$$
+\sum_{j,k}\left\{\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k}+\frac{\partial v^k}{\partial x^j}-\frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^j}{\partial x^j}\right)^2+\frac{\zeta}{T}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^j}\right)^2\right\}.
$$

В настоящее время нельзя уверенно утверждать, какой из двух вариантов построения двухскоростных диссипативных уравнений правилен (но все же вариант (4.1)—(4.4) кажется более естественным). Для окончательного выбора нужны дополнительные аргументы. В конечном счете необходимо корректное обобщение принципа Онсагера на двухскоростные системы. Но для этого нужно ясно осознать, что здесь имеется проблема, и ее выявление есть одна из основных целей настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шугрин С.М.** Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // ПМТФ. — 1994. — № 4.
2. **Шугрин С.М.** Законы сохранения, инвариантность и уравнения газовой динамики // ПМТФ. — 1989. — № 2.
3. **Сокольников И.С.** Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971.
4. **Годунов С.К.** Интересный класс квазилинейных систем // ДАН СССР. — 1961. — № 3.
5. **Шугрин С.М.** Об уравнениях диссипативной лоренцевой гидродинамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — № 96.
6. **Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.** Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

г. Новосибирск *Поступила 16/VII 1993 г., в окончательном варианте — 20/IX 1993 г.*

УДК 532.2

Ю.Г. Губарев

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

В аналитической механике широко известны теоремы Ляпунова и Четаева (обращения теоремы Лагранжа) [1, 2], состоящие в доказательстве неустойчивости положения равновесия механической системы при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии. Путь обобщения этих теорем на системы, содержащие твердые тела и жидкость, был предложен Румянцевым [3, 4]. Этот подход получил дальнейшее развитие в работах [5—10], где при помощи вириального функционала Ляпунова [3, 11] доказана неустойчивость ряда равновесий жидкостей.

В настоящей работе рассматривается пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике самогравитирующей жидкости. Изучается задача устойчивости состояний равновесия (покоя) безграничной самогравитирующей сжимаемой среды [12—14]. Прямым методом Ляпунова доказано, что система неустойчива, если существуют малые возмущения плотности, уменьшающие потенциальную энергию. В линейном приближении получены двусторонние оценки роста возмущений. Оценка снизу гарантирует экспоненциальное увеличение энергии гравитационного поля. Оценка сверху показывает, что возмущения возрастают не быстрее, чем экспоненциально. Показатели экспонент в обоих случаях вычисляются по параметрам состояний равновесия и начальным данным для полей возмущений. В силу соотношений точной задачи получена оценка снизу, свидетельствующая о среднеквадратичном росте возмущений плотности и/или потенциала скорости.

Следует отметить, что с математической точки зрения найденные оценки имеют априорный характер, поскольку соответствующие теоремы существования решений не доказаны.

1. Введение. Идею о том, что наблюдаемая структурированность вещества во Вселенной обусловлена гравитационным взаимодействием, высказывал еще Ньютон [15]. Однако современную математическую формулировку эта гипотеза впервые получила только в работах Джинса [12, 13], который рассмотрел линейную задачу устойчивости состояний покоя безграничной самогравитирующей сжимаемой среды с невозмущенной плотностью $\rho_\infty = \mathrm{const}$. Он показал, что малые возмущения плотности

$$\rho' = b\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)],\ b = \mathrm{const},$$

будут нарастать со временем, если волновые числа $\mathbf{k}$ удовлетворяют условию

$$|\mathbf{k}| < k_*,\ k_* = 4\pi G\rho_\infty c^{-2}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты; ω — частота волны; t — время; c — скорость звука; G — гравитационная постоянная.

В последующие годы исследования проводились в основном в двух направлениях: 1) анализ влияния различных факторов (вращение, магнитное поле, турбулентность) на критерий Джинса (1.1) [16—19]; 2) получение условий устойчивости состояний покоя безграничной самогравитирующей сжимаемой среды относительно одномерных возмущений конечной амплитуды [20—24]. Характерной особенностью работ [16—24] является то, что в них выводы о неустойчивости делаются просто по наличию возмущений, уменьшающих энергию состояний покоя; тем самым авторы принимают справедливость обратной теоремы Лагранжа без каких-либо обоснований.

Основная цель настоящей работы — доказательство неустойчивости состояний равновесия (покоя) безграничной самогравитирующей сжимаемой среды, если выполняется условие обращения теоремы Лагранжа, которое означает отсутствие в этих состояниях равновесия минимума потенциальной энергии.

2. Постановка задачи. Изучаются пространственные адиабатические движения самогравитирующей идеальной сжимаемой жидкости. Используются обозначения: p, ρ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — поля давления, плотности и скорости, $\Phi = \Phi(\mathbf{x},t)$ — потенциал гравитационного поля, γ — показатель адиабаты. Предполагается, что жидкость заполняет все пространство, причем на бесконечности (т.е. при $|\mathbf{x}| \to \infty$) она имеет постоянную плотность и покоится [14]. Движения жидкости описываются решениями системы уравнений [14, 21]

$$\rho D\mathbf{v} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi,\ D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,\ \Delta\Phi = 4\pi G(\rho - \rho_\infty), \tag{2.1}$$

$$D \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla,$$

дополненной термодинамическим соотношением

$$p = a\rho^\gamma,\ a = \mathrm{const},\ \gamma = c_p/c_V > 1 \tag{2.2}$$

и условиями на бесконечности

$$|\mathbf{v}| \to 0,\ |\nabla\Phi| \to 0,\ \rho \to \rho_\infty,\ p \to p_\infty \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{2.3}$$

где c_p и c_V — теплоемкости; ρ_∞, p_∞ — постоянные величины. Начальные данные для (2.1)—(2.3) задаются в виде

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

с очевидными ограничениями на функции $\rho_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. Все используемые функции и их производные, входящие в уравнения движения, термодинамическое соотношение и условия на бесконечности, считаются непрерывными.

Для решений задачи (2.1) — (2.4) имеет место интеграл энергии (интегрирование здесь и далее ведется по всему пространству)

(2.5) $dE_1/dt = 0,\ E_1 = K_1 + \Pi_1 = \text{const},\ 2K_1 = \int \rho v_i v_i d\mathbf{x},\ d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3,$

$$\Pi_1 = \int (p(\gamma - 1)^{-1} + (\rho - \rho_\infty)\Phi/2)\, d\mathbf{x}.$$

Состояния гидростатического равновесия представляют собой решения задачи (2.1)—(2.4) вида

(2.6) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \equiv 0,\ \rho = \rho_0(\mathbf{x}) = \rho_\infty,\ p = p_0(\mathbf{x}) = p_\infty,\ \Phi = \Phi_0(\mathbf{x}) = \Phi_\infty,$

где Φ_∞ — постоянная величина.

3. Условие экстремума. Пусть δv_i, $\delta\rho$, δp и $\delta\Phi$ — вариации полей v_i, ρ, p и Φ соответственно. При помощи последнего уравнения из (2.1) и соотношения (2.2) находятся связи $\delta\rho$ с $\delta\Phi$ и δp:

(3.1) $$\Delta\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho,\ \delta p = \gamma p_\infty \rho_\infty^{-1}\delta\rho.$$

Для первой вариации δE_1, вычисленной на решении (2.6) с учетом (3.1), справедливо представление

(3.2) $$\delta E_1 = \int [(\gamma p_\infty/(\gamma - 1)\rho_\infty + \Phi_\infty/2)\delta\rho]\, d\mathbf{x}.$$

Используя произвольность величины Φ_∞, можно выбрать ее так, чтобы выполнялось соотношение

(3.3) $$\Phi_\infty = -2\gamma p_\infty ((\gamma - 1)\rho_\infty)^{-1}.$$

После этого получается $\delta E_1 = 0$. Ясно, что равенство (3.3) согласуется с (2.6) и с (2.1).

Таким образом, если в качестве Φ_∞ в (3.2) взять величину, удовлетворяющую условию (3.3), то состояния покоя (2.6) являются стационарными точками функционала E_1 (2.5) на классе независимых вариаций δv_i, $\delta\rho$, подчиненных только условиям непрерывности вместе со своими первыми производными.

4. Вторая вариация. Выражение для второй вариации энергии E_1 (2.5) имеет вид

(4.1) $$\delta^2 E_1 = \int [(\rho_\infty/2)\delta v_i \delta v_i + (\gamma/2)p_\infty \rho_\infty^{-2}(\delta\rho)^2 + (\delta\rho/2)\delta\Phi]\, d\mathbf{x}.$$

Замечательным свойством $\delta^2 E_1$ (4.1) является ее сохранение в силу линеаризованной на точном стационарном решении (2.6) задачи (2.1)—(2.4). Это свойство следует из того, что E_1 (2.5) представляет собой интеграл энергии для точной задачи (2.1)—(2.4), а первая вариация δE_1 (3.2) обращается в нуль на (2.6).

5. Линеаризованная задача. В самом деле, линеаризация соотношений (2.1)—(2.3) на решении (2.6) дает

(5.1) $$\rho_\infty \partial v_i'/\partial t = -\partial p'/\partial x_i - \rho_\infty \partial\Phi'/\partial x_i,\ \partial\rho'/\partial t = -\rho_\infty \partial v_i'/\partial x_i,$$

$$\partial^2\Phi'/\partial x_i^2 = 4\pi G\rho',\ p' = \gamma p_\infty \rho'/\rho_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty{:}\ p', \rho', |\nabla\Phi'|, |\mathbf{v}'| \to 0.$$

Здесь $\mathbf{v}'$, ρ', p', Φ' — поля возмущений скорости, плотности, давления, потенциала гравитационного поля. Начальные данные (2.4) в линейном приближении редуцируются к форме

(5.2) $$\rho'(\mathbf{x}, 0) = \rho_0'(\mathbf{x}),\ \mathbf{v}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0'(\mathbf{x}).$$

Ниже штрихи у полей возмущений, отличающие их от полных решений системы уравнений (2.1), опускаются.

Непосредственные вычисления показывают, что для решений задачи (5.1), (5.2) справедлив аналог интеграла энергии

$$dE/dt = 0,\ E = K + \Pi = \mathrm{const}, \tag{5.3}$$
$$2K = \int \rho_\infty v_i v_i d\mathbf{x},\ 2\Pi = \int \rho\,(\Phi + \gamma p_\infty \rho_\infty^{-2} \rho)\ d\mathbf{x}.$$

Сравнение функционала E (5.3) со второй вариацией $\delta^2 E_1$ (4.1) действительно обнаруживает их совпадение, если вариации δv_i, $\delta\rho$, δp и $\delta\Phi$ интерпретировать как бесконечно малые эйлеровы возмущения соответствующих гидродинамических полей.

Далее рассмотрение ограничивается таким классом движений, для которого возмущения состоят только в смещениях жидких частиц из положения равновесия [6]. Наиболее просто этот класс движений описывается с помощью поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ [11]:

$$\partial\xi_i/\partial t = v_i. \tag{5.4}$$

В этом случае соотношения (5.1) переписываются следующим образом:

$$\rho_\infty \partial^2 \xi_i/\partial t^2 = -\partial p/\partial x_i - \rho_\infty \partial\Phi/\partial x_i,\ \rho = -\rho_\infty \partial\xi_i/\partial x_i, \tag{5.5}$$
$$p = -\gamma p_\infty \partial\xi_i/\partial x_i,\ \partial^2\Phi/\partial x_i^2 = -4\pi G \rho_\infty \partial\xi_i/\partial x_i,\ |\mathbf{x}| \to \infty{:}\ |\nabla\Phi|,\ |\xi| \to 0.$$

Начальные данные (5.2) для (5.4), (5.5) принимают вид

$$\xi(\mathbf{x}, 0) = \xi_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \partial\xi(\mathbf{x}, 0)/\partial t = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{5.6}$$

Важно подчеркнуть, что в этом и последующих пунктах принято предположение о том, что используемые интегралы от полей возмущений скорости, плотности и потенциала гравитационного поля, а также интегралы от полей лагранжевых смещений существуют и конечны. Это предположение базируется на гипотезе о непрерывности допускаемых возмущений и на подходящих условиях их убывания на бесконечности.

Ниже доказывается неустойчивость состояний равновесия (2.6) по линейному приближению при отсутствии в них минимума потенциальной энергии П (5.3), выводятся оценки нарастания возмущений и строится пример, иллюстрирующий полученные результаты.

6. Обращение теоремы Лагранжа и функционал Ляпунова. В терминах лагранжевых смещений ξ условие обращения теоремы Лагранжа (т.е. отсутствие минимума потенциальной энергии П (5.3) на решении (2.6)) означает, что существует такое множество Q начальных полей $\xi_0(\mathbf{x})$ (5.6), для которого

$$\Pi = \Pi_* < 0 \text{ при } \xi_0(\mathbf{x}) \in Q. \tag{6.1}$$

Если же $\xi_0(\mathbf{x}) \notin Q$, то неравенство (6.1) может смениться на противоположное, т.е. состояния покоя (2.6) являются бесконечномерными аналогами «седловой» точки функционала П. Смысл требования (6.1) можно пояснить, записав функционал П(5.3) при помощи условий на бесконечности для задачи (5.1), (5.2) в виде суммы

$$\Pi = A_1 + A_2,\ A_1 \equiv -(8\pi G)^{-1} \int (\partial\Phi/\partial x_i)^2\, d\mathbf{x},$$
$$A_2 \equiv \int ((\gamma/2) p_\infty \rho_\infty^{-2} \rho^2)\, d\mathbf{x}.$$

Видно, что условие (6.1) выполняется тогда и только тогда, когда среди начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(\mathbf{x})$ найдутся такие, для которых будет справедливо неравенство $A_2 < |A_1|$.

Для демонстрации неустойчивости вводятся функционалы [6—10]

$$M \equiv \int \rho_\infty \xi_i \xi_i d\mathbf{x},\ M^{\cdot}/2 = W \equiv \int \rho_\infty \xi_i v_i d\mathbf{x}. \tag{6.2}$$

Дифференцирование удвоенного функционала W по времени и последующие преобразования с применением (5.1), (5.3), (5.5), (6.2) дают соотношение

$$(6.3)\qquad M^{\cdot\cdot} = 2W = 4(K - \Pi) = 8K - 4E,$$

которое называется вириальным равенством [11]. Соотношение (6.3) умножается на неопределенный постоянный множитель $-\lambda$ и складывается с (5.3). Полученная связь после простых преобразований приводится к виду [8, 9]

$$(6.4)\qquad E_\lambda^{\cdot} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda K_\lambda,\ E_\lambda = K_\lambda + \Pi_\lambda,\ 2\Pi_\lambda = 2\Pi + \lambda^2 M,$$

$$2K_\lambda = 2K - \lambda M^{\cdot} + \lambda^2 M = \int \rho_\infty(\partial\xi/\partial t - \lambda\xi)^2 d\mathrm{x}.$$

Накладывается ограничение $\lambda > 0$. После этого из (6.4) в силу неотрицательности функционала K_λ следует неравенство $E_\lambda^{\cdot} \leqslant 2\lambda E_\lambda$, интегрирование которого позволяет получить соотношение

$$(6.5)\qquad E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0)\exp(2\lambda t).$$

Важно подчеркнуть, что неравенство (6.5) справедливо для любых решений задачи (5.4)—(5.6) и для любых положительных значений параметра λ. Кроме того, при выводе (6.5) не требуется никаких ограничений на знак функционала П.

Неравенство (6.5) показывает, что величина E_λ меняется со временем монотонно. Это дает возможность использовать ее далее в качестве функционала Ляпунова [1—3].

7. Оценка снизу роста возмущений. Пусть справедливо условие (6.1). Это означает, что в качестве начальных полей лагранжевых смещений можно выбирать такие функции $\xi_0(\mathrm{x})$ (5.6), для которых имеет место неравенство $\Pi(0) < 0$; в качестве начальных полей скорости рассматриваются функции $\mathrm{v}_0(\mathrm{x})$ (5.6) такие, что выполняется соотношение $K(0) < |\Pi(0)|$. Тогда справедливо неравенство

$$(7.1)\qquad E(0) < 0.$$

Согласно определению (6.4), функционал $E_\lambda(0)$ представляет собой полином второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (6.2) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (7.1):

$$(7.2)\qquad E_\lambda(0) = E(0) - (\lambda/2)M^{\cdot}(0) + \lambda^2 M(0).$$

Полагая $\lambda > 0$, при помощи (7.2) можно показать, что на интервале

$$(7.3)\qquad 0 < \lambda < \Lambda_1 = B + C^{1/2},\ B = \frac{\lambda M^{\cdot}(0)}{4M(0)},\ C = B^2 - \frac{E(0)}{M(0)}$$

выполняется соотношение

$$(7.4)\qquad E_\lambda(0) < 0.$$

Из неравенств (6.5), (7.4) вытекает, что с течением времени решения задачи (5.4)—(5.6) растут экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $0 < \delta < \Lambda_1$), то соотношение (6.5) принимает вид

$$(7.5)\qquad E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leqslant E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp\,[2(\Lambda_1 - \delta)t]\,(E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0).$$

В силу определения функционалов K_λ и Π_λ (6.4) имеет место неравенство

$$E_\lambda(t) = K_\lambda(t) + \Pi_\lambda(t) > -(8\pi G)^{-1}\int(\partial\Phi/\partial x_i)^2 d\mathrm{x},$$

которое вместе с (7.5) дает оценку

$$(7.6)\qquad \int(\partial\Phi/\partial x_i)^2 d\mathrm{x} > 8\pi G|E_{\Lambda_1-\delta}(0)|\exp[2(\Lambda_1 - \delta)t].$$

Из (7.6) следует, что параметр Λ_1 (7.3) оценивает инкременты решений задачи (5.4)—(5.6) снизу.

Оценку (7.6) можно улучшить, если рассмотреть такой класс решений задачи (5.4) — (5.6), для которого начальные поля скорости $v_0(x)$ и лагранжевых смещений $\xi_0(x)$ связаны в каждой точке соотношениями

$$v_0(x) = \lambda \xi_0(x). \tag{7.7}$$

Действительно, в этом случае из (6.4), (7.7) вытекает

$$K_\lambda(0) = 0, \; E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0). \tag{7.8}$$

Если $\lambda > 0$, а для полей лагранжевых смещений $\xi_0(x)$ (5.6) выполняется условие (6.1), то, поскольку в силу третьего из соотношений (6.4)

$$2\Pi_\lambda(0) = 2\Pi(0) + \lambda^2 M(0),$$

на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = \left(- \frac{2\Pi(0)}{M(0)} \right)^{1/2} \tag{7.9}$$

имеет место неравенство $\Pi_\lambda(0) < 0$. Полагая $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (с произвольным δ_1 из интервала $0 < \delta_1 < \Lambda$) и учитывая (7.8), неравенство (6.5) можно записать в виде

$$E_{\Lambda - \delta_1}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda - \delta_1}(0) \exp[2(\Lambda - \delta_1)t],$$

откуда вытекает оценка

$$\int (\partial\Phi/\partial x_i)^2 dx > 8\pi G |\Pi_{\Lambda - \lambda_1}(0)| \exp[2(\Lambda - \delta_1)t]. \tag{7.10}$$

Таким образом, параметр Λ (7.9) оценивает снизу инкременты решений задачи (5.4) — (5.6) из класса (7.7).

Сравнение оценок (7.6), (7.10) свидетельствует о том, что решения задачи (5.4) — (5.6) из класса (7.7) растут быстрее, чем решения из класса (7.1).

Ниже показано, что возмущения (7.7) наиболее опасные, поскольку наибыстрейший рост решений задачи (5.4) — (5.6) наблюдается при

$$\Lambda^+ = \sup_{\xi_0(x) \in Q} \Lambda. \tag{7.11}$$

8. Оценка сверху роста возмущений. Пусть имеет место неравенство $\lambda > \Lambda^+$ (7.11). Тогда для начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(x)$ (5.6), (6.1) справедливо соотношение

$$\Pi_\lambda(0) > 0. \tag{8.1}$$

Неравенство (8.1) тем более выполнено для таких полей лагранжевых смещений $\xi_0(x)$, которые не удовлетворяют условию (6.1). Таким образом, функционал Π_λ положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(x)$ (5.6). Соотношения (5.1), (5.4), (6.4) показывают, что функционал E_λ также положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(x)$ и скорости $v_0(x)$ (5.6).

Следовательно, при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$) из основного неравенства (6.5) вытекает оценка

$$E_{\Lambda^+ + \varepsilon_1}(t) \leqslant E_{\Lambda^+ + \varepsilon_1}(0) \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon_1)t]. \tag{8.2}$$

Из (8.2) следует, что параметр $\Lambda^+ + \varepsilon_1$ оценивает инкременты решений задачи (5.4) — (5.6) сверху.

Сопоставление неравенств (7.10) и (8.2) с учетом определения (7.11) позволяет сделать вывод о том, что параметр Λ^+ оценивает скорость нарастания решений задачи (5.4) — (5.6) из класса (7.7) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leqslant \omega_* \leqslant \Lambda^+ + \varepsilon_1. \tag{8.3}$$

Оценка (8.3) означает, что наиболее быстро растут такие решения задачи (5.4) — (5.6), у которых инкремент равен Λ^+ (7.11). Следовательно, вычислив значение Λ^+ по формулам (7.9), (7.11), можно ответить на вопрос: за какое характерное время система «уйдет» из данного положения равновесия (2.6)?

9. Пример. Пусть поле $\xi_0(\mathrm{x})$ (5.6) имеет вид

$$\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) = (\xi_{01}(x_1), 0, 0), \tag{9.1}$$

$$\xi_{01} = \begin{cases} a_1 \sin^3 \alpha_1 x_1; \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi/\alpha_1, \\ 0; \ x_1 \leqslant 0, \ x_1 \geqslant 2\pi/\alpha_1, \end{cases}$$

где a_1 и α_1 — постоянные величины, причем $\alpha_1 > 0$. Тогда при помощи соотношений (5.5), (9.1) нетрудно показать, что поля возмущений плотности ρ и напряженности гравитационного поля $\nabla\Phi$ можно записать следующим образом:

$$\rho = \begin{cases} -(3/2)\alpha_1 a_1 \rho_\infty \sin 2\alpha_1 x_1 \sin \alpha_1 x_1; \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi/\alpha_1, \\ 0; \ x_1 \leqslant 0, \ x_1 \geqslant 2\pi/\alpha_1, \end{cases} \tag{9.2}$$

$$\nabla\Phi = (\partial\Phi/\partial x_1, \partial\Phi/\partial x_2, \partial\Phi/\partial x_3) = (\partial\Phi/\partial x_1(x_1), 0, 0),$$

$$\partial\Phi/\partial x_1 = \begin{cases} -4\pi G\rho_\infty a_1 \sin^3\alpha_1 x_1; \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi/\alpha_1, \\ 0; \ x_1 \leqslant 0, \ x_1 \geqslant 2\pi/\alpha_1. \end{cases}$$

Прямая проверка позволяет убедиться в том, что соотношения (9.1), (9.2) удовлетворяют условиям на бесконечности (5.1), (5.5). Функционал П (5.3) с учетом (9.1), (9.2) имеет вид

$$\Pi = (9\pi/16\alpha_1)\gamma p_\infty a_1^2(\alpha_1^2 - (20\pi/9)G\rho_\infty c^{-2}), \ c^2 = \gamma p_\infty/\rho_\infty. \tag{9.3}$$

Из (9.3) вытекает, что функционал П будет принимать отрицательные значения, если

$$\alpha_1^2 < (20\pi/9)G\rho_\infty c^{-2}. \tag{9.4}$$

Таким образом, для поля $\xi_0(\mathrm{x})$ (9.1), (9.4) условие обращения теоремы Лагранжа (6.1) выполнено. Это означает, что состояния покоя (2.6) неустойчивы. С помощью (9.1), (9.4) в явном виде выписываются оценки скорости нарастания возмущений (7.6), (7.10), (8.2), вычисляется инкремент Λ^+ (7.9), (7.11) наиболее быстрорастущих возмущений. Следует отметить, что условие (9.4) согласуется с результатом, полученным ранее [12, 13].

Ниже доказывается неустойчивость состояний равновесия (2.6) в силу соотношений точной задачи (2.1)—(2.4) при условии справедливости обратной теоремы Лагранжа, т.е. при отсутствии в этих состояниях равновесия минимума потенциальной энергии Π_1 (2.5). Показывается, что имеет место среднеквадратичный рост возмущений плотности и/или потенциала скорости.

10. Основные соотношения. Дальнейшие исследования ограничиваются рассмотрением класса пространственных адиабатических потенциальных движений самогравитирующей идеальной сжимаемой жидкости $\mathrm{v} = \nabla\varphi$ ($\varphi = \varphi(\mathrm{x}, t)$ — потенциал скорости). В этом случае точную задачу (2.1)—(2.4) можно переписать:

$$\partial\varphi/\partial t + (\nabla\varphi)^2/2 = -\Phi - \gamma p((\gamma-1)\rho)^{-1} - \beta, \tag{10.1}$$

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0,\ \Delta\Phi = 4\pi G(\rho - \rho_\infty),$$
$$p = a\rho^\gamma,\ a = \text{const},\ \gamma = c_p/c_V > 1,$$
$$|\nabla\varphi| \to 0,\ |\nabla\Phi| \to 0,\ \rho \to \rho_\infty,\ p \to p_\infty \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty,$$
$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0(\mathbf{x}),\ \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}).$$

Здесь $\beta = \beta(t)$ — произвольная функция своего аргумента.

Состояния гидростатического равновесия представляют собой решения задачи (10.1) вида (φ_∞ — постоянная величина)

(10.2)
$$\varphi = \varphi_0(\mathbf{x}) = \varphi_\infty,\ \rho = \rho_0(\mathbf{x}) = \rho_\infty,$$
$$p = p_0(\mathbf{x}) = p_\infty,\ \Phi = \Phi_0(\mathbf{x}) = \Phi_\infty.$$

Функция $\beta = \beta(t)$ выбирается так, чтобы удовлетворить принятой ранее связи (3.3) между параметрами состояний равновесия Φ_∞, p_∞ и ρ_∞:

(10.3)
$$\beta \equiv \gamma p_\infty((\gamma - 1)\rho_\infty)^{-1}.$$

Возможность такого выбора функции β основывается на следующих соображениях. Пусть вид функции β фиксирован на бесконечности посредством (10.3). Поскольку, согласно сделанному выше предположению, жидкость на бесконечности имеет плотность $\rho_\infty = \text{const}$ и покоится, то связь (10.3) будет справедлива не только при $t = 0$, но и при $t > 0$. Если теперь функцию β непрерывным образом продолжить внутрь области течения, то получится, что (10.3) будет иметь место во всем пространстве как при $t = 0$, так и при любых допустимых $t > 0$.

Точные нестационарные решения задачи (10.1) записываются в форме

(10.4)
$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_\infty + \varphi'(\mathbf{x}, t),\ \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_\infty + \rho'(\mathbf{x}, t),$$
$$p(\mathbf{x}, t) = p_\infty + p'(\mathbf{x}, t),\ \Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_\infty + \Phi'(\mathbf{x}, t);$$

причем функции $\varphi', \rho', p', \Phi'$ (10.4), рассматриваемые как возмущения решения (10.2), удовлетворяют соотношениям

(10.5)
$$\partial\rho'/\partial t + \operatorname{div}(\rho_\infty\nabla\varphi' + \rho'\nabla\varphi') = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_i}\right)^2 = -\Phi' - \frac{\rho'\Phi_\infty}{\rho_\infty + \rho'} - \frac{\gamma p'}{(\gamma - 1)(\rho_\infty + \rho')},$$
$$\Delta\Phi' = 4\pi G\rho',\ p_\infty + p' = a(\rho_\infty + \rho')^\gamma,$$
$$|\mathbf{x}| \to \infty:\ |\nabla\varphi'|,\ |\nabla\Phi'|,\ \rho',\ p' \to 0.$$

Начальные данные (10.1) принимают вид

(10.6)
$$\varphi'(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0'(\mathbf{x}),\ \rho'(\mathbf{x}, 0) = \rho_0'(\mathbf{x}).$$

Ниже штрихи у функций $\varphi', \rho', p', \Phi'$ опускаются. Для решений задачи (10.5), (10.6) справедлив интеграл энергии

(10.7)
$$dE_2/dt = 0,\ E_2 = K_2 + \Pi_2 = \text{const},$$
$$2K_2 = \int (\rho_\infty + \rho)(\nabla\varphi)^2 d\mathbf{x},$$
$$\Pi_2 = \int [p(\gamma - 1)^{-1} + (\Phi_\infty + \Phi)\rho/2]d\mathbf{x}.$$

11. Доказательство неустойчивости. Функционал Ляпунова берется в виде

(11.1)
$$W_1 = \int \rho\varphi d\mathbf{x}.$$

Дифференцирование функционала W_1 (11.1) по времени с помощью (10.5) и последующие преобразования с использованием (10.7) дают соотношение

(11.2)
$$dW_1/dt = -2E_2 + 3K_2 + X,$$

$$X = \int \left\{ \frac{1}{2}\rho_\infty \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2\gamma p_\infty \rho^2}{(\gamma - 1)\rho_\infty(\rho_\infty + \rho)} + \frac{(2-\gamma)a(\rho_\infty + \rho)^\gamma}{\gamma - 1} + \frac{a\rho_\infty[\gamma(\rho_\infty + \rho)^\gamma - 2\rho_\infty^\gamma]}{(\gamma - 1)(\rho_\infty + \rho)} - \frac{(\gamma + 2)a\rho_\infty^\gamma \rho}{(\gamma - 1)(\rho_\infty + \rho)} \right\} d\mathbf{x}.$$

Можно показать, что при $1 < \gamma \leqslant 2$ справедливо неравенство

$$X > 0. \tag{11.3}$$

Действительно, если положить $\gamma = 2$, то функционал X (11.3) примет вид

$$X = \int \left\{ \frac{1}{2}\rho_\infty \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{4p_\infty \rho^2}{\rho_\infty(\rho_\infty + \rho)} + \frac{2a\rho_\infty \rho^2}{\rho_\infty + \rho} \right\} d\mathbf{x}. \tag{11.4}$$

В силу (10.1), (10.2) из соотношения (11.4) немедленно вытекает неравенство (11.3). Пусть теперь $\gamma = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. В пределе при $\alpha \to 0$ функционал

$$X = \int \left\{ \frac{1}{2}\rho_\infty \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2p_\infty \rho^2}{\alpha\rho_\infty(\rho_\infty + \rho)} + \frac{a\rho^2}{\alpha(\rho_\infty + \rho)} \right\} d\mathbf{x}. \tag{11.5}$$

Из (11.5) при учете соотношений (10.1), (10.2) вновь следует неравенство (11.3). В итоге из (11.2), (11.3) вытекает оценка

$$dW_1/dt > -2E_2 + 3K_2 > -2E_2 \text{ при } 1 < \gamma \leqslant 2. \tag{11.6}$$

Далее предполагается, что условие обращения теоремы Лагранжа выполнено, т.е. функционал потенциальной энергии Π_2 (10.7) на рассматриваемых состояниях покоя (10.2) не имеет минимума. Это означает, что среди сколь угодно малых (и среди конечных) возмущений обязательно найдутся такие, для которых $\Pi_2 = \Pi_{20} < 0$. В качестве начальных данных при $t = 0$ выбирается возмущение с $K_2(0) = 0$, $\Pi_2(0) = \Pi_{20}$. Тогда в силу (10.7) имеет место неравенство $E_2(0) = \Pi_{20} < 0$. В этом случае из оценки (11.6) вытекает неравенство $W_1 > 2|\Pi_{20}|t$, которое с учетом определения функционала W_1 (11.1) приводится к виду

$$I = \int [\rho^2 + \varphi^2]\, d\mathbf{x} > 4|\Pi_{20}|t. \tag{11.7}$$

Если интеграл I (11.7) использовать как меру отклонения течения от состояния покоя, то имеется неустойчивость такого сорта: для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $I < \varepsilon$ нарушается за конечное время, сколь бы ни была мала амплитуда $I(0)$ возмущений, выбираемых в качестве начальных данных. Такая неустойчивость является более «сильной», чем понимаемая в обычном определении Ляпунова [1—3], где для констатации неустойчивости достаточно существования хотя бы одного значения ε и рассматривается нарушение условия $I < \varepsilon$ на бесконечном промежутке времени. Необходимо подчеркнуть, что оценка (11.7) свидетельствует о действительной физической неустойчивости состояний равновесия (покоя) (2.6), поскольку неоднозначность в выборе потенциала скорости $\varphi(\mathbf{x}, t)$ снимается при помощи связи (10.3).

Важно также отметить, что эвристической основой при выборе функционала Ляпунова W_1 (11.1) послужили гамильтонова формулировка теоремы о неустойчивости конечномерных механических систем [2] и известный способ введения канонических переменных в гидродинамике [25, 26]. Кроме того, в линейном приближении W_1 (11.1) совпадает с функционалом W из (6.2). Доказательство этого факта получается непосредственно после применения теоремы Гаусса [27].

Автор благодарит В.А. Владимирова за постановку задачи и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
4. Румянцев В.В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 1.
5. Белов С.Я., Владимиров В.А. Пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1988. — Вып. 84.
6. Владимиров В.А. К неустойчивости равновесия жидкостей // ПМТФ. — 1989. — № 2.
7. Владимиров В.А., Румянцев В.В. К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость // ПММ. — 1989. — Т. 53, вып. 4.
8. Владимиров В.А., Румянцев В.В. К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость // ПММ. — 1990. — Т. 54, вып. 2.
9. Губарев Ю.Г. К обращению теоремы Лагранжа в магнитной гидродинамике // ПММ. — 1990. — Т. 54, вып. 6.
10. Ильин К.И. К устойчивости бароклинного вихря // Изв. АН СССР. ФАО. — 1991. — Т. 27, № 5.
11. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973.
12. Jeans J.H. The stability of a spherical nebula // Phil. Trans. Roy. Soc. (London). — 1902. — V. 199.
13. Jeans J.H. Astronomy and Cosmogony. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1928.
14. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — Oxford: Clarendon press, 1961.
15. Qian Z.S., Spiegel E.A., Proctor M.R.E. The gravitational instability of a gaseous slab // Stability and Appl. Anal. of Continuous Media. — 1991. — V. 1, N 1.
16. Chandrasekhar S. The gravitational instability of an infinite homogeneous turbulent medium // Proc. Roy. Soc. (London). — 1951. — V. 210A.
17. Chandrasekhar S., Fermi E. Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field // Astrophys. J. — 1953. — V. 118.
18. Chandrasekhar S. The gravitational instability of an infinite homogeneous medium when Coriolis force is acting and a magnetic field is present // Astrophys. J. — 1954. — V. 119.
19. Fricke W. On the gravitational stability in a rotating isothermal medium // Astrophys. J. — 1954. — V. 120.
20. Helfer H.L. Waves of finite amplitude in an infinite homogeneous medium // Astrophys. J. — 1954. — V. 115.
21. Tassoul J.-L., Pellieux G. Nonlinear condensations in self-gravitating media. I. A numerical approach // Astrophys. J. — 1972. — V. 171.
22. Tassoul J.-L., Pellieux G. Nonlinear condensations in self-gravitating media. II. An analytical approach // Ibid.
23. Tassoul J.-L., Dedic H. Finite-amplitude disturbances in self-gravitating media // Astron. and Astrophys. — 1973. — V. 26.
24. Liang E.T.P. Nonlinear periodic waves in a self-gravitating fluid and galaxy formation // Astrophys. J. — 1979. — V. 230.
25. Давыдов Б.И. Вариационный принцип и канонические уравнения для идеальной жидкости // ДАН СССР. — 1949. — Т. 69, № 2.
26. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959.
27. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1968.

г. Новосибирск

Поступила 24/V 1993 г.,
в окончательном варианте — 2/VIII 1993 г.