

КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СИЛЬНОТОЧНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В. Н. Данилов

(Москва)

На основе одномерных решений уравнений осесимметричного двухпоточного пучка построено адиабатическое приближение, позволившее описать влияние слабонеоднородного магнитного поля на стационарный квазинейтральный пучок. Рассмотрены трибчатые и слоистые конфигурации пучка, ограниченного вблизи оси, при токах порядка критического и существенно превышающих критический.

Равновесные состояния сильноточного релятивистского пучка электронов [1] в заполненной плазмой трубе изучались в работе [2]. Здесь в рамках адиабатического приближения рассматривается задача управления параметрами стационарного осесимметричного пучка в трубе с помощью внешнего слабонеоднородного магнитного поля. Это поле позволяет эффективно менять отношение компонент скорости электрона, радиус пучка и т. д. Для дальнейшего преобразования энергии интересны двухпоточные пучки как наиболее упорядоченные по скоростям. Адиабатическое приближение для двухпоточного пучка можно строить из одномерного по радиусу  $r$  решения, считая константы этого решения квазиконстантами — слабыми функциями продольной координаты  $z$ , за исключением интегралов движения — энергии электрона  $\mathcal{E}$ , азимутальной компоненты  $P_\theta$  обобщенного импульса, адиабатического инварианта  $w$  и тока  $J$ . Квазиодномерный двухпоточный пучок состоит из двух подпотоков электронов, отличающихся друг от друга лишь знаком радиальной компоненты  $u_r$  4-скорости

$$u_r = \pm (\mathcal{E}^2 - 1 - r^{-2}u_\theta^2 - u_z^2)^{1/2}, \quad u_\theta(z) = A_\theta(z) + P_\theta(z) \quad (0.1)$$

и ограничен поверхностями  $r_+$ ,  $r_-$ , на которых эти подпотоки переходят один в другой [3]

$$r = r_\pm, \quad u_r = 0, \quad w = \int_{\pm} |u_r| dr, \quad J = 2\pi \int_{\pm} \rho u_z r dr \quad (0.2)$$

Здесь  $(O, A_\theta, A_z)$  — векторный потенциал самосогласованного магнитного поля  $(O, H_\theta, H_z)$

$$\begin{aligned} H_\theta &= -rA_{z,r}, \quad H_z = r^{-1}A_{\theta,r}, \quad H^2 \equiv r^{-2}H_\theta^2 + H_z^2 \\ r(r^{-1}A_{\theta,r})_{,r} &= 2\pi\rho u_\theta, \quad r^{-1}(rA_{z,r})_{,r} = 2\pi\rho u_z, \quad r\rho|u_r| = 2I \end{aligned} \quad (0.3)$$

потенциал электрического поля опущен, что соответствует нейтральному пучку;  $\rho$  — скалярная плотность электронов; квазиконстанта  $I$  имеет смысл вращающегося тока, образованного осцилляциями электронов поперек пучка; индекс после запятой означает производную по соответствующей координате; азимутальные компоненты определены как ковариантные; физические константы  $e$ ,  $m$ ,  $c$  опущены, что соответствует переходу от

обычных обозначений по стрелкам

$$\begin{aligned} P/mc \rightarrow P, \quad \mathcal{E}/mc^2 \rightarrow \mathcal{E}, \quad eA/mc^2 \rightarrow A \\ eH/mc^2 \rightarrow H, \quad 2e^2\rho/mc^2 \rightarrow \rho, \quad -2eJ/mc^3 \rightarrow J \end{aligned} \quad (0.4)$$

Двухпоточность требует идентичности электронов по константам  $P_0$ ,  $w$  и достигается при инжекции очень узкого пучка с одинаковыми скоростями электронов на диафрагме или же, например, при следующих условиях: катод в вакуумной части ускорителя лежит на магнитной поверхности  $A_0 = -P_0$ ; область однопоточного течения у катода полностью охватывается крайней траекторией и примыкает на ней к двухпоточному пучку, который находится всюду в адиабатических условиях и проходит диафрагму плавно под малым углом к границе. Нарушение этих условий приводит к разбросу по скоростям. В таком случае рассматриваемый ниже двухпоточный пучок будет соответствовать реальному как модель, учитывая все качественные особенности, за исключением детальной структуры распределения собственного магнитного поля по радиусу.

**1. Трубчатый пучок.** Система уравнений (0.1), (0.3) простой подстановкой сводится к двум

$$\begin{aligned} v_{,\sigma\sigma} - v\psi_{,\sigma}{}^2 &= e^{\epsilon\sigma}v/2u + \epsilon^2v \sin^2\psi, \quad u = (1 - v^2)^{1/2} \\ (\psi_{,\sigma}v^2)_{,\sigma} &= \epsilon^2v^2 \sin\psi \cos\psi, \quad r \equiv Re^{\epsilon\sigma}, \quad \epsilon^2 8\pi IR \equiv \kappa \\ u_z + ir^{-1}u_{\theta} &\equiv \kappa v e^{i\psi}, \quad u_r \equiv \pm \kappa u, \quad \kappa \equiv (\mathcal{E}^2 - 1)^{1/2}, \quad i \equiv \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

При малых  $\epsilon$  пучок ограничен вблизи квазицилиндра  $R(z)$  и решение можно разложить по степеням  $\epsilon$ , перейдя к короткой координате  $s \equiv r - R$

$$s = \epsilon R (\sigma + 1/2 \sigma^2 \epsilon), \quad \sigma \equiv \pm \sigma' + \epsilon \sigma'' \quad (1.2)$$

Интегрируя (1.1) с точностью до  $\epsilon^2$ , нетрудно получить

$$\begin{aligned} \sigma_{,v'} &= v/\delta, \quad \delta \equiv [(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)]^{1/2} \\ (rH_z + iH_{\theta})\kappa^{-1} &= D(\epsilon \cos\vartheta)^{-1} \exp i(\psi \mp \vartheta) + \\ + v \sin\psi + ie^{i\psi}\sigma_{,v''} &(\sigma_{,v'})^{-2}, \quad \sigma_{,v''} = 1/2(\sigma_{,v'})^3 (u\sigma' - w') \\ \psi &= \Phi \pm \psi' + \epsilon\psi'', \quad \psi_{,\sigma'} = Dv^{-2}, \quad \text{tg } \vartheta \equiv \delta/D \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\Phi$ ,  $D$ ,  $\mu$  — квазиконстанты,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  — действительные корни кубического уравнения, показанные на фиг. 1

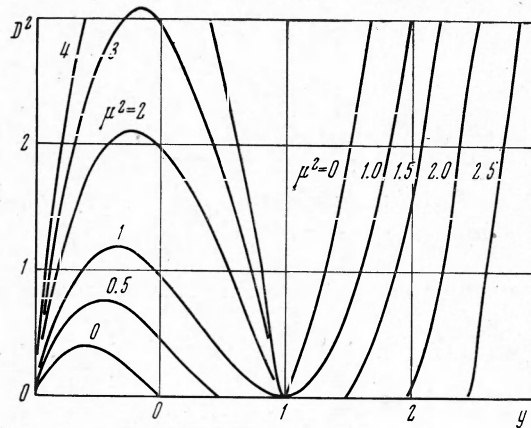
$$(1 - y^2)(\mu^2 - y) = D^2 \leq \mu^2, \quad u_1 \leq 0 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 \quad (1.4)$$

Окончательно решение выражается через эллиптические интегралы первого  $F$ , второго  $E$  и третьего  $\Pi$  рода

$$\begin{aligned} \sigma' &= 2(u_3 - u_1)^{-1/2} [u_3 F(\varphi, k) - (u_3 - u_1) E(\varphi, k)] \Big|_{\varphi}^{\pi/2} \\ u &= u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2\varphi, \quad k^2 \equiv (u_2 - u_1)/(u_3 - u_1) \\ \psi' &= \frac{D}{\sqrt{u_3 - u_1}} \left[ \frac{\Pi(n_1, k, \varphi)}{1 - u_1} - \frac{\Pi(n_2, k, \varphi)}{1 + u_1} \right] \Big|_{\varphi}^{\pi/2} \\ n_1 &= -(u_2 - u_1)/(1 - u_1), \quad n_2 = (u_2 - u_1)/(1 + u_1) \\ w' &\equiv \int_0^{\varphi} u d\sigma' = 2/3(u_3 - u_1)^{-1/2} \{ [3u_3^2 - (u_3 - u_1)(u_3 - u_2)] F(\varphi, k) - \\ - 2\mu^2(u_3 - u_1) E(\varphi, k) + 1/2(u_3 - u_1)(u_2 - u_1) \sin 2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \} \Big|_{\varphi}^{\pi/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Функции, отмеченные штрихом, отсчитываются от линии максимума  $u = u_2$ , расположенной почти в центре пучка.

Верхний знак соответствует верхней половине пучка, нижний знак — нижней половине. Двухзначное представление выделяет ветви искомой функции  $s(v)$ , что позволяет избежать неравномерности асимптотического

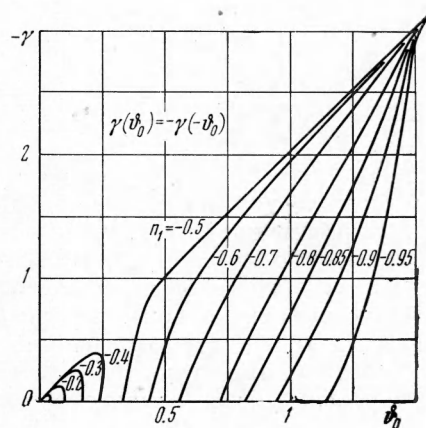


Фиг. 1

представления в окрестности точки ветвления  $u = u_2$ . Отмечая индексом нуль значения знакоопределенных функций на границах (0.2), можно написать

$$\begin{aligned}
 s_{\pm} &= \pm a_0 + \dots, \quad a_0 = \varepsilon \sigma_0' R, \quad \psi_{\pm} = \Phi \pm \psi_0' + \varepsilon \psi_0'' \\
 \varphi_0 &= \arcsin [-u_1 / (u_2 - u_1)]^{1/2}, \quad \mu = D / \cos \vartheta_0 \\
 -\frac{J}{\pi} &= \frac{\mu}{\varepsilon} 2 \cos \Phi \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{w_0'}{\delta} \sin \Phi \sin \psi_0' \\
 w &= 2\varepsilon R \kappa w_0', \quad \gamma = 2(\psi_0' - \vartheta_0), \quad \gamma(\vartheta_0) = -\gamma(-\vartheta_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Значения  $\sigma_0'$ ,  $\psi_0'$ ,  $w_0'$  получаются заменой в выражениях (1.5)  $\varphi$  на  $\varphi_0$ . Знаки  $\mu$ ,  $D$ ,  $\vartheta_0$  совпадают и противоположны знаку  $\gamma$ , «угол»  $\vartheta_0$  изменяется в интервале  $-\pi/2, \pi/2$ . При переходе от нижней к верхней границе модули векторов  $(r^{-1}u_0, u_2)$ ,  $(r^{-1}H_0, H_z)$  почти сохраняются и эти векторы поворачиваются в плоскости  $(z, r\theta)$  на углы  $2\psi_0'$  и  $\gamma$  соответственно. Полученное решение определяется двумя параметрами:  $\mu$ ,  $D$  или же  $n_1$ ,  $\vartheta_0$ . На фиг.2 изображена зависимость угла  $\gamma$  поворота магнитного поля от параметров  $n_1$ ,  $\vartheta_0$ . Фиг. 1, 2 позволяют, в частности, рассчитать состояние сильнооточного пучка, определенного ниже (2.4).



Фиг. 2

Параметры  $n_1, n_2$  ограничены в полосе

$$\begin{aligned}
 0.5 < -n_1 < 1, \quad -n_1 / (1 + n_1) \equiv N_1 < n_2 < \infty \\
 0 < -n_1 < 0.5, \quad N_1 < n_2 < -n_1 / (1 + 2n_1) \equiv N_2
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

У границ этой полосы решение имеет следующие асимптотики.

Случай  $n_2 \approx N_1$  соответствует очень сильному внешнему полю

$$\begin{aligned} u_2 \approx -u_1 \approx n/(2-n) = |\sin \vartheta_0|, \quad n \equiv -n_1 \\ \psi_0' \approx \vartheta_0, \quad \varphi_0 \approx \pi/4, \quad \gamma \approx k \approx 0, \quad u_3 \approx \mu^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Случай  $n_2 \approx N_2$  соответствует малой поперечной скорости (холодный пучок)

$$\begin{aligned} \sigma' = 1/2 |\mu|^{-3} (\sin \tau / \cos \tau_0 - \tau), \quad u = |\mu| \sigma_{,\tau}' \\ u' \equiv 2u_2 / |\gamma| = (\tau_0 \cos \tau_0)^{-1} - \tau_0^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \operatorname{tg} \tau_0 = 2\mu^2 |\vartheta_0|, \quad J \varepsilon (\kappa \cos \Phi |\mu|)^{-1} = |\gamma| \ll 1 \\ \mu^2 |\gamma| = \tau_0, \quad \alpha' \equiv 2a_0 |\mu| (\varepsilon R |\gamma|)^{-1} = \operatorname{tg} \tau_0 / \tau_0 - 1 \\ \Gamma \equiv 2 |\mu| w (\varepsilon R \kappa \gamma^2)^{-1} = \tau_0^{-2} [(1 + 1/2 \cos^2 \tau_0) - 3/2 \operatorname{tg} \tau_0] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Холодный пучок при небольших  $\mu^2$  описывается проще

$$\begin{aligned} u_2 \approx \mu^2 - D^2 \ll 1, \quad \sigma' = (u_2 - 1/12 t^2) t, \quad u = \sigma_{,t}' \\ t_0 = 2u_2^{1/2}, \quad w_0' = 16/15 u_2^{5/2}, \quad \sigma_0' = 4/3 u_2^{3/2}, \quad \gamma \approx -2\vartheta_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Случай  $n_2 \rightarrow \infty$  соответствует малому  $D^2$ . В области  $\mu^2 < 1$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 \approx -1, \quad u_2 \approx \mu^2 + D^2 (\mu^4 - 1)^{-1}, \quad u_3 \approx 1 \\ k^2 = 1/2 (\mu^2 + 1), \quad \vartheta_0 = -\gamma/2 = \pm \pi/2 \\ \sigma_0' = 1/3 \sqrt{2} (F - 2E) |_{\varphi_0}^{3/2}, \quad v_{\min} = (1 - \mu^4)^{1/2} \\ w_0' = 1/3 \sqrt{2} [(2\mu^2 + 1)F - 4\mu^2 E] |_{\varphi_0}^{3/2} - 2/3 |\mu| \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом пучке поперечная скорость велика (горячий пучок), но продольная скорость еще значительна. Решение для  $\mu^2 > 1$  в противоположность предыдущему соответствует повороту скорости почти на  $180^\circ$  и малому повороту магнитного поля

$$\begin{aligned} u_1 \approx -1, \quad u_2 \approx 1 - 1/2 D^2 (\mu^2 - 1)^{-1}, \quad u_3 \approx \mu^2 \\ \sigma_0' = 2 (1 + \mu^2)^{-1/2} [(2\mu^2 + 1)F - (1 + \mu^2)E] |_{\pi/4}^{3/2} \\ w_0' = 2/3 (1 + \mu^2)^{-1/2} [(2\mu^2 + 1)F - 2\mu^2 (\mu^2 + 1)E] |_{\pi/4}^{3/2} - 2/3 |\mu|, \\ -D/\gamma \equiv D' \approx \{(2\mu^2 - 2)^{-1/2} [43/16 + (\mu^2 - 1)^{-1} + (2\mu^2 - 2)^{-2}] - 2/|\mu|\}^{-1}, \\ k^2 \approx 2 (1 + \mu^2)^{-1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

В этом дрейфующем пучке продольная скорость на оси мала. Ток верхней половины пучка почти компенсирует ток нижней половины, но, несмотря на малость полного тока, перепад магнитного давления к центру пучка велик. Ближайшая окрестность особой точки  $\mu = 1$ ,  $D = 0$ , в которой может происходить отражение или разветвление пучка с изломом оси, достигается вследствие сохранения  $w$ , при весьма большом внешнем поле.

Решение для узкого пучка можно было бы построить численно, используя следующее локальное решение исходных уравнений (1.1):

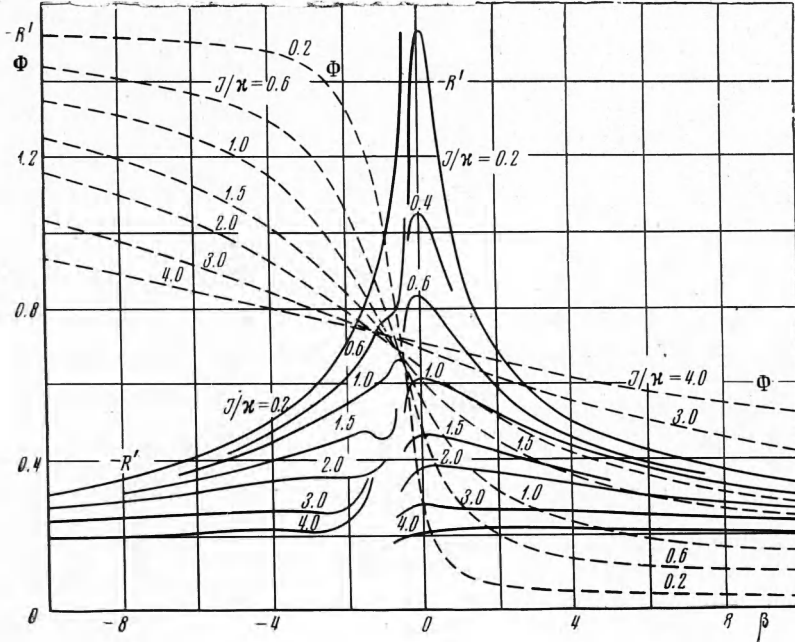
$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_n + \sigma', \quad v = v_n + v', \quad r = R e^\sigma, \quad \varepsilon = 1 \\ \sigma' = \omega_n^{-1} P_n \sin \tau - e_n \omega_n^{-2} (1 - \cos \tau) - \alpha_n \omega_n^{-3} (\tau - \sin \tau) \\ v' = 1 - v_n - 1/2 \omega_n^2 (\sigma_{,\tau}')^2, \quad \omega_n^2 \equiv D^2 v_n^{-3} + v_n \sin^2 \psi_n, \\ \alpha_n \equiv v_n [2(1 + v_n)]^{-1/2} \exp \sigma_n \\ v' |_{\tau=0} = \sigma' |_{\tau=0} = 0, \quad v_{,\sigma} |_{\tau=0} = e_n, \quad P_n = [2(1 - v_n)]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Нетрудно дополнить (1.13) следующим членом разложения по малым штрихованным приращениям. Тогда исходные уравнения можно интегри-

ровать для узкого пучка с большим равномерным шагом по  $\sigma$ ,  $n=1, 2, \dots$  вплоть до границ, на которых расположены существенные особенности задачи.

Асимптотическое представление (1.13) устраняет эти особенности и равномерно по всем параметрам. При небольших  $\omega_n$  разложение производится по степеням  $\tau$ .

**2. Адиабатические уравнения.** Уравнения для квазиконстант  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $D$ ,  $\Phi$ ,  $R$  следуют из сохранения  $w$ ,  $J$ , определенных в (1.6), отсутствия  $H_0$



Фиг. 3

внутри пучка, непрерывности  $A_0$  на внутренней границе  $r_-$  и из наличия аксиального поля  $B(z)$  вне пучка

$$\begin{aligned} C(\Phi - \gamma/2) &= \lambda \cos \psi_-, \quad \lambda \equiv \omega_0'/2\delta_0, \quad R' \equiv -R\kappa/2P_0 \\ \mu/\varepsilon \equiv C &= (1 + \varepsilon\sigma_0')/R' + (1 - \lambda) \sin \psi_-, \quad \beta \equiv -2P_0 B\kappa^{-2} \\ C \cos(\Phi + \gamma/2) &= R'(1 + \varepsilon\sigma_0')\beta - (1 + \lambda) \sin \psi_+ \end{aligned} \quad (2.1)$$

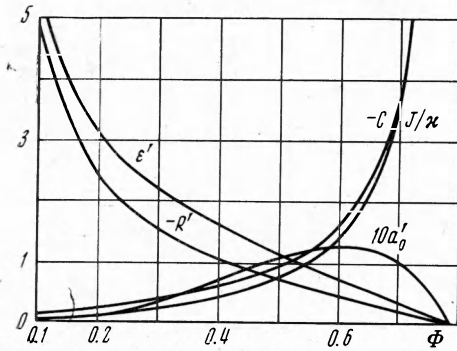
Интересен поток электронов, максимально упорядоченный по скоростям (холодный пучок (1.9), (1.10)), и также поток идентичных осцилляторов с большой энергией поперечных осцилляций (горячий пучок (1.11), (1.12)). Ниже построены решения адиабатических уравнений в основном для этих состояний.

В слабом внешнем поле ( $\beta \sim 1$ ) пучок холодный<sup>1</sup> ( $\mu^2 \sim u_2 \sim \varepsilon^2$ ). Из (1.6), (1.10), (2.1) следует:

$$\begin{aligned} \beta R' &= \sin \Phi \cos^2 \Phi \{1 - [1 + \beta \cos 2\Phi \sin^{-2} \Phi \cos^{-4} \Phi]^{1/2}\} \\ C &= (R'\beta - \sin \Phi)/\cos 2\Phi = -J(\kappa \sin 2\Phi)^{-1} \\ \varepsilon' &\equiv 2\varepsilon |P_0|^{1/2} (15w)^{-1/2} = |R'(C \sin \Phi)^5|^{-1/2} \\ a' &\equiv {}^{3/4}\kappa (15/32w)^{-2/3} |2P_0|^{-1/3} a_0 = \varepsilon'^4 |R'(C \sin \Phi)^3| \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> Адиабатическое приближение пригодно при условии  $u_2 \gg a_0/L \ll 1$ , где  $L$  — масштаб неоднородности  $B$ . Этим  $u_2$  ограничивается снизу.

Отрицательным  $\beta$  соответствует изменение знака внешнего поля  $B$  на пути от катода и решение в области  $-\beta > \sin^2 \Phi$  с противоположным знаком перед корнем в  $R'$ . На фиг. 3 сплошными кривыми изображено изменение безразмерного радиуса  $R'$  пучка, а пунктирными — изменение



Фиг. 4

угла  $\Phi$  в зависимости от параметра внешнего поля  $\beta$ . Монотонное изменение положительного  $\beta$  приводит к однородному пучку. Параметры однородного состояния в зависимости от угла «намотки» траектории изображены на фиг. 4 и определяются выражениями

$$R' = -\text{ctg } 2\Phi \sqrt{2P_0/\cos \Phi}, J/\kappa = \sin \Phi \text{tg } 2\Phi \quad (2.3)$$

В случае сильных полей ( $\beta \sim \epsilon^{-2}$ ) и больших токов ( $J \sim \kappa \epsilon^{-1}$ ) из (1.6), (2.1) с точностью до  $\epsilon$  следует:

$$\Phi = \gamma/2, \cos \gamma = \frac{1}{2}\alpha [(1 + 4\alpha^{-2})^{1/2} - 1], \alpha\beta \equiv (J/\kappa)^2 \\ R' = \pm (\cos \gamma / \beta)^{1/2}, \epsilon = (w|\mu|)^{1/2} (4|P_0|w_0')^{-1/2} \quad (2.4)$$

С уменьшением  $B$  пучок переходит в однородный, параметры которого определяются графиками на фиг. 5 и соотношениями

$$\gamma \approx 2\Phi \approx \pm \pi/2, R = |2P_0|/J, C = \mp J/\kappa \quad (2.5)$$

Величина  $-2\pi P_0$  равна магнитному потоку, охватываемому эмиттирующим участком катода. Поэтому знак величины  $R'$  (2.4) должен совпадать со знаком поля на катоде. Состояние (2.5) определяется равновесием магнитных давлений внутреннего аксиального и наружного азимутального полей. Перепад от границы пучка к центру уравновешивается плотностью поперечного потока импульса, равной плотности энергии поперечных осцилляций

$$H^2 \approx \kappa^2 \mu^2 (\epsilon R)^{-2} \approx \frac{1}{4} J^4 P_0^{-2}, \Delta H^2 = u_2 \kappa^2 (\epsilon R)^{-2} \quad (2.6)$$

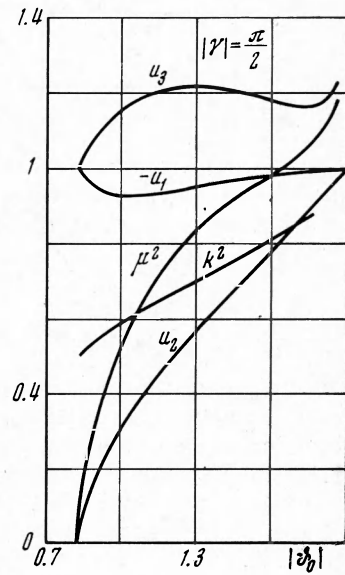
В случае токов порядка критического ( $J \sim \kappa$ ) магнитное поле либо почти не поворачивается

$$\gamma C \approx -J/\kappa, C = +\beta^{1/2}, R = (-2P_0/B)^{1/2}, \\ \Phi \approx \gamma/2 \quad (2.7)$$

либо поворачивается на угол порядка  $\pm 180^\circ$

$$\gamma \approx \pm \pi, \theta_0 \approx \pm \pi/2, C = -RB/\kappa, B = (2P_0/B)^{1/2} \quad (2.8)$$

Последнему случаю соответствует асимптотика (1.14). Внешнее поле  $B$  должно менять знак на пути от катода. Азимутальные токи велики и магнитное поле в основном аксиальное. Фиг. 6 показывает эволюцию



Фиг. 5

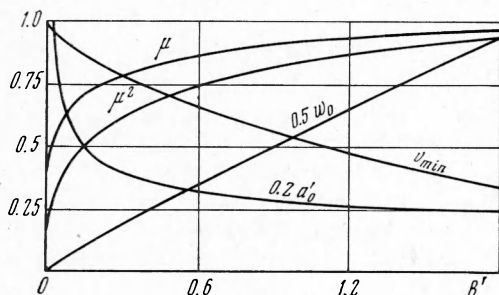
пучка в зависимости от  $B'$

$$^{1/2} |B| w \kappa^{-2} \equiv B' = | \mu | w_0', \quad a'_0 \equiv 2a_0 \kappa / w = \sigma'_0 / w_0' \quad (2.9)$$

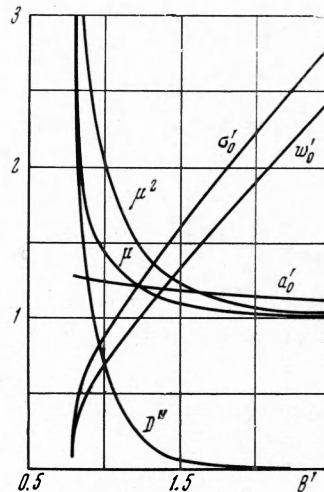
В случае (2.7) уравнение  $\gamma = 0$  приводит к асимптотикам горячего пучка (1.8), (1.12). Эволюция дрейфующего пучка (1.12) показана на фиг. 7, где  $a'_0, B'$  определены по (2.9)

$$2(\kappa/J) |P_0|^{1/2} w^{-1/2} |D| \equiv D'' = D' (B')^{-1/2} \quad (2.10)$$

Этот пучок не существует при поле  $B'$ , меньшем  $\pi/4$ . Вблизи этой точки асимпто-



Фиг. 6



Фиг. 7

тика (1.12) и адиабатические условия нарушаются. Третье решение уравнения  $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_0 &= (x - 1) (x^2 - 2x + 2) (x + 1)^{-1} x^{-2}, \quad 1 < x < 1.5 \\ u_{1(2)} &= 1 - x (\mp) | \sin \theta_0 | x \\ u_3 &= (x^2 - 2x + 2) (x^2 - 1)^{-1}, \quad \mu^2 = x^2 (3 - 2x) (x^2 - 1)^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

лишь незначительно выходит за рамки асимптотики холодного пучка (1.9). На фиг. 8 показаны функции

$$\begin{aligned} \frac{(J\kappa)^{1/2} a_0}{(|P_0| w^3)^{1/4}} \equiv a'_0 &= a' \Gamma^{-3/4}, \quad \frac{2 |w P_0|^{1/2}}{J\kappa} |B| \equiv B' = \Gamma^{1/2} \\ 2u_2 (\kappa/J)^{1/2} |P_0|^{1/4} - w^{-1/4} &\equiv u'_2 = u' \Gamma^{-1/4}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

описывающие эволюцию пучка в соответствии с (2.7), (1.9).

**3. Слоистый пучок.** Слоистый пучок можно построить из узких трубчатых пучков — слоев (по терминологии [2] токовых нитей), если параметры описанного выше пучка считать зависящими от номера слоя  $m$  и на границах соседних слоев шить напряженности поля и магнитный потенциал

$$H_z^+ - H_z^- = H_{z,m}^-, \quad A_0^+ - A_0^- + H_z^+ (r^+ + 1/2 d) d = A_{0,m}^- \quad (3.1)$$

$$H_z^\pm = (\kappa/r^\pm) \{ C \cos(\Phi \pm \gamma/2) + (1 + \lambda) \sin(\Phi \pm \psi_0') \}$$

$$H_\theta^+ - H_\theta^- = H_{\theta,m}^-, \quad r^+ - r^- + d = r_{,m}^- = r^-(m+1) - r^-(m) \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) вместе с сохранением  $J(m), w(m)$  (1.6) и условиями типа (2.1) на крайних слоях

$$m = 1, \quad H_\theta^- = 0, \quad ^{1/2} H_z^- r_-^2 = A_0^-, \quad m = M, \quad H_z^+ = B \quad (3.3)$$

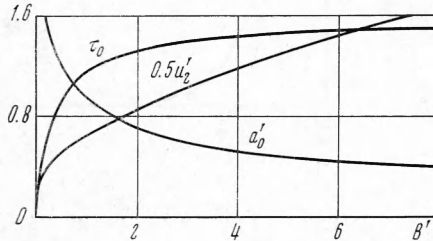
составляют краевую задачу для параметров  $R, \Phi, \mu, D, \varepsilon$  и зазора  $d$  между слоями. Ниже рассматриваются пучки с большим числом слоев  $M$  при плавной зависимости параметров от номера слоя, что отражено в (3.2). При этом уравнения (3.2) примут вид

$$\begin{aligned} H_0^- / \kappa &= C \sin(\Phi - \gamma/2) - \lambda \cos(\Phi - \psi_0') \equiv -S \\ R_{,m} &= 2a_0 + d, \quad S \equiv \int_1^m J / \kappa dm, \quad C \equiv \mu / \varepsilon \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для дрейфующего пучка (1.12) уравнения (3.4) с точностью до  $\varepsilon$  выглядят так:

$$\begin{aligned} v2R \cos \Phi &= hd - P_{\theta, m} / \kappa, \quad v \equiv \text{sign } C, \quad -h \equiv C \cos \Phi \\ R(h/R)_{,m} - 2(\sigma_0' \mu - v) \cos \Phi + 2\lambda v \cos \Phi &= \gamma C \sin \Phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

В случае  $P_{\theta, m} / R \ll 1$  уравнения (3.5) переходят в выражения для малых углов  $\gamma, \pi/2 - \Phi$ . Это однородное состояние. Необходимое внешнее поле определяется из (3.3) и пропорционально  $P_{\theta, m}(M)$ . При наиболее плотной упаковке слоев ( $d = 0$ ) из (1.6), (3.4) и соотношения  $\mu^2 a_0' \approx 1$  (см. фиг. 6) вытекает следующее распределение тока:



Фиг. 8

$$\begin{aligned} S &= \lambda(1) [R / R(1)]^{1/2} \\ J &= \lambda(1) [RR(1)]^{-1/2} w \end{aligned} \quad (3.6)$$

Полный ток  $\kappa S(M)$  может быть весьма большим.

Для пучка с холодными слоями (1.9), (1.10) необходимы малые  $\gamma$  и уравнения (3.1) принимают вид

$$\begin{aligned} (R \sin \Phi - P)_{,m} + hd &= 2R(\psi_0' \cos \Phi + \varepsilon \sigma_0' \sin \Phi) \\ R(h/R)_{,m} &= 2(\mu \sigma_0' - \psi_0') \cos \Phi + (2\varepsilon \sigma_0' + C\gamma) \sin \Phi \\ -h &\equiv C \cos \Phi + \sin \Phi \simeq RH_z^\pm / \kappa, \quad P \equiv P_\theta / \kappa \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если аксиальное поле внутри или снаружи пучка велико, то членами с  $\psi_0', \varepsilon \sigma_0'$  можно пренебречь

$$h \simeq P_{,R}, \quad R(P_{,R}/R)_{,R} + S_{,P}S = 0 \quad (3.8)$$

Функция  $S(P)$  определяется условиями на катоде. Элементарные катоды  $P = \text{const}$  должны быть расположены на разных уровнях магнитного потока. В целом катод пересекается магнитными силовыми линиями. Пример решения

$$\begin{aligned} S &= \{k_* [P - P(1)]\}^{1/2}, \quad P = 1/4 k_* [R^2 - R^2(1) + \\ &+ 2R^2 \ln R(M)/R(1)] - 1/2 R^2 B / \kappa, \quad k_* = \text{const} \end{aligned} \quad (3.9)$$

показывает, что ток  $\kappa S$  может быть большим при большом поле у катода. С уменьшением внешнего поля пучок несколько расширяется.

В пучке со встречными азимутальными токами при переходе от слоя к слою величины  $\mu, \sigma, \Phi, \gamma, \psi_0', A_\theta, H_z, P_\theta$  меняют знак. Переход к представлению

$$\mu \rightarrow (-1)^m \mu, \quad \vartheta \rightarrow (-1)^m \vartheta, \quad \dots, \quad P_\theta / \kappa \rightarrow (-1)^m P \quad (3.10)$$



приводит к знакопостоянным величинам и к изменению знаков перед  $H_z^-$ ,  $A_0^-$  в уравнениях (3.1)

$$\begin{aligned} & {}^{1/2}R (H_z^-/\kappa)_{,m} + C \cos \Phi \cos \gamma/2 + (1 + \lambda) \sin \Phi = \\ & = -\mu\sigma_0' \sin \Phi \sin \gamma/2, \quad 2\kappa(R \sin \Phi - P) = -dH_z^+R \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для холодного разреженного ( $a_0 \ll d$ ) пучка полная система уравнений выглядит так:

$$\begin{aligned} Rh(h/R)_{,m} + SS_{,m} &= 2h \sin \Phi, \quad hR_{,m} + 2R \sin \Phi = 2P \\ \operatorname{tg} \Phi &= 2\kappa h/J, \quad \operatorname{tg} \gamma/2 = h/S, \quad \pm H_z^\pm R \approx \kappa h \\ h(1) &= 2P/R - \sin \Phi, \quad h(M) \approx (-1)^M BR/\kappa - \sin \Phi \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ниже приведены два решения, соответствующие мощному локализованному пучку в условиях

$$S(M) \gtrsim M \gg 1, \quad |BP(M)| > (2 \div 3)\kappa \quad (3.13)$$

Первое условие обеспечивает компенсацию центробежных сил пинчевыми и равновесие. Нарушение второго условия приводит к быстрому росту радиуса внешних слоев. В рамках (3.13) угол  $\Phi$  близок к  $\pi/2$

$$\begin{aligned} S &= (\Pi_* m)^{1/2}, \quad P = P_*, \quad R = P_*(1 - ke^{-2f}) \\ hP_* &= Re^{2f} [U - (\Pi\kappa/2k) \ln(R/R(M))], \quad R(1) = P_*(1 - k) \\ m - 1 &= \int_0^f h df \approx {}^{1/2} [h - h(1) + \Pi_* f], \quad U = 2[(1 - k)^{-2} \approx \\ & \approx (\Pi_*/2k) \ln(R(M)/R(1)) - PB\kappa^{-1} \exp - 2f(M) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Звездочкой отмечены величины, выбранные постоянными. В случае

$$\begin{aligned} f(M) &> 2 \text{ и } |B| \approx (2 \div 3)\kappa/P_* \\ M &\approx {}^{1/2} \Pi_* f(M) - (1 - k)^{-1}, \quad S(M) = \Pi_* \sqrt{f(M)} \\ 1 - k &= [(\Pi_*/8) \ln(\Pi_*/8)]^{-1/2} \ll 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Во втором решении токи в слоях одинаковы

$$\begin{aligned} J/\kappa &= (1 + \omega_*^2)^{1/2}, \quad R = P_*(1 - ke^{-2f}), \quad P = P_* \\ hP_* &= RUe^f (\omega_*^{-1} \sin \omega_* f + \cos \omega_* f), \quad m_{,f} = h \end{aligned} \quad (3.16)$$

При малых  $\omega_*$  и минимальном  $B$  получается

$$U \approx 2(1 - k)^{-2}, \quad S(M) \approx M = U\omega_*^{-2} \exp \pi/2\omega_*$$

Здесь, как и в (3.14), модуль аксиального поля, начиная уже с больших  $U/P_*$  внутри пучка, экспоненциально растет, но далее возникает крутое падение почти до нуля у наружного слоя. Возможно, собственное поле такого пучка в состоянии обеспечить небольшой, но знакопеременный магнитный поток  $(-1)^{m+1} 2\pi P\kappa$  через катод, необходимый для формирования встречных азимутальных токов.

Теперь можно конкретизировать некоторые результаты в оценках, возвратившись к размерным величинам (0.4). Пусть в системе [1] катодом служит кольцевое лезвие радиуса  $R_k$ , направленное вдоль магнитной силовой линии

$$P_0 = -B_k R_k^2 e/2c = \text{const}$$

Пусть обратные токи диссипировали и собственное поле пучка соизмеримо или же превышает внешнее поле  $B$ .

При больших внешних полях у катода  $B_k \sim 1.7(\kappa/a) \text{ кэ}\cdot\text{см}$  и больших токах  $J \sim \kappa(R_k/a) 8.5 \text{ ка}$  пучок приобретает трубчатую форму с толщиной  $a \ll R_k$ . При плавном выводе из внешнего поля пучок не очень сильно меняет свою структуру, уравниваясь собственными (внутренним аксиальным и наружным азимутальным) полями, соизмеримыми с  $B_k$ . Траектории в среднем наматываются на цилиндр радиуса  $c^2 P_0 / eJ \sim R_k$  под углом в  $45^\circ$ , плотность осцилляторной энергии остается соизмеримой с поступательной и вращательной. Уменьшая ток до  $J \sim 8.5 \kappa \text{ ка}$ , можно получить дрейфующий пучок (1.12) (фиг. 6), в котором практически вся погонная плотность энергии  $\sim \kappa^2 R/a \text{ дж/см}$  обусловлена поперечными осцилляциями и соизмерима с плотностью энергии сильноточного пучка. Такой пучок интересен как максимально плотный поток сильно нелинейных осцилляторов для получения интенсивного излучения. Однако дрейфующий пучок разрушается при полях, существенно меньших  $1.7(\kappa/a) \text{ кэ}\cdot\text{см}$ . Переход через диафрагму должен приводить к увеличению осцилляторной доли энергии. Увеличивая далее внешнее поле в слаботочных пучках, можно адиабатически преобразовывать поступательную и вращательную энергии в осцилляторную (фиг. 5).

В слабом внешнем поле  $B_k \sim 1.7(\kappa/B_k) \text{ кэ}\cdot\text{см}$  пучок будет узким трубчатым с малой осцилляторной энергией, если проходит диафрагму под малым углом к внешнему полю. При выводе из внешнего поля радиус холодного пучка заметно увеличивается (фиг. 3, 4). Существенное противодействие пинчевому сжатию в холодном пучке оказывают центробежные силы. Поэтому азимутальное наружное поле заметно больше аксиального внутреннего и увеличение азимутальных токов и связанное с этим увеличение центробежных сил приводит к резкому увеличению предельных токов (фиг. 4). Если же сформировать концентрические трубчатые пучки со встречными азимутальными токами, то при максимальных центробежных силах аксиальные поля будут почти компенсироваться. Внешнее поле, необходимое для локализации слоистого пучка в радиусе  $R$ , оказывается небольшим  $1.7(\kappa/R) \text{ кэ}\cdot\text{см}$ , а общий ток  $\kappa M 8.5 \text{ ка}$  пропорционален числу слоев  $M$ . Здесь нужна серия концентрических катодов, охватывающих знакопередающиеся магнитные потоки порядка  $2\pi R \kappa 1.7 \text{ кэ}\cdot\text{см}$ . Приведенные оценки нужного внешнего поля у катода  $B_k$  сильно завышены, так как не учитывалось собственное аксиальное поле, которое в рассматриваемых пучках направлено в ту же сторону, что и внешнее  $B_k$ , и существенно увеличивает полное поле у катода.

Для существования описанных состояний важна сильноточность. Уменьшение релятивистского фактора  $\kappa$  и пропорциональное изменение токов не изменяет структуры пучка.

Автор благодарит А. Н. Иевлеву за большую помощь в расчетах.

Поступила 7 IV 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts T. G., Bennett W. H. The pinch effect in pulsed streams at relativistic energies. Plasma Phys., 1968, vol. 10, No. 4.
2. Иванов А. А., Рудakov Л. Н. Мощный релятивистский пучок электронов в плазме. ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 4.
3. Данилов В. Н. К расчету параметров электронного пучка, дрейфующего поперек сильного однородного магнитного поля. ПМТФ, 1968, № 2.