Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

УДАР ПО ТВЕРДОМУ ТЕЛУ ВЕРЕТЕНООБРАЗНОЙ ФОРМЫ, ПОГРУЖЕННОМУ В ЖИДКОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

УДК 532.5

М. В. Норкин

Ростовский государственный университет, 344104 Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о вертикальном ударе по твердому телу веретенообразной формы, полученному вращением дуги окружности вокруг прямой, проходящей через ее крайние точки, наполовину погруженному в идеальную несжимаемую жидкость бесконечной глубины. После продолжения потенциала нечетным образом через свободную поверхность задача разбивается на поступательную и вращательную. Потенциал движения жидкости, вызванного поступательным движением тела, найден в квадратурах в биполярных координатах. В случае вращения осуществлено сведение задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Изучена зависимость присоединенных массы жидкости и момента инерции от параметров задачи a и b (a — радиус дуги вращения, b — координата центра дуги). Для шара ($b = 0$) результат совпадает с классическим [1], при $b = a$ получено согласование с предельным случаем вырожденного тора [2]. Выведено условие безотрывности удара. Задача обтекания данных поверхностей рассматривалась в [3].

1. Постановка задачи. Потенциал скоростей Φ, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара, удовлетворяет уравнению Лапласа во всем объеме, занятом жидкостью [4]: $\Delta\Phi = 0$, а также граничным условиям на смоченной поверхности тела и свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = v_0 n_z + \omega\,(z n_x - x n_z), \quad \Phi = 0.$$

Здесь v_0, ω — поступательная и угловая скорости тела; n_x, n_z — проекции вектора внешней нормали на оси декартовых координат x и z. На бесконечности $\Phi \to 0$. Продолжая потенциал Φ нечетным образом через свободную поверхность, приходим к внешней задаче Неймана. Функция Φ имеет вид

$$\Phi = v_0\Phi_1 + \omega\Phi_2, \tag{1.1}$$

где Φ_1 — потенциал движения жидкости, вызванного поступательным движением тела вдоль оси симметрии z с единичной скоростью; Φ_2 соответствует вращению тела вокруг оси y с постоянной угловой скоростью, равной единице. Присоединенные масса жидкости m и момент инерции J определяются по формулам

$$m = -\rho \iint\limits_S \Phi_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,ds, \quad J = -\rho \iint\limits_S \bar{\Phi}_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\,ds \tag{1.2}$$

(S — смоченная поверхность тела, ρ — плотность жидкости).

2. Поступательное движение. Во вращательно-симметричном случае можно ввести функцию тока ψ:

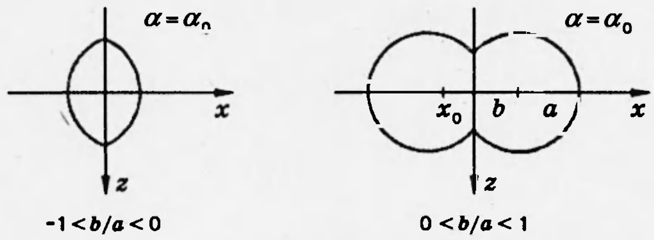

Рис. 1

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Для нахождения ψ используем биполярные координаты α, β, φ [5, с. 281], которые связаны с цилиндрическими r, z соотношениями

$$r=\frac{c\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\quad z=\frac{c\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha} \tag{2.1}$$

(c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha<\pi$, $-\infty<\beta<\infty$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$). Рассматриваемая система координат пригодна для решения краевых задач теории потенциала для области, ограниченной веретенообразной поверхностью вращения $\alpha=\alpha_0$ (рис. 1), а также для области, расположенной между двумя непересекающимися сферами. Через φ обозначена угловая координата, c и α_0 выражаются через параметры задачи a и b: $c=a\sin\alpha_0$, $b=a\cos\alpha_0$. Для функции тока $\psi=\psi(\alpha,\beta)$ имеем следующую краевую задачу в биполярных координатах:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)=0,\\ \psi(\alpha_0,\beta)=-\frac{r^2}{2}=-\frac{c^2\sin^2\alpha_0}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha_0)^2},\quad \psi|_\infty=0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Внешности веретенообразной поверхности соответствует область $0\leqslant\alpha<\alpha_0$, $-\infty<\beta<\infty$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Метод разделения переменных для задачи (2.2) приводит к решениям вида

$$\psi(\alpha,\beta)=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha}}\int\limits_0^\infty g(\tau)\cos\beta\tau P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha)\,d\tau$$

($P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha)$ — присоединенная функция Лежандра с комплексным значком, $g(\tau)$ — произвольная функция). Условие на бесконечности, где α, $\beta\to0$, выполняется, так как введенная функция Лежандра обращается в нуль при $\alpha=0$, а множитель перед интегралом есть функция ограниченная. Удовлетворяя граничному условию, приходим к разложению заданной функции в косинус-интеграл Фурье

$$\int\limits_0^\infty g(\tau)\cos\beta\tau P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)\,d\tau=-\frac{2c^2\sin\alpha_0}{(2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha_0)^{3/2}}.$$

Отсюда после преобразования Фурье находим неизвестную функцию

$$g(\tau)=-2c^2P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)/(P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)\operatorname{ch}\pi\tau).$$

Здесь были использованы интегральное представление и формула дифференцирования для функции Лежандра [5, с. 239; 6, с. 263]:

$$P_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0) = \frac{2\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta\tau\, d\beta}{\sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha_0}}; \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{d\alpha_0} P_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0) = -P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0). \tag{2.4}$$

Запишем окончательное выражение для функции тока ψ:

$$\psi(\alpha,\beta) = -\frac{2\,c^2\sin\alpha}{\sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha}}\int_0^\infty \frac{\cos\beta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)}{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)}\,P^1_{-1/2+i\tau}(cos\alpha)\,d\tau.$$

(Аналогичное выражение получено в задаче обтекания [3], где затем определяется присоединенная масса жидкости.) С учетом условия на свободной поверхности потенциал находится однозначно:

$$\Phi_1(\alpha,\beta) = \int_0^\beta \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,d\beta. \tag{2.5}$$

Известна следующая формула дифференцирования [7]:

$$h(\alpha,\tau) = \frac{d}{d\alpha}P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\, P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha) + (\tau^2+1/4)\,P_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha). \tag{2.6}$$

Пользуясь этой формулой, получим для подынтегрального выражения (2.5) равенство

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -c\Bigg[-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha}}\int_0^\infty \frac{\cos\beta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)}{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)}\,P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha)\,d\tau +$$
$$+\sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha}\int_0^\infty \frac{(\tau^2+1/4)}{\operatorname{ch}\pi\tau}\cos\beta\tau\,\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)}{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)}\,P_{-1/2+i\tau}(cos\alpha)\,d\tau\Bigg]. \tag{2.7}$$

Найдем присоединенную массу жидкости. Переходя в интеграле для m (1.2) к биполярным координатам (2.1), используя формулы (2.3)–(2.5), (2.7) и вычисляя интегралы от элементарных функций, окончательно получим $m = \rho a^3\lambda$, где функция $\lambda = \lambda(b/a)$ имеет вид

$$\lambda = -\frac{\pi}{24}\left[15\sin\alpha_0 - 11\sin^3\alpha_0 + (\pi-\alpha_0)\cos\alpha_0(12 + 3\cos2\alpha_0)\right] +$$
$$+2\pi^2\sin^4\alpha_0\int_0^\infty \frac{(\tau^2+1/4)}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}\,\frac{[P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)]^2}{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)}\,P_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)\,d\tau, \qquad \cos\alpha_0 = b/a.$$

Для вычисления функций Лежандра была использована их связь с гипергеометрическим рядом, численные результаты сравнивались с таблицами, приведенными в [8, 9].

Изучена зависимость функции λ от характерного параметра задачи b/a (рис. 2), при $b = 0$ получено совпадение с классическим результатом для шара: $\lambda = \pi/3$ [1], при $b = a$ результат согласуется с предельным случаем вырожденного тора: $\lambda \approx 10{,}158$ [2]. Численные значения λ приводятся в таблице.

b/a	λ	ν	R
-0,7	0,022	0,003	0,30
-0,5	0,112	0,009	0,21
-0,3	0,331	0,009	0,13
-0,1	0,745	0,002	0,04
0,1	1,426	0,004	0,04
0,3	2,456	0,067	0,12
0,5	3,919	0,288	0,19
0,7	5,914	0,827	0,27
0,8	7,145	1,282	0,30
0,9	8,553	1,903	0,33

3. Вращение тела. Рассмотрим задачу о вращении веретенообразной поверхности в идеальной жидкости. Уравнение Лапласа и граничное условие в биполярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(r\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(r\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta}\right)+\frac{c}{\sin\alpha\,(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\,\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varphi^2}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\cos\varphi\,\frac{c^2\cos\alpha_0\operatorname{sh}\beta}{(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha_0)^2},$$

где использовано равенство

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=-\frac{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha_0}{c}\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}.$$

Функцию Φ_2 определим как

$$\Phi_2\,(\alpha,\,\beta,\,\varphi)=\frac{4}{3}\,c^2\operatorname{ctg}\alpha_0\cos\varphi\sqrt{2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha}\int\limits_0^\infty f\,(\tau)\sin\beta\tau P^1_{-1/2+i\tau}\,(\cos\alpha)\,d\tau. \qquad (3.1)$$

Удовлетворяя граничному условию, с учетом (2.6) получим уравнение

$$\frac{\sin\alpha_0}{2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha_0}\int\limits_0^\infty f\,(\tau)\sin\beta\tau P^1_{-1/2+i\tau}\,(\cos\alpha_0)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty f\,(\tau)\sin\beta\tau\,h\,(\alpha_0,\,\tau)\,d\tau=\frac{3\sin\alpha_0\operatorname{sh}\beta}{(2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha_0)^{5/2}}.$$

Применяя к последнему уравнению синус-преобразование Фурье, используя формулы (2.3), (2.4), а также значение интеграла [10]

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos z\beta d\beta}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha_0}=\frac{\pi}{\sin\alpha_0}\,\frac{\operatorname{sh}\,(\pi-\alpha_0)\,z}{\operatorname{sh}\pi z},$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$y\,(\tau)+\int\limits_0^\infty y\,(s)\,r\,(s)\,[k\,(\tau-s)-k\,(\tau+s)]\,ds=\frac{\tau P^1_{-1/2+i\tau}\,(-\cos\alpha_0)}{\operatorname{ch}\pi\tau}, \qquad (3.2)$$

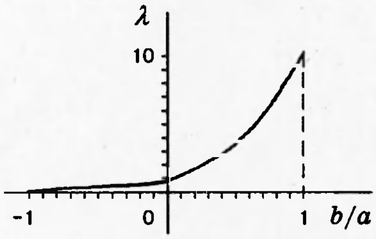

Рис. 2

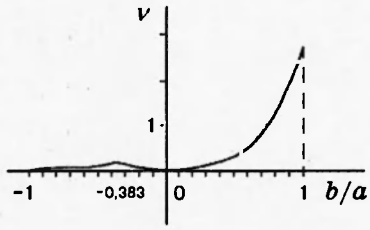

Рис. 3

$$y(s) = f(s)\, h(\alpha_0, s), \quad r(s) = \frac{P^1_{-1/2+is}(\cos\alpha_0)}{2\, h(\alpha_0, s)}, \quad k(s) = \frac{\operatorname{sh}(\pi - \alpha_0)\, s}{\operatorname{sh}\pi s}.$$

Вычислим присоединенный момент инерции. Переходя в интеграле для J (1.2) к биполярным координатам (2.1), используя формулы (2.3), (2.4), (3.1), окончательно получим $J = \rho a^5 \nu$, где функция $\nu = \nu\,(b/a)$ имеет вид

$$\nu = \frac{32\pi^2}{9} \sin^4\alpha_0 \cos^2\alpha_0 \int\limits_0^\infty \frac{y(\tau)\, r(\tau)\, \tau P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)}{\operatorname{ch}\pi\tau}\, d\tau$$

($y(\tau)$ есть решение интегрального уравнения (3.2)).

На рис. 3 показана зависимость функции ν от характерного параметра задачи b/a. Функция ν имеет две точки экстремума: локальный минимум $b = 0$ и локальный максимум $b/a \approx -0{,}383$. В первом случае присоединенный момент инерции равен нулю — это хорошо известный результат [1], приближенное значение локального максимума 0,010. При $b = a$ результат согласуется с предельным случаем вырожденного тора $\nu \approx 2{,}728$. Численные значения функции ν приведены в таблице.

4. Условие безотрывности удара. Координата точки приложения импульса находится по формуле

$$x_0 = -J\omega/mv_0. \tag{4.1}$$

Условие безотрывности удара состоит в том, что импульсивное давление $P_t = -\rho\Phi$ неотрицательно всюду на смоченной поверхности твердого тела. Представляется очевидным, что отрыв начинается в окрестности самой дальней от точки приложения импульса точке границы твердого тела $x = a + b$, что подтверждается численно для поверхностей $0 < b/a < 1$ (см. рис. 1).

Таким образом, для указанных поверхностей условие безотрывности равносильно неотрицательности импульсивного давления в некоторой окрестности точки $x = a + b$, что, в свою очередь, равносильно неотрицательности производной от импульсивного давления по нормали к свободной поверхности в этой точке:

$$\left.\frac{dP_t}{d\beta}\right|_{\substack{\beta=0\\ \varphi=0}} \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Принимая во внимание формулы (1.1), (2.5), (2.7), (3.1) и вычисляя производную (4.2), получим

$$v_0 A - \omega a \cos\alpha_0 B \geqslant 0,$$

$$A = -\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_0}{2}}{8 \sin \frac{\alpha_0}{2}} + \int\limits_0^\infty \frac{(\tau^2 + 1/4)}{\operatorname{ch} \pi\tau} \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(-\cos\alpha_0)}{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)} P_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)\, d\tau, \tag{4.3}$$

$$B = \frac{4}{3} \int\limits_0^\infty \tau f(\tau)\, P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\alpha_0)\, d\tau.$$

Для поверхностей $-1 < b/a < 0$ $(\pi/2 < \alpha_0 < \pi)$ (см. рис. 1) предположение о точке отрыва оказывается неверным. Здесь отрыв начинается в окрестности самой ближней от точки приложения импульса точке границы твердого тела $x = -a - b$. Условие безотрывности в этом случае определяется по формуле (4.3), где функцию $\cos\alpha_0$ следует взять по модулю.

Численно было установлено, что функции A и B неотрицательны. Из (4.1) и (4.3) получим необходимое и достаточное условие безотрывности удара в виде оценки $|x_0| \leqslant aR$, функция $R = R(b/a)$ имеет вид

$$R = \frac{\nu}{\lambda} \frac{A}{|\cos\alpha_0| B}.$$

В таблице приведены численные значения функции R. При $a = b$ результат согласуется с предельным случаем вырожденного тора: $R \approx 0{,}36$.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Биркгоф Г.** Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
2. **Норкин М. В.** Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины. М., 1994. Деп. в ВИНИТИ 14.03.94, № 593-В94.
3. **Коковин Е. Т., Либин Э. Е.** О потенциальном обтекании тела, образованного вращением дуги окружности // Аэрогазодинамика нестационарных процессов. Томск, 1992. С. 84–92.
4. **Седов Л. И.** Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. С. 1–27.
5. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.** Сборник задач по математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
7. **Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т.** Функции математической физики. М.: Физматгиз, 1963. С. 52–53.
8. **Журина М. И., Кармазина Л. Н.** Таблицы функций Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(x)$. М.: ВЦ АН СССР, 1960.
9. **Журина М. И., Кармазина Л. Н.** Таблицы функций Лежандра $P^1_{-1/2+i\tau}(x)$. М.: ВЦ АН СССР, 1963.
10. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды, элементарные функции. М.: Наука, 1981. С. 470–471.

Поступила в редакцию 4/I 1995 г.