

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ  
В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

*С. В. Левяков, Ю. В. Сойников*

*СибНИИ авиации им. С. А. Чаплыгина,  
630051 Новосибирск*

Метод локальных аппроксимаций, основные концепции которого приведены в [1, 2], основывается на представлении деформаций оболочек в малых областях (элементах) с помощью разложений Тейлора. Если ограничиться рассмотрением небольшого элемента и определить его геометрию по отношению к некоторому простому геометрическому объекту, например плоскости, то деформационные соотношения можно упростить. В зависимости от степени локальных аппроксимаций получаются различные нелинейные модели деформирования оболочек. Ниже приводятся исследования наиболее эффективных конечно-элементных моделей, в основу которых положены начальные члены локальных аппроксимаций.

1. Срединная поверхность оболочки в окрестности точки  $O$  определяется уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^p + \mathbf{n}^p \zeta, \quad \mathbf{r}^p = \mathbf{r}^0 + \mathbf{r}_{,i} \xi_i \quad (i = 1, 2), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор поверхности;  $\mathbf{r}^p$  — радиус-вектор плоскости, касательной к поверхности оболочки в точке  $O$ ;  $\zeta = \zeta(\xi_1, \xi_2)$  — функция, описывающая форму поверхности в окрестности рассматриваемой точки;  $\xi_1, \xi_2$  — ортогональные координаты на касательной плоскости; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Здесь и далее проводится суммирование по повторяющимся индексам.

Пренебрегая малыми членами  $\zeta_{,i}^2 \ll 1$ , для нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности оболочки получим

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n}^p - \mathbf{r}_{,i}^p \zeta_{,i}) (1 + \zeta_{,i}^2)^{-1/2} \approx \mathbf{n}^p - \mathbf{r}_{,i}^p \zeta_{,i}. \quad (1.2)$$

Согласно гипотезе Кирхгофа — Лява о сохранении нормального элемента, компоненты тензора деформации представим в виде

$$\varepsilon_{ij}^z = \varepsilon_{ij} + z \varkappa_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,i}^{zV} \mathbf{r}_{,j}^{zV} - \mathbf{r}_{,i}^z \mathbf{r}_{,j}^z), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{r}^z = \mathbf{r} + z \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^{zV} = \mathbf{r}^V + z \mathbf{n}^V.$$

Здесь  $\mathbf{r}^V, \mathbf{n}^V$  — векторы, относящиеся к деформированному состоянию;  $z$  — координата, нормальная к срединной поверхности оболочки.

На основе (1.1)–(1.3) определим компоненты  $\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ij}$  при больших перемещениях и поворотах срединной поверхности оболочки локальными аппроксимационными соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} (\zeta_{,i}^V \zeta_{,j}^V - \zeta_{,i} \zeta_{,j}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,i}^{pV} \mathbf{r}_{,j}^{pV} - \delta_{ij}), \quad (1.4)$$

$$\varkappa_{ij} = -(\zeta^V - \zeta)_{,ij} = -w_{,ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $w = \zeta^V - \zeta$  — прогиб в направлении нормали  $\mathbf{n}^p$ .

Анализ выражений (1.4) показывает, что при уменьшении размеров поверхности оболочки члены в выражении для  $\varepsilon_{ij}$ , стоящие в круглых скобках, стремятся к нулю. Учет этих членов позволяет уточнить приближенные меры деформаций, справедливые для тонких пластин, до деформационных соотношений пологих оболочек [3]. Использование в создании численных алгоритмов более сложных деформационных моделей представляется нецелесообразным как в связи с трудоемкостью их численной реализации, так и с точки зрения основных концепций метода конечных элементов.

2. Рассмотрим трехузловой конечный элемент треугольной формы, имеющий в узле пять степеней свободы: три перемещения и два угла поворота нормали. Для неизвестных функций, определяющих геометрию элемента оболочки до и после деформации, примем следующие аппроксимации:

$$\mathbf{r}^p = L_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}^{pV} = L_k \mathbf{r}_k^V, \quad \zeta = -N^{ik} \vartheta_{ik}, \quad \zeta^V = -N^{ik} \vartheta_{ik}^V \quad (2.1)$$

$$(i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\mathbf{r}_k$  — узловые значения радиуса-вектора;  $\vartheta_{ik}$  — косинус угла в  $k$ -м узле между нормалью и координатным вектором  $\mathbf{r}_{,i}$ ;  $L_k, N^{ik}$  —  $L$ -координаты и кубические функции формы, имеющие вид [1]

$$L_k = b_{ki} \xi_i + b_{k3},$$

$$b_{i1} = \frac{\zeta_{2j} - \xi_{2k}}{2F}, \quad b_{i2} = \frac{\xi_{1k} - \zeta_{1j}}{2F}, \quad b_{i3} = \frac{\xi_{1j} \xi_{2k} - \xi_{1k} \xi_{2j}}{2F},$$

$$N^{1i} = 2F(b_{k2} \eta_{1i} - b_{j2} \eta_{2i}), \quad N^{2i} = 2F(b_{j1} \eta_{2i} - b_{k1} \eta_{1i}), \quad (2.2)$$

$$\eta_{1i} = L_i^2 L_j + c_{1i} L_i L_j L_k, \quad \eta_{2i} = L_i^2 L_k + c_{2i} L_i L_j L_k,$$

$$c_{1i} = \frac{1}{2} \frac{3h_i^2 - h_j^2 + h_k^2}{h_i^2 + h_j^2 + h_k^2}, \quad c_{2i} = \frac{1}{2} \frac{3h_i^2 - h_k^2 + h_j^2}{h_i^2 + h_j^2 + h_k^2},$$

где  $F$  — площадь элемента;  $\xi_{ij}$  —  $i$ -я координата  $j$ -го узла элемента;  $h_i$  — длина стороны элемента, противоположной узлу  $i$ . Соотношения (2.2) подчиняются правилу циклической перестановки индексов  $i, j, k$ .

Подставляя выражения (2.1) в (1.4) и усредняя компоненты тензора деформаций по площади элемента, получим деформационные соотношения для конечного элемента оболочки:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} u_{ij}^{mrst} (\vartheta_{mr}^V \vartheta_{st}^V - \vartheta_{mr} \vartheta_{st}),$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (x_{kt}^{pV} x_{kr}^{pV} b_{ti} b_{rj} - \delta_{ij}),$$

$$u_{ij}^{mrst} = N_{,ij}^{,mr} \theta_{mr}, \quad \theta_{mr} = \vartheta_{mr}^V - \vartheta_{mr}, \quad \vartheta_{mr}^V = b_{tm} \lambda_{kr}^{nV} x_{kt}^{pV}, \quad (2.3)$$

$$u_{ij}^{mrst} = \frac{1}{2F} \int_F (N_{,i}^{,mr} N_{,j}^{,st} + N_{,j}^{,mr} N_{,i}^{,st}) dF$$

$$(i, j, m, s = 1, 2, \quad k, r, t = 1, 2, 3).$$

Здесь  $x_{kr}^p$  —  $k$ -я координата  $r$ -го узла элемента;  $\theta_{mr}$  — узловые значения изменений косинусов углов наклона нормали ( $m$  — номер косинуса угла,  $r$  — номер узла).

Условимся в дальнейшем называть конечно-элементную модель, основанную на деформационных соотношениях (2.3), моделью А. Под моделью В будем понимать конечно-элементные построения с использованием упрощенного варианта деформационных соотношений

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}, \quad \alpha_{ij} = N_{,ij}^{\tau} \theta_{m\tau}. \quad (2.4)$$

Сравнение вариантов деформационных моделей, основанных на соотношениях (2.3), (2.4), показывает, что уточнение касается распределения деформаций внутри элемента и не связано с его пространственным движением. Оба конечно-элементных варианта обеспечивают расчет деформированного состояния тонких оболочек произвольной формы в области конечных упругих перемещений и поворотов. Представляет интерес исследование вопросов сходимости и точности решений моделей А и В на классических задачах статики тонких оболочек.

3. Задачу определения равновесного состояния будем решать энергетическим методом. Запишем выражение потенциальной энергии элемента оболочки:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^z (\varepsilon_{ij}^z - \alpha_{ij} T) dV \quad (3.1)$$

( $\alpha_{ij}$  — тензор коэффициентов линейного расширения,  $\sigma_{ij}^z$  — тензор напряжений,  $T$  — перепад температур).

Соотношения термоупругости имеют вид

$$\sigma_{ij}^z = a_{ijkl}(z) (\varepsilon_{kl}^z - \alpha_{kl} T). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), с учетом гипотез Кирхгофа — Лява  $\varepsilon_{ij}^z = \varepsilon_{ij} + z \alpha_{ij}$  и свойства симметрии тензора упругих постоянных ( $a_{ijkl} = a_{klij}$ ) получим

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_F (B_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \alpha_{kl} + D_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}) dF - \\ - \int_F Q_{ij} \varepsilon_{ij} dF - \int_F R_{ij} \alpha_{ij} dF + \text{const.} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{ijkl} = \int_h a_{ijkl} dz; \quad C_{ijkl} = \int_h a_{ijkl} z dz; \quad D_{ijkl} = \int_h a_{ijkl} z^2 dz; \\ Q_{ij} = \int_h a_{ijkl} \alpha_{kl} T dz; \quad R_{ij} = \int_h a_{ijkl} \alpha_{kl} T z dz \end{aligned}$$

( $Q_{ij}$ ,  $R_{ij}$  — температурные усилия и моменты). Подставляя деформационные соотношения (2.3) в (3.3) и проводя интегрирование по площади элемента, получим выражение для потенциальной энергии элемента, которое с использованием матричных обозначений примет вид

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} (\varepsilon^T K_\varepsilon \varepsilon + 2\varepsilon^T K_{\varepsilon\theta} \theta + \theta^T K_\theta \theta) - \varepsilon^T Q_\varepsilon - \theta^T Q_\theta + \text{const}, \\ \varepsilon^T = |\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}|, \quad \theta^T = |\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}, \theta_{13}, \theta_{23}|, \end{aligned}$$

где  $K_\varepsilon$ ,  $K_{\varepsilon\theta}$ ,  $K_\theta$  — блоки матрицы жесткости элемента;  $Q_\varepsilon$ ,  $Q_\theta$  — векторы

температурной нагрузки, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\varepsilon &= \mathbf{B}\mathbf{F}, \quad \mathbf{K}_{\varepsilon\theta} = \mathbf{C} \int_F \mathbf{N}'' dF, \quad \mathbf{K}_\theta = \int_F (\mathbf{N}'')^T \mathbf{D} \mathbf{N}'' dF, \\ \mathbf{B} &= \int_h \mathbf{a} dz, \quad \mathbf{C} = \int_h \mathbf{a} z dz, \quad \mathbf{D} = \int_h \mathbf{a} z^2 dz, \quad \mathbf{Q}_\varepsilon = F \int_h \mathbf{a} \alpha T dz, \\ \mathbf{Q}_\theta &= \int_F (\mathbf{N}'')^T dF \int_h \mathbf{a} \alpha T z dz, \quad \alpha^T = |\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & 2a_{1112} \\ \text{sym} & a_{2222} & 2a_{2212} \\ & & 4a_{1212} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}'' = \begin{bmatrix} N_{,11}^{11} & N_{,11}^{21} & N_{,11}^{12} & N_{,11}^{22} & N_{,11}^{13} & N_{,11}^{23} \\ N_{,22}^{11} & N_{,22}^{21} & N_{,22}^{12} & N_{,22}^{22} & N_{,22}^{13} & N_{,22}^{23} \\ N_{,12}^{11} & N_{,12}^{21} & N_{,12}^{12} & N_{,12}^{22} & N_{,12}^{13} & N_{,12}^{23} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $T$  — среднее по элементу значение перепада температуры;  $\mathbf{a}$  — матрица упругих постоянных;  $\alpha$  — вектор коэффициентов линейного расширения. Интегрирование по площади элемента в (3.4) проводится численно по кубатурным формулам Гаусса [4].

В случае изотропной оболочки компоненты матрицы  $\mathbf{a}$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{1111} &= a_{2222} = E/(1 - \nu^2), & a_{1122} &= \nu a_{1111}, \\ a_{1112} &= a_{2212} = 0, & a_{1212} &= 0,5E/(1 + \nu). \end{aligned}$$

4. Для формулировки уравнений равновесия, устойчивости и итерационного процесса решения следует вычислить коэффициенты первой и второй вариаций потенциальной энергии нелинейной дискретной системы.

С целью алгоритмизации вычислений введем два уровня варьируемых дискретных параметров, определяемых вектором обобщенных упругих перемещений  $\mathbf{u}^*$  и вектором обобщенных координат  $\mathbf{u}^{**} = \mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^*)^T &= |\mathbf{e}^T, \boldsymbol{\theta}^T|, \quad \mathbf{e}^T = |e_{11}, e_{22}, e_{12}|, \\ (\mathbf{u}^{**})^T &= \mathbf{q}^T = |\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{q}_3^T|, \quad \mathbf{q}_i^T = |x_{1i}^V, x_{2i}^V, x_{3i}^V, \varphi_{1i}^V, \varphi_{2i}^V| \end{aligned}$$

( $\varphi_{ij}^V$  — углы поворота нормали  $\mathbf{n}_j^V$ ).

Алгоритм решения нелинейной задачи основан на условиях стационарности полной потенциальной энергии дискретной системы:

$$\mathbf{H} \delta \mathbf{q} + \mathbf{g} - \mathbf{Q} = 0 \quad (4.1)$$

( $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{g}$  — матрица Гесса и градиент потенциальной энергии ансамбля конечных элементов,  $\mathbf{Q}$  — вектор обобщенных внешних сил).

Матрица Гесса  $\mathbf{h}^{**}$  и градиент  $\mathbf{g}^{**}$  конечного элемента вычисляются по формулам

$$\mathbf{g}^{**} = (\mathbf{u}^*)^T \mathbf{g}^*, \quad \mathbf{h}^{**} = (\mathbf{u}^*)^T \mathbf{h}^* \mathbf{u}^{**} + \mathbf{g}_i^* \mathbf{u}_i^{**},$$

где  $\mathbf{g}^*$ ,  $\mathbf{h}^*$  — градиент и матрица Гесса первого уровня;  $\mathbf{u}^{*'} , \mathbf{u}_i^{*''}$  — матрицы первых и вторых производных компонент вектора  $\mathbf{u}^*$  по компонентам вектора  $\mathbf{u}^{**}$ , определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}^*)^T &= |\mathbf{g}_e^T, \mathbf{g}_\theta^T| = |g_1^*, \dots, g_9^*|, \quad \mathbf{h}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_e & \mathbf{h}_{e\theta} \\ \mathbf{h}_{e\theta}^T & \mathbf{h}_\theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_e &= \mathbf{K}_e \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{K}_{e\theta} \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{g}_\theta = \mathbf{K}_{e\theta}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A} \mathbf{g}_e, \\ \mathbf{h}_e &= \mathbf{K}_e, \quad \mathbf{h}_{e\theta} = \mathbf{K}_{e\theta} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{h}_\theta &= \mathbf{K}_\theta + \mathbf{A} \mathbf{K}_{e\theta} + \mathbf{K}_{e\theta}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{K}_e \mathbf{A}^T + g_1^* \mathbf{u}_{11} + g_2^* \mathbf{u}_{22} + g_3^* \mathbf{u}_{12}, \quad (4.2) \\ \mathbf{A} &= |\mathbf{u}_{11} \boldsymbol{\vartheta}^V, \mathbf{u}_{22} \boldsymbol{\vartheta}^V, \mathbf{u}_{12} \boldsymbol{\vartheta}^V|, \quad u_{ij} = \frac{1}{2F} \int_F (N_{,i} N_{,j}^T + N_{,j} N_{,i}^T) dF, \\ \mathbf{N}^T &= |N^{11}, N^{21}, N^{12}, N^{22}, N^{13}, N^{23}|, \quad \boldsymbol{\vartheta}^{V\alpha} = |\vartheta_{11}^V, \vartheta_{21}^V, \vartheta_{12}^V, \vartheta_{22}^V, \vartheta_{13}^V, \vartheta_{23}^V|. \end{aligned}$$

Интегрирование для  $u_{ij}$  в (4.2) производится численно методом Гаусса [4]. Ненулевые компоненты матрицы  $\mathbf{u}^{*'}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_{km}^V} &= \frac{1}{2} x_{ks}^V (b_{sj} b_{mi} + b_{si} b_{mj}), \\ \frac{\partial \vartheta_{rs}^V}{\partial \varphi_{is}^V} &= x_{km}^V b_{mr} \lambda_{iks}^V, \quad (4.3) \\ \frac{\partial \vartheta_{rs}^V}{\partial x_{km}^V} &= b_{mr} \lambda_{ks}^V \quad (i, j, r = 1, 2, \quad k, m, s = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

( $\lambda_{iks}^V$  — направляющие косинусы двух вспомогательных ортов, образующих с нормалью  $\mathbf{n}_s^V$  правую тройку).

Ненулевые компоненты матриц вторых производных  $\mathbf{u}_i^{*''}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_{km}^V \partial x_{kl}^V} &= \frac{1}{2} (b_{lj} b_{mi} + b_{li} b_{mj}), \\ \frac{\partial^2 \vartheta_{rs}^V}{\partial \varphi_{is}^V \partial \varphi_{is}^V} &= -x_{km}^V b_{mr} \lambda_{ks}^V, \quad (4.4) \\ \frac{\partial^2 \vartheta_{rs}^V}{\partial \varphi_{is}^V \partial x_{km}^V} &= b_{mr} \lambda_{iks}^V \quad (i, j, l, r = 1, 2, \quad k, m, s = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Соотношения (4.3), (4.4) обеспечивают циклическое вычисление градиента и гессиана потенциальной энергии конечного элемента оболочки, что позволяет компактно алгоритмизировать вычисления на ЭВМ.

В процессе итерационного решения уравнений равновесия по схеме (4.1) необходимо после каждой итерации вычислять новые значения неизвестных величин. В случае конечных перемещений и поворотов новые значения узловых неизвестных вычисляются по формулам

$$\mathbf{r}^{VV} = \mathbf{r}^V + \delta \mathbf{r}^V, \quad \mathbf{n}^{VV} = \mathbf{n}^V \cos \delta n^V + \delta \mathbf{n}^V \sin(\delta n^V) / \delta n^V,$$

где  $\delta n^V$  — модуль вектора  $\delta \mathbf{n}^V$ .

Сформулированный алгоритм позволяет находить состояния равновесия и исследовать их устойчивость согласно критерию положительной определенности второй вариации энергии.

5. Рассмотрим задачу устойчивости сжатой в одном направлении усилиями  $p$  квадратной шарнирно опертой пластины со стороной  $b$ . Примем  $\nu = 0$ . Учет условий симметрии позволяет для четверти пластины, разбитой на два треугольных элемента, получить аналитические выражения уравнений устойчивости

$$Kq - pb^2 D^{-1}(B + C)q = 0, \quad q^T = |2w/b, \varphi|, \quad (5.1)$$

где  $w$  — прогиб центра пластины;  $\varphi$  — угол поворота нормали;  $D$  — цилиндрическая жесткость. Ненулевые компоненты матриц в (5.1) имеют вид

$$K_{11} = 84, \quad K_{12} = K_{21} = 38, \quad K_{22} = 29, \quad B_{11} = 1, \\ C_{11} = 3/20, \quad C_{12} = C_{21} = 1/15, \quad C_{22} = 73/720.$$

Матрица  $C$  отражает влияние дополнительных членов в деформационных соотношениях (1.4), определяющих модель А. Из условия  $\det(K - pb^2 D^{-1}(B + C)) = 0$  получим параметр критической нагрузки  $k = p_{кр} b^2 / \pi^2 D$ , точное значение которого  $k_T = 4$  [5]:

$$k = \frac{192}{323\pi^2} \left( 276 - \sqrt{\frac{102287}{2}} \right) = 3,00 \quad (\text{модель А}),$$

$$k = \frac{992}{29\pi^2} = 3,46 \quad (\text{модель В})$$

( $p_{кр}$  — критическая нагрузка).

Полагая в (5.1)  $\varphi = 0$ , можно найти также решение задачи для заделанных сторон пластины. В этом случае для параметра критической нагрузки получены следующие значения ( $k_T = 10,07$  [5]):

$$k = \frac{1680}{23\pi^2} = 7,40 \quad (\text{модель А}),$$

$$k = \frac{84}{\pi^2} = 8,51 \quad (\text{модель В}).$$

Из приведенных результатов видно, что ошибка расчетов для грубой сетки разбиения с использованием модели А достигает 25 %, а модели В — 15 %.

Таблица 1

Сетка	Все стороны шарнирно оперты ( $k_T = 4$ )		Две стороны оперты, две свободны ( $k_T = 1$ )	
	Модель А	Модель В	Модель А	Модель В
2 × 2	3,00	3,46	0,943	1,140
4 × 4	3,55	3,88	0,985	1,035
8 × 8	3,88	3,92	—	—

В табл. 1 представлены результаты по исследованию сходимости конечно-элементных решений, выполненных на ЭВМ. Анализ результатов показывает, что преимущества модели А проявляются в задаче с двумя опертыми и двумя свободными сторонами. Ошибки при определении критического параметра, например, на сетке 2 × 2 для модели А составляет 5,7 %, для модели В — 14 %.

Таблица 2

Сетка	Прогиб $w(0) \cdot 10^2$ , м		Прогиб $w(\pi/2) \cdot 10^2$ , м	
	Модель А	Модель В	Модель А	Модель В
2 × 2	0,2891	0,2865	0,2752	0,2629
3 × 3	0,2990	0,2832	0,2737	0,2577
4 × 4	0,2972	0,2853	0,2675	0,2565
5 × 5	0,2953	0,2864	0,2638	0,2557
6 × 6	0,2929	0,2871	0,2605	0,2552
7 × 7	0,2921	0,2874	0,2592	0,2548

Анализ линейного решения проведен для цилиндрической оболочки со свободными торцами, нагруженной двумя сосредоточенными силами  $P = 453,6$  Н и имеющей следующие характеристики:  $L = 0,2629$  м,  $R = 0,1258$  м,  $h = 0,2387 \cdot 10^{-2}$  м,  $E = 0,738 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3125$  (рис. 1). С учетом симметрии дискретизацию достаточно провести для октанта оболочки. Результаты исследования сходимости при определении прогибов представлены в табл. 2. Для сравнения приведем значения для прогиба под силой  $w(0)$ , полученные в различных работах:  $0,276 \cdot 10^{-2}$  м [6],  $0,287 \cdot 10^{-2}$  м [7],  $0,279 \cdot 10^{-2}$  м [8],  $0,2886 \cdot 10^{-2}$  м [9]. Анализ результатов расчетов показывает, что при применении модели А имеет место сходимость решения сверху, а модели В — снизу.

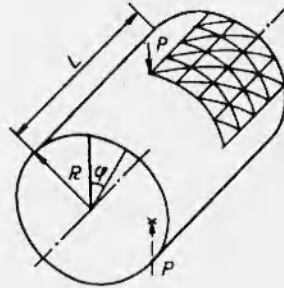


Рис. 1

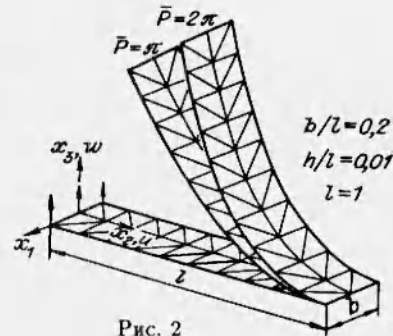


Рис. 2

Нелинейный алгоритм использовался для решения задач изгиба тонкой консольной полосы поперечной силой  $P$  и изгибающим моментом  $M$ . Характеристики пластины и способ разбиения на конечные элементы представлены на рис. 2. Здесь же показаны равновесные состояния полосы при  $\bar{P} = \pi$  и  $\bar{P} = 2\pi$  ( $\bar{P} = Pl^2/EI$ ,  $I = bh^3/12$ ).

На рис. 3 приведены нелинейные характеристики, связывающие параметр нагрузки  $\bar{P}$  с перемещением  $\bar{u} = u/l$  (кривая 1) и с прогибом  $\bar{w} = w/l$  (кривая 2) свободного конца (линии — решения, полученные по балочной схеме [10], точки и крестики — конечно-элементные решения моделей А и В соответственно). Обе модели дают результаты, практически совпадающие с балочными решениями.

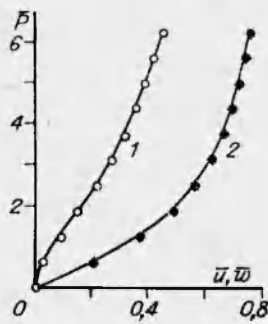


Рис. 3

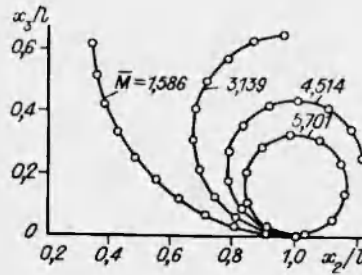


Рис. 4

На рис. 4 представлены равновесные формы полосы, соответствующие различным значениям параметра изгибающего момента  $\bar{M} = Ml/EI$ .

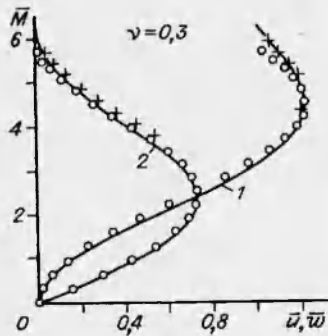


Рис. 5

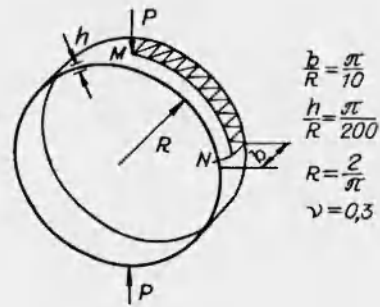


Рис. 6

На рис. 5 даны характеристики перемещения  $\bar{u}$  и прогиба  $\bar{w}$  (кривые 1 и 2), соответствующие балочному решению. Здесь же, следуя принятым обозначениям, нанесены расчетные точки, полученные с использованием исследуемых конечно-элементных моделей. При малых значениях параметра нагрузки ( $\bar{M} < 1$ ) все три решения близки между собой. С увеличением нагрузки ( $\bar{M} > 1$ ) оболочечные модели являются более жесткими по сравнению с балкой. При  $\bar{M} > 5$  использование модели А дает результаты, заметно отличающиеся от балочных.

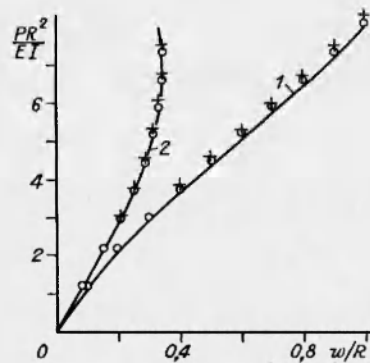


Рис. 7

Нелинейное деформирование оболочек было исследовано с помощью изложенного выше метода на примере задачи изгиба узкого кольца двумя диаметрально направленными сосредоточенными силами  $P$ . Способ разбиения и геометрические характеристики оболочки приведены на рис. 6.

На рис. 7 линиями 1 и 2 представлены нелинейные характеристики прогибов точек  $M$  и  $N$ , полученные по балочной схеме. Точками показано решение, соответствующее конечно-элементной модели А, крестиками —



модели В. В данной задаче с балочным решением [10], представленным сплошными линиями, лучше согласуется модель А.

Анализ результатов расчетов показывает, что разработка оптимальной конечно-элементной модели определяется прежде всего отражением нелинейных внешних связей конечных элементов и удовлетворением известных критериев сходимости [2]. Этот вопрос тесно связан с выбором обобщенных упругих перемещений в нелинейных задачах, отражающих пространственный характер реально существующих геометрических связей в оболочке, и описанием больших перемещений такого геометрического объекта. Уточнение распределения деформаций внутри элемента не является определяющим по сравнению с уменьшением размеров элементов на пути уточнения решения. Заметим, что использование в расчетах конечно-элементной модели А приводит к большим временным затратам. Так, для решения задачи об изгибе консольной полосы силой  $\bar{P}$ , изменяющейся от  $\bar{P} = 0$  до  $\bar{P} = 2\pi$  за 10 шагов нагружения, потребовалось приблизительно в 2 раза больше времени, чем для модели В. Программы расчетов реализованы на персональных компьютерах типа IBM PC/AT-286.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 131-138.
2. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. О критерии применимости деформационных соотношений тонких оболочек в области произвольных перемещений // ПМТФ. 1991. № 6. С. 128-132.
3. Marguerre K. Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formmänderung // Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., Sept. 1938. N. Y.; London, 1939. P. 93-101.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
7. Кантин Г., Клауф Р. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6, № 6. С. 82-88.
8. Vogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. A cylindrical shell discrete element // AIAA J. 1967. V. 5, N4. P. 745-750.
9. Dawe D. J. High-order triangular finite element for shell analysis // Intern. J. Solids Struct. 1975. V. 11. P. 1097-1110.
10. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 31/III 1994 г.