k].$$

Вещественная и мнимая составляющие решения уравнения (3.5), линеаризованного относительно малой величины  $\delta\omega$ , имеют вид

$$\delta_1 = \text{Re}(\delta\omega) = c^2 (\rho/m) \omega_k (\omega_k^2 - \omega_n^2) / 2L [(\omega_k^2 - \omega_n^2)^2 + (\alpha/m)^2 \omega_k^2], \\ \delta_2 = \text{Im}(\delta\omega) = c^2 (\rho/m) \omega_k^2 (\alpha/m) / 2L [(\omega_k^2 - \omega_n^2)^2 + (\alpha/m)^2 \omega_k^2].$$

Наибольшее затухание колебаний в камере сгорания будет в том случае, когда трение в динамическом поглотителе

$$\alpha = m (\omega_k^2 - \omega_n^2)^2 / \omega_k^2.$$

Наличие оптимального трения в поглотителе подтверждается экспериментальными исследованиями, приведенными в [8], там же описаны способы его увеличения.

**4. Выводы.** 1. Динамический поглотитель акустических колебаний в камере будет эффективным при совпадении собственных частот колебаний и некотором оптимальном значении коэффициента трения. 2. При малых значениях коэффициента трения наличие динамического поглотителя в камере может быть причиной возникновения автоколебаний. Это обусловлено тем, что камера с поглотителем имеет две близкие резонансные частоты, а это расширяет возможную полосу захвата частоты автоколебаний. 3. При больших значениях коэффициента трения динамический поглотитель акустических колебаний в камере сгорания может оказаться неэффективным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Дж. В. Теория звука. — М.; Л.: ГИГТЛ, 1940. — Т. 1, 2.
2. Ден-Гартог Дж. П. Теория колебаний. — М.; Л.: ОГИЗ, 1942.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. — М.; Л.: ОГИЗ, 1950.
4. Ахмадеев В. Ф., Гусева Г. Н., Козлов Л. Н. и др. Гидродинамические источники акустических колебаний. — М.: ЦНИИИТИ КПК, 1990.
5. Неустойчивость горения в ЖРД/Под ред. Д. Т. Харрье и Ф. Г. Рирдона. — М.: Мир, 1975.
6. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.
7. Исакович М. А. Общая акустика. — М.: Наука, 1973.
8. Ахмадеев В. Ф., Корляков В. Н., Козлов Л. Н. и др. Подавление акустических колебаний в камерах сгорания резонансными поглотителями. — М.: НПО «Информ ТЭИ», 1991.

г. Новосибирск,  
г. Пермь

Поступила 3/II 1992 г.,  
в окончательном варианте — 19/X 1992 г.

УДК 532.526

*В. Н. Ветлуцкий, Т. В. Поплавская*

### ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОФИЛИРОВАННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЯХ СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ

Для исследования аэродинамики крыльев большое значение имеет анализ коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела, которые определяются из расчета пограничного слоя на крыле. В настоящее время имеется ряд работ по численному расчету автотельного сжимаемого пограничного слоя на конических телах [1—3]. Расчет пространственного сжимаемого ламинарного пограничного слоя на заостренном теле биэллиптического сечения выполнен в [4]. В [5] проведен расчет трехмерного пограничного слоя при ламинарном и турбулентном режимах течения на плоском треугольном крыле.

В настоящей работе описаны постановка задачи и алгоритм расчета пространственного сжимаемого ламинарного пограничного слоя на профилированном крыле со сверхзвуковыми передними кромками. Приведены результаты его реализации для наветренной и подветренной сторон крыла с углом стреловидности  $\chi = 45^\circ$  при числе Маха  $M_\infty = 3$  и для наветренной стороны крыла с тем же  $\chi$  при  $M_\infty = 3$  и 6 для ряда углов атаки  $\alpha$ . Исследовано влияние числа Маха, угла атаки и относительной толщины профиля на коэффициент трения и на его вклад в полное сопротивление крыла.

© В. Н. Ветлуцкий, Т. В. Поплавская, 1993