впадает со старшим членом асимптотики в [2]. Пренебрегая в (5.10) младшими членами, получим

$$u^2 = \frac{2-n}{1-\left(\frac{\gamma u^2}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}}\Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right)}.$$

Решая это трансцендентное уравнение относительно $u^2$ методом последовательных приближений, найдем

$$u^2 \sim \frac{2-n}{1-\gamma^{\frac{2-n}{n-1}}\left(\frac{2-n}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}}\Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right)\frac{1}{(1-\gamma^{2-n})^{2-n}}}. \tag{5.11}$$

Выражение (5.11) дает равномерную асимптотику при $n \to 2$ и два старших члена неравномерной асимптотики при $3/2 < n < 2$.


### ЛИТЕРАТУРА

1. **Вильямс Ф. А.** Теория горения.— М.: Наука, 1971.
2. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Асимптотический анализ распространения фронта экзотермической одноступенчатой реакции $n$-го порядка в конденсированной фазе // ФГВ.— 1975.— № 1.
3. **Галкина В. Н., Любченко В. И., Марченко Г. Н.** О скорости распространения волны горения в конденсированной среде // ДАН СССР.— 1986.— Т. 286, № 2.
4. **Худяев С. И.** К асимптотической теории стационарной волны горения // Хим. физика.— 1987.— № 5.
5. **Худяев С. И., Ильин А. М.** Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде // Хим. физика.— 1989.— № 4.
6. **Вольперт В. А., Вольперт В. А., Давтян Д. С.** Оценки скорости волны горения в конденсированной среде.— Черноголовка, 1988.— (Препр./АН СССР, Отд-ние ин-та хим. физики).


*г. Черноголовка* *Поступила 20/IV 1989 г.*

---

УДК 534.2:532,!! \

*А. Н. Богданов, В. А. Куликовский*

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ, ПОДВЕРЖЕННОМ ДЕЙСТВИЮ ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В газе с неравновесным распределением энергии по внутренним степеням свободы, поддерживаемым химическими реакциями, внешним облучением, электрическими разрядами и т. п., звуковые волны могут усиливаться [1—4]. Это приводит к возрастанию роли нелинейных эффектов и к образованию ударных волн (УВ) [5—7]. Процессы возникновения и распространения УВ представляют значительный интерес, так как их появление в активной среде газовых лазеров может приводить к срыву генерации [8], а в плазмотронах — к существенному снижению эффективности химических реакций [9].

В настоящей работе рассмотрены вопросы распространения слабых нестационарных возмущений в газе при наличии накачки энергии в колебательные степени свободы молекул, найдены условия образования УВ и законы ее эволюции со временем. Особое внимание уделено практически важному случаю переменного фона. Получено решение задачи о развитии нелинейного стационарного возмущения сверхзвукового потока колебательно-неравновесного газа при подводе энергии во внутренние степени свободы в слое конечной ширины. Рассмотрены достаточно короткие волны, время взаимодействия которых с частицами газа много меньше характерного времени релаксации («квазизамороженное приближение»). Длинные волны, для которых наличие релаксационного процесса эквивалентно дополнительной объемной вязкости, а основным математическим аппаратом является уравнение Бюргерса («квазиравновесное приближение»), изучены в [7, 10].

Одномерные течения газа при наличии накачки энергии в колебательные степени свободы описываются системой уравнений

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu\rho u}{x}=0,\quad \frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{dp}{dt}-a^2\frac{d\rho}{dt}=\rho(\gamma-1)F,$$

$$\frac{de_{\text{к}}}{dt}=I-F,\quad F=\varkappa I-\omega\left(e_{\text{к}}^*-e_{\text{к}}\right),\quad 0\leqslant\varkappa\leqslant 1,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Здесь $p$, $\rho$ и $u$ — давление, плотность и скорость газа; $a^2=\gamma p/\rho$; $\gamma$ — «замороженный» показатель адиабаты; $e_{\text{к}}$ — удельная энергия колебательных степеней свободы; $\nu=0,1$ для плоских, осесимметричных течений газа; $I=I(t)$— удельная мощность внешнего источника энергии, обусловленного, например, облучением; $\varkappa=\text{const}$. Для равновесного значения колебательной энергии $e_{\text{к}}^*$ и обратного времени релаксации $\omega$ примем соотношения, соответствующие гармоническому осциллятору [11]:

(1) $$e_{\text{к}}^*=\theta_{\text{к}}R/(\exp(\theta_{\text{к}}/T)-1),\quad \omega=k_1p\exp\left(-k_2T^{-1/3}\right)$$

($R$ — газовая постоянная, $T$ — температура поступательных степеней свободы, $\theta_{\text{к}}$ — характеристическая колебательная температура, $k_1$ и $k_2$ — размерные положительные постоянные, зависящие от свойств газа, конкретные значения которых имеются в [11]).

Рассмотрим задачу о распространении звукового импульса произвольного профиля в покоящемся однородном газе. Состояние газа будет меняться со временем под действием внешнего излучения в соответствии с системой

(2) $$\frac{\partial p^0}{\partial t}=\rho^0(\gamma-1)F^0,\quad e_{\text{к}}^0=e_{\text{к}0}^0-\frac{p^0-p_0^0}{(\gamma-1)\rho^0}+\int_0^t I(\xi)\,d\xi.$$

Здесь и далее верхним индексом нуль отмечены параметры, описывающие невозмущенное состояние газа (фон), а индексом нуль внизу — начальные данные при $t=0$. Исходную систему уравнений перепишем в характеристической форме

(3) $$\frac{d_{1,2}}{dt}\left(u\pm\int\frac{dp}{\rho a}\right)=\pm(\gamma-1)\frac{F}{a}\mp\frac{\nu a u}{x},\quad \frac{d_{1,2}x}{dt}=u\pm a,$$

$$\frac{d_3}{dt}\left(p-\int a^2\,d\rho\right)=\rho(\gamma-1)F,\quad \frac{d_3}{dt}e_{\text{к}}=I-F,\quad \frac{d_3x}{dt}=u.$$

Решение будем искать в виде $u=u'(x,\ t)$, $p=p^0(t)+p'(x,\ t)$, ... (штрихом отмечены возмущения параметров газа). Волну возмущения примем достаточно короткой, так что в возмущенной зоне выполнены те же соотношения, что и на слабой УВ [12, 13]:

(4) $$p'=\rho^0a^0u',\quad a^0\rho'=\rho^0u',\quad e_{\text{к}}'=0.$$

Физический смысл приближения (4) состоит в том, что при прохождении короткой волны можно пренебречь влиянием порожденных ею отраженных волн — акустической второго семейства, энтропийной и волной, связанной с возбуждением внутренних степеней свободы. Действительно, амплитуды отраженных волн пропорциональны временам прохождения ими возмущенной зоны, т. е. величинам $\lambda/2a^0$ и $\lambda/a^0$ соответственно ($\lambda$ — длина волны). Линеаризуя уравнения (3), нетрудно оценить поправки порядка $\lambda$ к формулам (4) и связанные с этими поправками члены порядка $\lambda$ в первом уравнении системы (3) при выборе в нем верхнего знака (см. [14]). Требование малости поправок, связанных с учетом конечности $\lambda$ по сравнению с членами, не содержащими $\lambda$, приводит к системе неравенств, которую можно рассматривать как критерий «короткости» волны.

Опуская верхний индекс нуль, получим

$$(5)\qquad \left|\left[\frac{\gamma-2}{2}F+\gamma\omega\left(e_{\text{к}}^{*}-e_{\text{к}}\right)-\frac{\nu a^{3}}{x(\gamma-1)}\right]\left[(\gamma-1)\varkappa I-\frac{\gamma-2}{2}F+A\right]\frac{\gamma}{a^{2}}+\right.$$

$$\left.+\,\omega\left(A-\frac{\gamma-2}{2}F\right)\right|\ll\frac{a}{\lambda}\left|A+\frac{\nu a^{3}}{x(\gamma-1)}\right|,\quad \left|\frac{\gamma-1}{a^{2}}A+\frac{\nu a}{x}\right|\ll\frac{4a}{\lambda},$$

$$\left|\frac{\gamma}{2}F+A\right|\ll\frac{a^{3}}{\gamma\lambda},$$

$$A(t)=\omega\left\{\left(e_{\text{к}}^{*}-e_{\text{к}}\right)\left[\gamma+(\gamma-1)\frac{k_{2}}{3T^{1/3}}\right]+\gamma(\gamma-1)\left(\frac{e_{\text{к}}^{*}}{a}\right)^{2}\exp\frac{\theta_{\text{к}}}{T}\right\}+\frac{\gamma-2}{2}F.$$

Подставляя (4) в первое уравнение (3) при выборе в нем верхнего знака и интегрируя, имеем

$$(6)\qquad u'(x_0,t)=u_0'(x_0)\left(\frac{x_0}{x^0}\right)^{\nu/2}\varphi(t),\quad x^0(x_0,t)=x_0+\int_0^t a^0(\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi(t)=\exp\left(-\int_0^t\frac{\gamma-1}{2a^{02}}A(\xi)\,d\xi\right).$$

Решение записано в параметрической форме; $x^0(x_0,\ t)$— уравнение акустических характеристик первого семейства, соответствующих фону; $u_0'(x_0)=u'(x_0,0)$. Скорость газа в волне $u'$ остается малой при условии $\varphi(t)(x_0/x^0)^{\nu/2}\sim 1$. Если выполняется неравенство $A(t)\geqslant 0$ $(t>0)$, возмущения не нарастают. Это неравенство, являющееся ограничением на параметры фона, можно считать достаточным условием устойчивости исходного состояния газа по отношению к возмущениям рассматриваемого типа. Величина $dt/d\varphi$ имеет смысл характерного времени затухания плоской волны.

Учтем нелинейные эффекты, возникающие при распространении волны, сохранив в уравнении акустических характеристик члены первого порядка малости:

$$(7)\qquad dx/dt=a^0+(\gamma+1)u'/2.$$

Подставляя (6) в (7) и интегрируя, получим

$$(8)\qquad x(x_0,t)=x_0+\int_0^t a^0(\xi)\,d\xi+u_0'(x_0)\,\mathrm{X}(x_0,t),$$

$$\mathrm{X}=\frac{\gamma+1}{2}\int_0^t\left(\frac{x_0}{x^0(x_0,\xi)}\right)^{\nu/2}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Уравнение огибающей семейства характеристик (8) $\partial x/\partial x_0=0$ может быть записано в виде

$$(9)\qquad 1+\left(du_0'/dx_0\right)\mathrm{X}(x_0,t)=0$$

(в случае цилиндрической волны предполагалось, что характерная длина волны много меньше расстояния от фронта волны до оси симметрии). Минимальное значение $t$, удовлетворяющее (9), отвечает моменту возникновения УВ, а соответствующее значение $x_0$ — начальной точке характеристики, на которой образуется УВ.

Как показано в [5—7], не во всех случаях возмущение сжатия, распространяющееся в колебательно-неравновесном газе, образует УВ. Действительно, если интеграл X, введенный в (8), сходится при $t\to\infty$, то для образования УВ необходимо, чтобы начальный профиль $u_0'(x_0)$

содержал участки значительного убывания:

$$\frac{du_0'}{dx_0} < -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathrm{X}}. \tag{10}$$

Если начальный профиль не имеет таких участков, то УВ не возникает. В случае, когда интеграл X расходится при $t \to \infty$, любая волна сжатия порождает УВ.

Следует подчеркнуть, что, задав наперед произвольным образом поведение функции $\mathrm{X}(t)$ или $\varphi(t)$), всегда можно подобрать отвечающую этому поведению мощность внешнего излучения $I = I(t)$. Действительно, задание функции $A(t)$, через которую выражаются X и $\varphi$, с учетом уравнений (3) приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $p^0(t)$ и интеграла от $I(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности.

Траекторию УВ в различные моменты времени будут пересекать различные характеристики. Совокупность их начальных точек $x_0$ можно рассматривать как лагранжеву систему координат, связанную с характеристиками. Если для каждого $t$ указать начальную точку $x_0$ характеристики, пересекающей в этот момент времени траекторию УВ, получится закон движения УВ $x_0(t)$ в системе координат, связанной с характеристиками. Подстановка вместо $x_0$ закона $x_0 = x_0(t)$ в (6) и (7) позволяет найти текущую амплитуду разрыва $[u'](t)$ и закон его движения $x = x_s(t)$. Зависимость $x_0(t)$ выводится из уравнения

$$(\partial x/\partial x_0)/(dx_0/dt) + \partial x/\partial t = D. \tag{11}$$

Здесь $D$ — скорость УВ, равная полусумме характеристических скоростей за и перед разрывом [15]; $\partial x/\partial t$ определяется равенством (7), а $\partial x/\partial x_0$ — равенством (8). Подставляя в (11) выражения для $D$, $\partial x/\partial t$ и $\partial x/\partial x_0$ и умножая на $u_0'(x_0)$, получим с принятой точностью уравнение в полных дифференциалах, решение которого имеет вид

$$2\int_{x_0}^{x_{02}} u_0'(\xi)\,d\xi = \mathrm{X}(x_0, t)\,u_0'^2(x_0). \tag{12}$$

Равенство (12) есть в неявной форме закон движения УВ $x_0(t)$ в системе координат, связанной с характеристиками; $x_{02} = x_0(0)$. Конкретный вид функции $x_0(t)$ можно найти, задав в начальный момент времени форму профиля возмущения $u_0'(x_0)$, на которую в (12) не накладывается никаких ограничений.

Для примера рассмотрим возмущение, имеющее при $t = 0$ треугольный профиль: $u_0' = k(x_0 - x_{01})$, $x_0 \leqslant x_{02}$, $k = \mathrm{const}$ (рис. 1), в точке $x_{02}$ находится разрыв с амплитудой $u_0'(x_{02})$. В случае $\nu = 1$ предположим, что длина волны $x_{02} - x_{01}$ много меньше расстояния до оси симметрии $x_{01}$, так что в множителе $(x_0/x^0)^{\nu/2}$, входящем в (6) и (8), можно не учитывать зависимость $x_0$ от $t$, полагая $x_0 = x_{02}$ (или $x_0 = x_{01}$), тогда $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t)$. Находя из (12) функцию $x_0(t)$ и подставляя ее в (6) и (8), получим

$$x_s(t) = x_{01} + \int_0^t a^0(\xi)\,d\xi + \frac{x_{02} - x_{01}}{\sqrt{1 + k\mathrm{X}(t)}} + \frac{u_0'(x_{02})\,\mathrm{X}(t)}{\sqrt{1 + k\mathrm{X}(t)}}\left[1 + O(u_0')\right]; \tag{13}$$

$$[u'](t) = \left(\frac{x_{02}}{x_s}\right)^{\nu/2} \frac{u_0'(x_{02})\,\varphi(t)}{\sqrt{1 + k\mathrm{X}(t)}}\left[1 + O(u_0')\right]. \tag{14}$$

Из (12)—(14) видно, что сходимость интеграла X при $t \to \infty$ играет решающую роль. Пусть в начальный момент времени $u_0'(x_0) > 0$ при $x_{01} < x_0 < x_{02}$ и $u_0'(x_{01}) = 0$. Если интеграл X сходится, то, согласно (12), $x_0(t) \to x_{0*} > x_{01}$ при $t \to \infty$. Это означает, что траектория УВ имеет асимптотой характеристику, начинающуюся в точке $x_{0*}$. Асимпто-

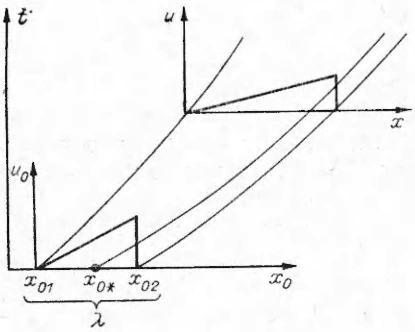


Рис. 1

тический (при $t \to \infty$) закон затухания УВ дает формула (6) после замены в ее правой части $x_0$ на $x_{0*}$. Таким образом, при больших $t$ УВ с точностью до постоянного множителя ведет себя как акустическая (линейная) волна. Конкретное значение $x_{0*}$ можно получить предельным переходом $t \to \infty$ из равенства (12). Для треугольного профиля

$$x_{0*} = x_{01} + (x_{02} - x_{01}) / \sqrt{1 + k\mathrm{X}(\infty)}. \tag{15}$$

Если же при $t \to \infty$ интеграл X расходится, то никакая характеристика не может служить асимптотой для траектории УВ, причем закон затухания УВ качественно отличается от акустического (6). Длина профиля возмущения, примыкающего к разрыву, неограниченно возрастает, поэтому формулы (4)—(15) применимы в этом случае при не слишком больших $t$.

С помощью развитой выше теории можно описывать эволюцию плоской периодической волны, если ее полупериод $\lambda$ удовлетворяет системе (5). Заметим, что длина полупериода такой волны не меняется [16], тогда как длина уединенной волны со временем растет. Если при $t = 0$ выполнено (10), то в дальнейшем в периодической волне образуются разрывы — волна приобретает пилообразную форму. В этом случае закон движения УВ в системе координат, связанной с характеристиками $x_0(t)$, определяется из равенства $x_{02} - x_0 = u_0'(x_0)\,\mathrm{X}(t)$. В результате вместо (13), (14) будет

$$x_s(t) = x_{02} + \int_0^t a^0(\xi)\,d\xi, \quad [u'](t) = \frac{u_0'(x_{02})\,\varphi(t)}{1 + k\mathrm{X}(t)}. \tag{16}$$

Рассмотрим конкретные задачи, для которых благодаря некоторым упрощениям удается проинтегрировать систему уравнений для параметров фона (3) и найти поведение интеграла X при $t \to \infty$.

а) Пусть $I = I_0 = \mathrm{const}$. После подстановки второго соотношения (3) в первое получается нелинейное дифференциальное уравнение относительно $p$, асимптотика решения которого при $t \to \infty$ имеет вид

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho\left(I_0 t + e_{\text{к}_0} + \frac{R\theta_{\text{к}}}{2} + \frac{p_0}{\rho(\gamma - 1)} + O\left(\frac{1}{t}\right)\right). \tag{17}$$

Используя (16), из (2) и (3) найдем

$$\omega \sim k_1 \rho I_0 ((\gamma - 1)/\gamma)\, t, \quad e_{\text{к}}^* - e_{\text{к}} \sim O(1/t),$$

т. е. характерное время релаксации убывает при $t \to \infty$ как $1/t$, за счет чего газ стремится к равновесию, причем $e_{\text{к}}^* - e_{\text{к}}$ убывает быстрее, чем $1/t$. Для функции $\varphi(t)$, описывающей поведение слабых возмущений в линейном приближении, получим асимптотику

$$\varphi(t) \sim \exp\left[-\frac{(\gamma - 1)^2}{2\gamma^2} k_1 \rho \left(I_0 \frac{t^2}{2} - \frac{3}{5}\left(\frac{\gamma R I_0^2}{\gamma - 1}\right)^{1/3} t^{5/3} + O\left(t^{4/3}\right)\right)\right], \tag{18}$$

что существенно отличается от равновесного случая $I = 0$, когда $\varphi(t) \sim \exp(-t \cdot \mathrm{const})$, $t \to \infty$. В соответствии с (18) интеграл X, определяющий качественный характер поведения нелинейных возмущений, сходится при $t \to \infty$ как для плоских, так и для цилиндрических волн.

б) Рассмотрим поведение слабых возмущений в газе, у которого колебательные степени свободы приведены в возбужденное состояние $\left(e_{\text{к}_0} - e_{\text{к}_0}^*\right)$, а внешнее излучение отсутствует ($I = 0$). В дальнейшем, за счет релаксации, давление и поступательная температура растут, колебательная энергия уменьшается. Предположим, что $T$ достаточно велика, $\theta_к/T$ мало и в первом приближении можно считать $e_к^* = p/\rho$. Такое приближение применимо для ряда двухатомных газов при больших давлениях, когда значительно различие между характеристической колебательной температурой $\theta_к$ и температурой, при которой существенны процессы диссоциации [11]. Можно пренебречь зависимостью $\omega$ от $T^{1/3}$, считая $\omega = k_3 T$, $k_3 = \mathrm{const}$, если диапазон изменения $T$ не слишком велик. С учетом сделанных предположений система (3) интегрируется:

$$(19)\qquad p(t) = p_0 \frac{1+\delta}{1+\delta\exp(-\alpha t)},\quad \alpha = k_1 p_0 \gamma (1+\delta),\quad \delta = \frac{(\gamma-1)\left(e_{к_0} - e^*_{к_0}\right)}{\gamma e^*_{к_0}}.$$

Подставляя (19) в (6), имеем

$$(20)\qquad \varphi(t) = \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2 + \frac{3\gamma^2-2\gamma+2}{4\gamma^2}\ln\left(\frac{1+\delta}{1+\delta\exp(-\alpha t)}\right)\right).$$

Первый сомножитель в (20) является возрастающей функцией времени, второй — убывающей. Функция $\varphi(t)$ убывает со временем, если $\delta \leqslant \delta_m = \dfrac{2(\gamma-1)^2}{\gamma(\gamma+2)}$, при $\delta > \delta_m$ она возрастает до момента $t = t_m$, определяемого равенством $t_m = \dfrac{1}{\gamma(1+\delta)\omega_0}\ln\left(\delta\dfrac{\gamma(\gamma+2)}{2(\gamma-1)^2}\right)$, а затем убывает и при $t \to \infty$ стремится к нулю. На возможность усиления гармонических волн, распространяющихся в однородном газе с фиксированными параметрами, неравновесность которого поддерживается на постоянном уровне за счет сбалансированной накачки энергии во внутренние степени свободы и теплоотвода, указано в [1—4].

Подставляя значение $t_m$ в (20) и раскладывая $\varphi(t_m)$ в ряд по малому параметру $(\gamma-1)^2/(2\gamma^2)$, получим

$$(21)\qquad \varphi(t_m) = 1 + \left(\frac{\delta}{\delta_m} - 1\right)\frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2} + O\left(\frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2}\right).$$

Требование малости второго слагаемого в правой части (21) по сравнению с единицей можно рассматривать как критерий линейной устойчивости состояния колебательно-возбужденного газа по отношению к акустическим возмущениям. Этот критерий гласит, что исходная относительная неравновесность должна быть малой:

$$\frac{e_{к_0} - e^*_{к_0}}{e^*_{к_0}} \ll \frac{4\gamma^2}{(\gamma-1)(2+\gamma)}\left[1 + O\left(\frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2}\right)\right].$$

Для нелинейных возмущений с УВ интеграл X, согласно (20), сходится и для плоских, и для цилиндрических волн, поэтому траектория УВ имеет своей асимптотой характеристику, длина профиля возмущения, примыкающего к разрыву, ограничена при $t \to \infty$. Подчеркнем, что рост возмущений приводит к усилению нелинейных эффектов и быстрому образованию УВ, после чего для описания эволюции возмущения необходимо привлекать нелинейную теорию. Например, если в линейной постановке амплитуда плоской волны растет пропорционально $t$ ($\varphi(t) \sim t$ при $t > 0$), то в нелинейной теории, согласно (14), амплитуда плоской волны с треугольным профилем остается малой, а амплитуда пилообразной волны, согласно (16), затухает как $1/t$.

Рассмотрим теперь плоские стационарные сверхзвуковые течения газа, допускающего возбуждение колебательных степеней свободы, мало отличающиеся от одномерных. Такие течения могут возникать, например, при обтекании с умеренно сверхзвуковой скоростью тонких тел под малым углом атаки или небольших неровностей стенок каналов. Координаты $x$, $y$ выберем так, чтобы направление оси $x$ совпадало с направлением невозмущенного течения. Будем предполагать, что на некотором интервале $x_1 < x < x_2$ поток газа подсвечивается внешним излучением интенсивности $I(x)$, $I(x) = 0$ при $x \notin (x_1, x_2)$. Систему уравнений, описывающую сверхзвуковое плоское течение колебательно-релаксирующего газа, запишем в характеристической форме

$$(22)\quad v\frac{d_\pm u}{dx} - u\frac{d_\pm v}{dx} \mp \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}{\rho}\frac{d_\pm p}{dx} = \frac{F(\gamma-1)}{u^2-a^2}\left(\mp u\sqrt{\mathrm{M}^2-1} - v\right),$$

$$\frac{d_\pm y}{dx} = \frac{uv \pm a^2\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}{u^2-a^2}, \quad \frac{d_0}{dx}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{d_0 p}{dx} = 0,$$

$$\frac{d_0 p}{dx} - a^2\frac{d_0\rho}{dx} = (\gamma-1)\frac{\rho F}{u}, \quad u\frac{d_0 e_{\text{к}}}{dx} = I - F, \quad \frac{d_0 y}{dx} = \frac{v}{u}$$

($u$ и $v$ — проекции скорости на оси $x$ и $y$, М — местное число Маха; в отсутствие возмущений $v \equiv 0$). Первое уравнение системы (22) записано вдоль акустической характеристики первого или второго семейства, описываемой вторым уравнением (верхний знак соответствует характеристике первого семейства, а нижний — второго), следующие три уравнения записаны вдоль линий тока, подчиняющихся последнему уравнению.

Рассмотрим линейную задачу о стационарном возмущении сверхзвукового потока, сосредоточенном в узкой зоне ширины $\lambda$ между двумя акустическими характеристиками первого семейства. Если $\lambda$ достаточно мала, то возмущения подчиняются тем же соотношениям, что и на слабой косой УВ [17]:

$$(23)\quad u' + v/\sqrt{\mathrm{M}^{02}-1} = 0, \quad \rho^0 u^0 u' + p' = 0, \quad p' - a^{02}\rho' = 0, \quad e'_{\text{к}} = 0$$

($v' \equiv v$, так как $v^0 = 0$). В линейном приближении фронт волны совпадает с характеристикой акустического семейства. Смысл приближения коротких волн состоит в том, что невязки в равенствах (23) пропорциональны заключенным в возмущенной зоне отрезкам характеристик системы (22) (акустической второго семейства и линии тока), т. е. невязки пропорциональны $\lambda$ и малы, если $\lambda$ достаточно мала.

Линеаризуя первое уравнение системы (22) при выборе в нем верхнего знака и подставляя в него (23), получим линейное дифференциальное уравнение, решение которого представимо в параметрическом виде, аналогичном (6):

$$(24)\quad u'(x, y_0) = u'_0(y_0)\exp\left(-\int_0^x \frac{\gamma-1}{2a^{02}(\xi)}A_*(\xi)\,d\xi\right) \equiv u'_0(y_0)\,\varphi_*(x),$$

$$y = y^0(x, y_0) = y_0 + \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\mathrm{M}^{02}(\xi)-1}}, \quad y^0(0, y_0) \equiv y_0,$$

$$A_*(x) = \frac{\omega^0\mathrm{M}^0}{a^0\left(\mathrm{M}^{02}-1\right)}\left(\left(e_{\text{к}}^{*0} - e_{\text{к}}^0\right)\left[\frac{3\left(\gamma\mathrm{M}^{02}+1\right)}{2\left(\mathrm{M}^{02}-1\right)} + \frac{k_2(\gamma-1)}{3T^{01/3}}\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma(\gamma-1)\left(\frac{e_{\text{к}}^{*0}}{a^0}\right)^2\exp\frac{\theta_{\text{к}}}{T} - \frac{\varkappa I\left(\gamma\mathrm{M}^{02}+2\gamma+3\right)}{2\omega^0\left(\mathrm{M}^{02}-1\right)}\right).$$

Здесь и далее индексом нуль внизу отмечены значения параметров при $x = 0$. Акустические характеристики первого семейства, на которых $u'_0 \neq 0$, проходят через точки отрезка $[y_{01}, y_{02}]$ оси $y$.

В (24) функции $\mathrm{M}^0(x)$ и $A_*(x)$ выражаются через параметры невозмущенного течения, которые определяются соотношениями

$$(25)\quad \rho^0 u^0 = \rho_0 u_0, \quad p^0 + \rho^0 u^{02} = p_0 + \rho_0 u_0^2, \quad u^0\frac{de_{\text{к}}^0}{dx} = (1-\varkappa)I + \omega^0\left(e_{\text{к}}^{*0} - e_{\text{к}}^0\right),$$

$$\left(e_{\text{к}}^{0}-e_{\text{к}_0}\right)+\frac{1}{2}\left(u^{02}-u_0^2\right)+\frac{a^{02}-a_0^2}{\gamma-1}=\int\limits_0^x\frac{I(\xi)\,d\xi}{u^0(\xi)}.$$

Заменой $u^0 = u_0(1 + \Delta)$ система (25) сводится к уравнению

$$\frac{d\Delta}{dx}=\frac{(\gamma-1)\,\omega^0(\Delta)\left(e_{\text{к}}^{\prime 0}(\Delta)-e_{\text{к}}^{0}(\Delta)\right)-\varkappa I}{a_0^2u^0(\Delta)\left(\mathrm{M}_{\zeta}^2+\mathrm{M}_0^2(\gamma+1)\Delta-1\right)}. \tag{26}$$

При обращении в нуль знаменателя в правой части (26) текущее значение числа Маха $\mathrm{M}^0(x)$ невозмущенного потока становится равным единице. Будем считать течение всюду сверхзвуковым ($\mathrm{M}^0(x) > 1$), соответственно $\Delta > -\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)/\left((\gamma+1)\mathrm{M}_0^2\right)$, то отвечает не слишком большим значениям энергии, подводимой к газу на интервале $(x_1, x_2)$, и выполняется во всех практически интересных случаях. Учитывая в уравнении акустических характеристик члены первого порядка малости, имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}^{02}-1}}-\frac{\mathrm{M}^{03}(\gamma+1)}{2a^0\left(\mathrm{M}^{02}-1\right)^{3/2}}u'(x, y_0). \tag{27}$$

После подстановки в (27) соотношений (23) и интегрирования получим

$$y(x, y_0)=y^0(x, y_0)+u_0'(y_0)\,\mathrm{X}_*(x),\quad \mathrm{X}_*(x)=-\frac{\gamma+1}{2}\int\limits_0^x\frac{\mathrm{M}^{03}(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi}{a^0(\xi)\left(\mathrm{M}^{02}(\xi)-1\right)^{3/2}}. \tag{28}$$

Ударная волна возникает в точке пересечения характеристик (28), которая определяется условием $\partial y/\partial y_0 = 0$, что с учетом (28) можно переписать подобно (9):

$$1+\left(du_0'/dy_0\right)\mathrm{X}_*(x)=0. \tag{29}$$

Поскольку газ подвергается излучению лишь при $x_1 < x < x_2$, то с увеличением $x$ состояние газа приближается к равновесному, функция $\varphi_*$ убывает при $x \to \infty$ по экспоненциальному закону, а интеграл X сходится. В связи с этим, согласно (29), стационарное возмущение, накладываемое на сверхзвуковой поток, содержит УВ лишь тогда, когда профиль начального возмущения $u_0'(y_0)$ имеет участки значительного возрастания:

$$\frac{du_0'}{dy_0}>-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{X}_*}>0. \tag{30}$$

Если (30) не выполнено, УВ отсутствуют. Это, в частности, означает, что обтекание вогнутой стенки достаточно малой кривизны сверхзвуковым потоком колебательно-релаксирующего газа происходит без образования УВ (рис. 2).

Зависимость амплитуды УВ от $x$ находится так же, как в нестационарном случае. Именно, уравнение УВ $y_0 = y_0(x)$ в лагранжевой системе координат $y_0$, связанной с характеристиками первого семейства, можно получить из уравнения, аналогичного (11):

$$(\partial y/\partial y_0)(dy_0/dx)+\partial y/\partial x=D_* \tag{31}$$

($\partial y/\partial x$ и $\partial y/\partial y_0$ определяются из (28), $D_*$ — полусумма характеристических скоростей за и перед разрывом). Умножим (31) на $u_0'(y_0)$ и проинтегрируем:

$$2\int\limits_{y_0}^{y_{02}}u_0'(\xi)\,d\xi=\mathrm{X}_*(x)\,u_0'^2(y_0). \tag{32}$$

При выводе (32) предполагалось, что перед УВ возмущения равны нулю: $u_0' = 0$ при $y_0 > y_{02}$ ($y_{02}$ — координата УВ при $x = 0$). Разрешая (32)

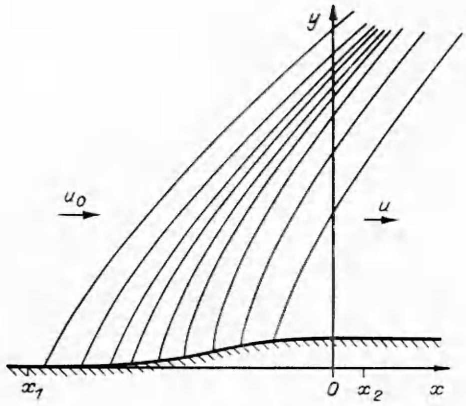


Рис. 2

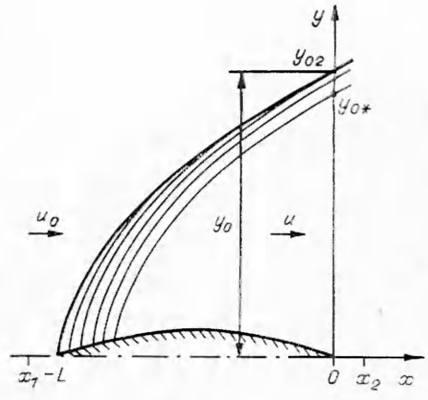


Рис. 3

относительно $y_0$ и подставляя результат вместо $y_0$ в (28) и в первое равенство (24), получим уравнение УВ $y_s(x) = y(x,\ y_0(x))$ и закон изменения ее амплитуды $[u'](x) = u_0'(y_0(x))\,\varphi_*(x)$. Поскольку интеграл $X_*$ сходится при $x \to \infty$, то, согласно (32), УВ имеет своей асимптотой акустическую характеристику первого семейства, начальную точку которой $y_{0*} = y_0(\infty) < y_{02}$ можно определить из (32) предельным переходом $x \to \infty$, задав предварительно начальную форму профиля возмущений $u_0'(y_0)$.

Рассмотрим стационарное сверхзвуковое обтекание тонкого контура, симметричного относительно оси $x$, в начальной точке которого имеется присоединенная УВ, а возмущения, вносимые контуром в поток, линейны по $y_0$: $u_0'(y_0) = k_* y_0$, $y_0 \leqslant y_{02}$ (рис. 3). Разрешая (32) относительно $y^0$ и подставляя полученную функцию $y_0(x)$ в (24), (28), имеем

$$(33)\qquad [u'](x) = \frac{u_0'(y_{02})\,\varphi_*(x)}{\sqrt{1 + k_* X_*(x)}},\quad y_s(x) = y^0(x,\ y_{02}) + \frac{u_0'(y_{02})\,X_*(x)}{\sqrt{1 + k_* X_*(x)}}.$$

Возьмем в качестве примера частный случай, когда $I \equiv 0$ при $x > -L$ в сечении $x = -L$, колебательные степени свободы возбуждены, температура и давление газа достаточно велики, так что в первом приближении можно принять $e_k^* = p/\rho$, $\omega = k_3 p$. Тогда, произведя в (24) замену переменной интегрирования с помощью (26), получим

$$\ln \varphi_* = -\frac{M_0^2}{2}\int\limits_0^{\Delta}\left(\frac{3\left(\gamma M_0^2 + 1\right) d\xi}{2\left(M_0^2 - 1 + (\gamma + 1) M_0^2 \xi\right)\left(1 - \gamma M_0^2 \xi\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\gamma - 1)^2 (1 + \xi)\, d\xi}{\xi\left(2\gamma - 1 - \gamma^2 M_0^2 - \dfrac{3\gamma - 1}{2}\gamma M_0^2 \xi\right) - \gamma\delta}\right).$$

Если $\delta \leqslant \delta_m^* = 2(\gamma - 1)^2\left(M_0^2 - 1\right)/\left(3\gamma^2 M_0^2 + 3\gamma\right)$, то $\varphi_*$ убывает с увеличением $x$, если же $\delta > \delta_m^*$, то $\varphi_*$ возрастает до значения $\varphi_{*m}$, а затем начинает убывать. В этом случае

$$(34)\qquad \varphi_{*m} = 1 + \left(\frac{\delta}{\delta_m} - 1\right)\frac{(\gamma - 1)^2 M_0^2}{2\left(\gamma^2 M_0^2 + 1 - 2\gamma\right)} + O\left((\gamma - 1)^4\right).$$

Малость второго слагаемого в (34) по сравнению с первым можно рассматривать как критерий линейной устойчивости.

Заметим, что возмущение, содержащее разрывы и растущее с точки зрения линейной теории, может в нелинейном приближении оказаться затухающим. Например, при $\varphi_* \sim x$ амплитуда УВ, согласно (33), остается малой.

Авторы выражают благодарность В. А. Левину за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Bauer H. I., Bass H. E.** Sound amplification from controlled exitation reactions / Phys. Fluids.— 1973.— V. 16, N 7.
2. **Srinivasan I., Vincenti W. G.** Criteria for acoustic instability in a gas with ambient vibrational and radiative nonequilibrium // Phys. Fluids.— 1975.— V. 18, N 12.
3. **Коган Е. Я., Мальнев В. Н.** Распространение звука в колебательно-возбужденном газе // ЖТФ.— 1977.— Т. 47, № 3.
4. **Осипов А. И., Уваров А. В.** Распространение звука в колебательно-неравновесном газе // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия.— 1984.— Т. 25, № 6.
5. **Кириллов И. А., Русанов В. Д., Фридман А. А.** Формирование ударных волн в потоке колебательно-неравновесного газа // ЖХФ.— 1985.— Т. 4, № 1.
6. **Богданов А. Н.** Асимптотические законы распространения слабых нелинейных волн в релаксирующем газе при воздействии внешнего излучения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1985.— № 6.
7. **Осипов А. И., Уваров А. В.** Распространение нелинейных гидродинамических возмущений в колебательно-неравновесном газе // ЖХФ.— 1987.— Т. 6, № 3.
8. **Веденов А. А., Дробязко С. В., Книжников В. Н., Турундаевский В. Б.** Влияние акустических волн, возникающих в разрядном промежутке, на работу импульсного $CO_2$-лазера в частотном режиме // ТВТ.— 1975.— Т. 13, вып. 2.
9. **Русанов В. Д., Фридман А. А., Шолин Г. В.** Физика химически активной плазмы с неравновесным колебательным возбуждением молекул // УФН.— 1981.— Т. 134, вып. 2.
10. **Коган Е. Я., Молевич Н. Е.** Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе // ЖТФ.— 1986.— Т. 56, вып. 5.
11. **Неравновесные** физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
12. **Губкин К. Е.** Распространение разрывов в звуковых волнах // ПММ.— 1958.— Т. 22, вып. 2.
13. **Рыжов О. С.** Затухание ударных волн в неоднородных средах // ПМТФ.— 1961.— № 2.
14. **Куликовский В. А.** Асимптотические законы затухания слабых непрерывных и ударных волн в запыленном газе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
15. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws. II // Communs Pure Appl. Math.— 1957.— V. 10, N 4.
16. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
17. **Рыжов О. С.** Затухание ударных волн в стационарных течениях // ПМТФ.— 1961.— № 6.



*г. Москва* *Поступила 26/I 1989 г., в окончательном варианте — 18/IV 1989 г.*


---


УДК 534.232



*И. А. Зайцева, А. А. Золотарев*


# РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В СЛОЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПЛОСКИМ ИСТОЧНИКОМ


Для исследования процессов возбуждения акустических волн «непрозрачными» источниками, как правило, используются модели поршня в экране (например, [1—3]). Это существенно упрощает математические проблемы, но на основе этих моделей представляется затруднительным описание эффектов, связанных с переотражениями волн в слоистых волноводах.

Настоящая работа посвящена развитию методики факторизации в приложении к решению начально-краевых задач для сжимаемой жидкости с заглубленным плоским «непрозрачным» источником. В отличие от [4, 5] исследуется пространственно-временная структура волновых полей в слое на основе численно-аналитического подхода. Выводится асимптотическое представление решения для нестационарных режимов излучения волн, изучается процесс установления гармонических колебаний.


Рассматривается задача о возбуждении волновых полей в слое сжимаемой жидкости плоским источником с заданным нестационарным законом колебаний

$$(1)\qquad \nabla^2\varphi_\pm = \partial^2\varphi_\pm/\partial t^2,\ -\infty < x_1,\ x_2 < \infty\ (\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R_2),$$

$$p_\pm = -\partial\varphi_\pm/\partial t,\quad w_\pm = \partial\varphi_\pm/\partial z,\quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial z^2;$$

$$(2)\qquad z = 1\ \partial\varphi_+/\partial t = 0,$$