ПМТФ, № 2, 1963

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ НАЛИЧИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ КИНЕТИКОЙ

А. М. Супоницкий

(*Москва*)

§ 1. Пусть ламинарный поток вязкой несжимаемой жидкости, содержащий некоторое вещество А, обтекает тело с химически активной поверхностью, на которой происходит гетерогенная химическая реакция вещества А с веществом поверхности. Задача расчета переноса вещества к поверхности при гетерогенных реакциях со смешанной кинетикой представляет интерес для различных проблем физико-химической гидродинамики (прохождения тока через растворы электролитов, теория гетерогенного горения и т. д.). Ввиду математической сложности рассматриваемой задачи представляют особый интерес течения, для которых имеют место автомодельные решения. В. Г. Левич решил автомодельную задачу расчета скорости переноса вещества к химически активной поверхности вращающегося в жидкости диска [1]. Автор указал класс течений, для которых возможно автомодельное решение задачи конвективной диффузии при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой, и рассмотрел автомодельную задачу расчета скорости переноса вещества к передней критической точке обтекаемой сферы [2]. В данной работе проведено дальнейшее исследование автомодельных задач конвективной диффузии при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой.

С целью выяснения структуры течений, для которых имеют место автомодельные решения, рассмотрим задачу расчета скорости переноса вещества при гетерогенных реакциях со смешанной кинетикой на бесконечной (в обе стороны) пластине, помещенной в поток вязкой жидкости. Ось x направим вдоль пластины, ось y перпендикулярно к ней. Обозначим $u\,(x, y)$, $v\,(x, y)$ — компоненты скорости потока, $c(x, y)$ — концентрацию вещества А в произвольной точке потока, c_0 — концентрацию вещества вдали от пластины, k — константу скорости реакции, $n > 0$ — порядок реакции, D — коэффициент диффузии. Величины c_0, k, n, D будем считать постоянными. Концентрация вещества $c(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$c\,(x, y) = c_0 \quad \text{при } y = \infty \tag{1.2}$$

$$D\,\frac{\partial c}{\partial y} = kc^n \quad \text{при } y = 0 \tag{1.3}$$

Будем искать автомодельное решение вида

$$c = c_0 f\,(\eta) \qquad [\eta = y\,/\,r\,(x)] \tag{1.4}$$

Легко видеть, что решение такого типа представляет собой единственно возможное для данных граничных условий автомодельное решение.

Подставив (1.4) в (1.3), получим, что для автомодельности необходимо, чтобы $r(x) \equiv \text{const} = N$.

Таким образом, получен следующий вывод: автомодельные решения зависят только от координаты, нормальной к реагирующей поверхности. Подставляя (1.4) с учетом $r(x) = N = \text{const}$ в (1.1), заключаем, что для существования автомодельного решения необходимо, чтобы нормальная компонента скорости $v(x,y)$ зависела только от координаты, нормальной к реагирующей поверхности.

Отметим, что приведенные выше выводы о структуре автомодельных задач справедливы, если закон реакции имеет более сложный характер: количество прореагировавшего на поверхности вещества q дается выражением $q = R(c)$, где $R(c)$ — произвольная функция концентрации вещества на поверхности. В этом случае граничное условие на реагирующей поверхности имеет вид

$$D\frac{\partial c}{\partial y} = R(c) \qquad \text{при } y = 0$$

Прежде чем перейти к исследованию конкретных автомодельных задач, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-M\varphi_1(y/N)\,c_y' = Dc_y''{}_y \tag{1.5}$$

при граничных условиях

$$c(y) = c_0 \quad \text{при } y = \infty, \qquad Dc_y' = kc^n \quad \text{при } y = 0 \tag{1.6}$$

где M, N, D, c_0, k, n — константы.

Решение системы (1.5), (1.6) дается выражением (1.7)

$$c(y) = c_0\left[A\int_0^\eta \exp\left(-\sigma\int_0^\xi \varphi_1(\alpha)\,d\alpha\right)d\xi + B\right] \qquad \left(\eta = \frac{y}{N},\ \sigma = \frac{MN}{D}\right)$$

Постоянные A и B определяются соотношениями

$$A = \alpha(\sigma)(1 - B), \qquad B^n = \lambda(1 - B) \tag{1.8}$$

Здесь

$$\alpha(\sigma) = \left[\int_0^\infty \exp\left(-\sigma\int_0^\xi \varphi_1(\alpha)\,d\alpha\right)d\xi\right]^{-1} \qquad \left(\lambda = \frac{D\alpha(\sigma)}{kc_0^{n-1}N}\right)$$

Уравнение $B^n = \lambda(1 - B)$ легко решается графически. Номограммы можно найти в монографиях [1, 3].

Если $\varphi_1(\eta) = E\eta^2$, где E — положительная константа, то интеграл в (1.8) можно вычислить; имеем

$$\alpha(\sigma) = \frac{E^{1/3}\sigma^{1/3}}{3^{1/3}\Gamma(4/3)} \tag{1.9}$$

Приведем выражение для величины плотности потока вещества

$$j = Dc_y'\big|_{y=0} = kc_0^n B^n \tag{1.10}$$

при $n = 1$ из (1.8) следует, что $B = \lambda/(1 + \lambda)$ и выражение (1.10) можно записать в следующем виде:

$$\frac{j}{kc_0} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{jN}{c_0D} = \frac{\alpha(\sigma)}{1+\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{\alpha D}{kN}\right) \tag{1.11}$$

§ 2. Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости, имеющее критическую точку. При этом течении жидкость подходит из бесконечности к пластине, расположенной перпендикулярно к течению, а затем течет вдоль нее в противоположные стороны от критической точки. Выберем начало прямоугольной системы координат в критической точке и направим ось x вдоль пластины. Вдали от пластины компоненты скорости задаются выражениями $u = ax$, $v = -ay$, а на ее поверхности удовлетворяют условиям прилипания. Компоненты скорости даются выражениями [4,5]

$$u = ax\varphi'(\eta), \quad v = -(a\nu)^{1/2}\varphi(\eta) \qquad \left(\eta = \left[\frac{a}{\nu}\right]^{1/2} y\right) \tag{2.1}$$

где $\varphi(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0$$

при граничных условиях

$$\varphi(\eta) = 0, \quad \varphi'(\eta) = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \varphi'(\eta) = 1 \quad \text{при } \eta = \infty$$

Это уравнение было численно проинтегрировано рядом авторов [4,5]. В частности, было определено, что $\varphi''(0) = 1.2326$.

Если поток несет некоторое вещество, имеющее на бесконечности концентрацию c_0 и реагирующее с поверхностью пластины, то задача приводится к решению системы (1.1) — (1.3). Из (2.1) видно, что нормальная к пластине компонента скорости не зависит от продольной координаты. Если искать решение в виде $c = c(\eta)$, то задача (1.1)—(1.3), (2.1) приводится к системе (1.5), (1.6), решение которой дается формулами (1.7)—(1.11). Для написания этих формул нужно провести идентификацию входящих констант и функций. В данном случае

$$N = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{1/2}, \quad M = (a\nu)^{1/2}, \quad \varphi_1(\eta) = \varphi(\eta), \quad \eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2} z$$

$$\sigma = \frac{MN}{D} = \frac{\nu}{D} = P \quad (P \text{ — число Прандтля}) \tag{2.2}$$

Поток вещества на пластине в случае реакций первого порядка дается выражением (1.11)

$$j = Dc_y'\big|_{y=0} = \frac{\alpha(P)\,c_0 D a^{1/2}}{\nu^{1/2}(1+\lambda)} \qquad \left(\lambda = \frac{\alpha(P)\,D a^{1/2}}{k\nu^{1/2}}\right) \tag{2.3}$$

Как известно [1] параметр λ характеризует взаимоотношение между скоростью переноса вещества к поверхности и скоростью химической реакции. Если скорость реакции велика ($k \gg 1$, $\lambda \ll 1$) по сравнению со скоростью переноса вещества к поверхности, то говорят, что процесс идет по диффузионной кинетике. Граничное условие (1.3) принимает вид

$$c = 0 \quad \text{при } y = 0 \tag{2.4}$$

Если химический процесс идет медленно, то скорость суммарного процесса определяется кинетикой реакции ($k \ll 1, \lambda \gg 1$) Формула (2.3) показывает, что при заданной геометрии и свойствах жидкости диффузионный поток при увеличении параметра λ уменьшается, т. е. добавочное «диффузионное сопротивление», обусловленное отклонением режима от чисто диффузионного, растет. Если заменить в уравнении (1.1) и граничных условиях (1.2) и (2.4) концентрацию вещества $c(x, y)$ на температуру $T(x, y)$, то получим известную задачу конвективной теплопередачи [5]. При решении этой задачи было проведено численное вычисление интеграла, определяющего величину $\alpha(P)$ для ряда значений числа Прандтля. Для чисел Прандтля порядка единицы (газовые смеси) рекомендуется приближенная формула

$$\alpha(P) = 0.570P^{0.4} \tag{2.5}$$

При больших значениях числа Прандтля (в растворах жидкостей $P \sim 10^3$) диффузионный слой значительно тоньше гидродинамического и при вычислении α (P) для величины скорости можно взять ее значение вблизи поверхности, т. е. $\varphi(y)=\varphi'(0)\ y^2/2$. Тогда, учитывая приведенное выше значение $\varphi''(0) = 1.2326$, из (1.9) получим

$$\alpha(P) = 0.661 P^{1/3} \qquad (2.6)$$

По формуле (2.6) имеем $\alpha(10) = 1.42$; численное интегрирование дает $\alpha(10) = 1.34$. Таким образом, даже при небольших значениях числа Прандтля формула (2.6) дает отклонения, не превышающее 6%. Формула (2.5) дает значение $\alpha(10) = 1.43$.

Распределение скоростей (2.1) описывает также течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое вблизи передней критической точки плоского тела [5].

Отсюда вытекает, что рассмотренную выше диффузионную задачу можно интерпретировать как задачу расчета скорости переноса вещества к поверхности тела вблизи передней критической точки обтекаемой поверхности при гетерегенных реакциях со смешанной кинетикой.

Рассмотрим осесимметричное обтекание потоком вязкой жидкости пластины, расположенной перпендикулярно к потоку. При таком течении жидкость набегает на пластину и оттекает от критической точки во все стороны по радиусам. Рассмотрим задачу в цилиндрической системе координат r, φ, z с началом в критической точке; пусть плоскость $z=0$ совпадает с пластиной и ось z направлена противоположно течению. Вдали от тела компоненты скорости задаются выражениями $u = ar$, $w = -2\,az$, а на стенке удовлетворяют условиям прилипания. Компоненты скорости даются выражениями [4,5]

$$u = arf'(\eta), \qquad w = -2(a\nu)^{1/2} f(\eta) \qquad (\eta = (a/\nu)^{1/2} z) \qquad (2.7)$$

Функция $f(\eta)$ была вычислена численным интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения. В частности, было определено, что $f''(0) = 1.3120$.

Пусть рассмотренный выше осесимметричный поток жидкости несет некоторое вещество, которое реагирует на пластине. Рассмотрим задачу расчета переноса вещества к пластине. Уравнение диффузии имеет вид

$$u\frac{\partial c}{\partial r} + w\frac{\partial c}{\partial z} = D\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right\} \qquad (2.8)$$

граничные условия

$$c(r, z) = c_0 \quad \text{при } z = \infty, \qquad D\frac{\partial c}{\partial z} = kc^n \quad \text{при } z = 0 \qquad (2.9)$$

Ход рассуждений при решении данной задачи аналогичен проведенному для плоского случая. Приведем вычисления. Идентификация констант и функций дает

$$N = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{1/2}, \quad M = 2(a\nu)^{1/2}, \quad \eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2} z, \quad \varphi_1(\eta) = f(\eta)$$

$$\sigma = \frac{MN}{D} = \frac{2\nu}{D} = 2P, \quad \alpha(P) = \left[\int_0^\infty \exp\left(-2P\int_0^\eta f(h)\,dh\right)d\eta\right]^{-1} \qquad (2.10)$$

Величина $\alpha(P)$ для ряда чисел P найдена при помощи численного интегрирования при решении задачи конвективного теплообмена М. Сибулкиным [7]. Для чисел Прандтля в диапазоне $0.6 < P < 2.0$ рекомендуется формула $\alpha(P) = 0.763\ P^{0.4}$. При больших числах Прандтля можно положить $\varphi(\eta) = 0.656\ \eta^2$. Используя формулу (1.9), получим $\alpha\ (P) = 0.850\ P^{1/3}$

Рассмотрим течение, вызванное вращением круглого конуса вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω в жидкости. Гейс [7] и У Цзин-шэн [8] упростили уравнения этой гидродинамической задачи на основе обычных для пограничного слоя соображений. Исследование было проведено в следующей ортогональной системе координат: ось x направлена вдоль образующей конуса, ось y — по направляющей окружности, ось z перпендикулярна поверхности конуса.

Компоненты скорости течения в гидродинамическом пограничном слое u, v, w даются выражениями

$$u = \omega x \sin \beta F(\eta), \qquad v = \omega x \sin \beta G(\eta)$$

$$w = (\omega \nu \sin \beta)^{1/2} H(\eta), \qquad \left(\eta = z \left[\frac{\omega \sin \beta}{\nu}\right]^{1/2}\right) \tag{2.11}$$

где β — половина угла раствора конуса, функции $F(\eta)$, $G(\eta)$, $H(\eta)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, полученной Т. Карманом для вращающегося диска и численно проинтегрированной Кокраном [4, 5]. В частности, было найдено, что $-H''(0)/2 = 0.51023$.

Рассмотрим соответствующую диффузионную задачу. Уравнение диффузионного пограничного слоя имеет вид

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{2.12}$$

при граничных условиях

$$c(x, z) = c_0 \quad \text{при } z = \infty, \qquad D \frac{\partial c}{\partial z} = kc^n \quad \text{при } z = 0 \tag{2.13}$$

Из формул (2.11) видно, что решение задачи (2.12) — (2.13) дается формулами (1.7) — (1.11) при соответствующем выборе характерных для данной задачи констант и функций. Определим эти величины

$$N = \left(\frac{\nu}{\omega \sin \beta}\right)^{1/2}, \quad M = (\omega \nu \sin \beta)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{MN}{D} = \frac{\nu}{D} = P \tag{2.14}$$

$$\eta = \left(\frac{\omega \sin \beta}{\nu}\right)^{1/2} z, \qquad \varphi_1(\eta) = -H(\eta), \quad \alpha(P) = \left[\int_0^\infty \exp\left(P \int_0^\xi H(\eta)\, d\eta\right) d\xi\right]^{-1}$$

Значения интеграла, определяющего $\alpha(P)$ для ряда значений числа P, вычислены в работе Спарроу и Грегга [9]. При больших числах Прандтля можно положить $\varphi_1 = 0.510\, \eta^2$ и для потока вещества на поверхности конуса при реакциях первого порядка на основании формул (1.9) и (1.11) получим

$$j = Dc_z'\big|_{z=0} = \frac{0.620\, c_0 D^{2/3} \omega^{1/2} \sin^{1/2}\beta}{\nu^{1/6}\left(1 + 0.620 D^{2/3} \omega^{1/2} k^{-1} \nu^{-1/6} \sin^{1/2}\beta\right)} \tag{2.15}$$

В предельном случае диска ($\beta = \pi / 2$) формула (2.15) переходит в формулу (12.8) монографии [1]. Сравним величины потока вещества к поверхности конуса $j^\vee$ и к поверхности диска j°, вращающихся в одной и той же жидкости с равными угловыми скоростями в случае гетерогенной реакции первого порядка.

Используя формулу (1.11), получим

$$\frac{j^\vee}{j^\circ} = \frac{\sin^{1/2}\beta + D\alpha(P)\, \omega^{1/2} \sin^{1/2}\beta k^{-1} \nu^{-1/2}}{1 + D\alpha(P)\, \omega^{1/2} \sin^{1/2}\beta k^{-1} \nu^{-1/2}} \tag{2.16}$$

Из (2.16), следует, что отношение $j^\vee / j^\circ$ меньше единицы.

Сравним потоки вещества на диск и конус одинакового радиуса r

$$\frac{j^{\vee} \pi r^2}{j^{\circ} \pi r^2 \sin\beta} = \frac{1 + D\alpha(P)\,\omega^{1/2} k^{-1} \nu^{-1/2}}{(1 + D\alpha(P)\,\omega^{1/2} \sin^{1/2}\beta k^{-1} \nu^{-1/2}) \sin^{1/2}\beta} \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, что количество вещества, прореагировавшего на конусе, больше, чем на диске того же радиуса.

Замечание 2.1. Выбор течений, для которых имеет место автомодельность задач конвективной диффузии при гетерогенных реакциях со смешанной кинетикой, не представляет затруднений.

Рассмотрим, например, задачу о гидродинамическом пограничном слое на клине. Скорость потенциального течения дается выражением $U = u_1 x^m$.

Компоненты скорости определяются соотношениями [4]

$$u = Uf'(\eta),$$

$$v = -\left(\frac{m+1}{2} \nu u_1 x^{m-1}\right)^{1/2} \left\{f(\eta) + \frac{m-1}{m+1} \eta f'(\eta)\right\}, \quad \eta = y \left(\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{\nu}\right)^{1/2} x^{\frac{m-1}{2}} \tag{2.18}$$

где $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению Фокнера — Скан. Из соотношений (2.18) сразу следует, что автомодельность диффузионной задачи имеет место при $m = 1$, т. е. для течения, изученного в начале этого параграфа.

В работе Гейса [7] исследованы автомодельные решения задач об осесимметричном пограничном слое около вращающихся тел произвольной формы. В предположении, что нормальная компонента скорости зависит только от нормальной к поверхности координаты, получим после простых выкладок, что поверхность должна быть конусом.

Замечание 2.2. Реагирующая поверхность называется равнодоступной в диффузионном отношении, если поток вещества к любой точке ее одинаков. Очевидно, что для рассмотренного класса течений реагирующая поверхность обладает свойством равнодоступности.

§ 3. Рассмотренные выше автомодельные решения допускают обобщения, учитывающие изменения реологических характеристик жидкости, изменения граничных условий.

Рассмотрим течение, вызванное вращающимся диском в жидкости со следующей связью напряжений и скоростей деформации [10]

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu e_{ij} + \mu_c e_{i\alpha} e_{\alpha j} \tag{3.1}$$

где p_{ij} — тензор напряжений, p — давление, μ и μ_c — коэффициенты вязкости, e_{ij} — тензор скоростей деформации. Компоненты скорости u, v, w даются выражениями (3.2)

$$u = r\omega F_1(\eta), \quad v = r\omega G_1(\eta), \quad w = (\nu\omega)^{1/2} H_1(\eta), \quad \eta = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} z$$

Функции $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $H_1(\eta)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра $R_c = \mu_c\omega / \mu$. При значении параметра $R_c = 0$ получаем известную систему дифференциальных уравнений, соответствующую случаю ньютоновской жидкости. Для значений параметра $R_c = 0.05$ и 0.10 уравнения были проинтегрированы численно [10]. В частности, для величины $-H''(0) / 2$ при $R = 0.05$ и 0.10 были получены соответственно значения 0.494, 0.482. Напомним, что $-H''(0) / 2 = 0.510$ при $R_c = 0$.

Рассмотрим соответствующую диффузионную задачу. Уравнения диффузии имеют вид

$$u \frac{\partial c}{\partial r} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r}\right\} \tag{3.3}$$

при граничных условиях

$$c(r, z) = c_0 \quad \text{при } z = \infty, \qquad D \frac{\partial c}{\partial z} = kc^n \quad \text{при } z = 0 \tag{3.4}$$

Из формул (3.2) следует, что нормальная к поверхности компонента скорости w зависит только от η. Поэтому соотношения (1.7) — (1.11) полностью решают поставленную задачу (3.3), (3.4). Определим значения констант и функций, входящих в формулы (1.7) — (1.11), для данной задачи

$$N = \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2}, \quad M = (\nu\omega)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{MN}{D} = \frac{\nu}{D} = P \tag{3.5}$$

$$\eta = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} z, \quad \varphi_1(\eta) = -H_1(\eta), \quad \alpha(P) = \left[\int\limits_0^\infty \exp\left(P\int\limits_0^\eta H_1(\xi)\,d\xi\right)d\eta\right]^{-1}$$

Ввиду уменьшения величины $E = -H''(0)/2$ с увеличением параметра R_c из формул (1.9) и (1.11) следует, что для гетерогенных реакций с чисто диффузионной кинетикой при больших числах Прандтля наблюдается небольшое уменьшение потока вещества на поверхности диска.

Рассмотрим течение, вызванное равномерным вращением диска в ньютоновской жидкости.

Будем считать, что жидкость вдали от диска вращается вокруг той же оси, что и диск с угловой скоростью ωs, где $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Семейство решений, зависящее от параметра s для задачи о вращении диска в вязкой жидкости, было впервые указано Батчелором [11]. Решение ищется в виде (3.2). В работе Роджерса и Ланса [12] был проведено численное интегрирование системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $H_1(\eta)$. Функции $F_1(\eta)$, $G_1(\eta)$, $H_1(\eta)$ для ряда значений параметра s затабулированы. Приводим значения $-H''(0)/2$ для некоторых значений s

$s =$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
$-\dfrac{H''(0)}{2} =$	0.510	0.513	0.502	0.440	0.331	0.183	0.096	0.0

Рассмотрим соответствующую диффузионную задачу. Очевидно, что при определении характерных величин и функций соотношениями (3.5) формулы (1.7) — (1.11) дают решение поставленной задачи конвективной диффузии. Из приведенных данных видно, что увеличение завихренности жидкости вдали от тела резко снижает поток переносимого вещества к поверхности.

Поступила 30 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Супоницкий А. М. О расчете скорости переноса вещества в ламинарном потоке жидкости при гетерогенных реакциях со смешанной кинетикой. ПМТФ, 1960, № 2.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. АН СССР, 1947.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.
5. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Т. I, II, М., ИЛ, 1948.
6. Сибулкин М. Теплопередача вблизи передней критической точки тела вращения. ИЛ, Сб. пер. и обз. ин. лит., Механика, 1953, № 3.
7. Geis T. Ähnliche Grenzschichenten an Rotationskörpern. 50 Jahre Grenzschicht-forsch. Berlin, Akad. Verl., 1956.
8. Wu Ching-Cheng. The three dimensional incompressible laminar boundary layer on a spinning cone. Appl. Scient. Res., 1959, Vol. A8, No 2—3.
9. Sparrow E. M., Gregg J. L. Heat transfer from a rotating disc to fluids of any Prandtl number. Trans. ASME, 1959, vol. C81, No 3.
10. Jain M. K. The flow of a non-Newtonian liquid near a rotating disk. Appl. Scient. Res., 1961, vol. A10, No 6.
11. Rogers M. H., Lance G. H. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disc. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, No 14.