

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 519.246:551.551

Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями.

Часть 2. Показатель степени больше единицы

В.А. Федоров*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 27.06.2018 г.; после доработки 22.10.2018 г.

Рассматривается частотное поведение спектральных вкладов начальных, средних и «конечных» участков степенной структурной функции (при показателе степени больше единицы) в спектральную плотность (СП) случайного процесса со стационарными приращениями. Показано, что оно значительно сложнее строго положительной монотонной степенной частотной зависимости исходной СП, которой соответствует только поведение спектрального вклада начального участка данной структурной функции. Представлены и проанализированы аналитические аппроксимационные зависимости частотного поведения всех указанных спектральных вкладов. Они рекомендуются для широкого практического использования.

Ключевые слова: случайный процесс со стационарными приращениями, степенная структурная функция, спектральная плотность, спектральные вклады; random process with stationary increments, power-law structure function, spectral density, spectral contribution.

Введение

В первой части статьи [1] проанализировано частотное поведение спектральных вкладов начальных $W_{0,1}(\omega)$, средних $W_{1,2}(\omega)$ и «конечных» участков $W_{2,\infty}(\omega)$ степенной структурной функции $D_\mu(\tau) = C^2|\tau|^\mu$ (при показателе степени μ меньше единицы) в спектральную плотность (СП) случайного процесса со стационарными приращениями (СПСП) $W(\omega)$. Здесь τ – сдвиг во времени ($-\infty < \tau < \infty$), C^2 – структурная характеристика соответствующей размерности [2, 4–7]. Показано, что их частотное поведение значительно сложнее строго положительной монотонной степенной зависимости исходной СП, имеющей вид

$$W(\omega) = \frac{C^2 \mu \Gamma(\mu)}{2\pi\omega^{(\mu+1)}} \sin \frac{\pi\mu}{2}, \quad (1)$$

где $\Gamma(\mu)$ – гамма-функция. Соотношение (1) справедливо при $0 < \mu < 2$ ($\mu \neq 1$). При этом всегда положительны только значения $W_{0,1}(\omega)$. Наблюдается модуляция хода $W(\omega)$ некоторыми строго положительными квазипериодическими функциями. Но средний частотный спад $W_{0,1}(\omega)$ соответствует таковому для исходной СП $W(\omega)$ (1), т.е. с увеличением частоты ω уменьшается обратно пропорционально ее степени ($\mu + 1$).

Все другие спектральные вклады знакопеременны. Характерным является то, что с ростом частоты средняя скорость спада $W_{1,2}(\omega)$ и $W_{2,\infty}(\omega)$ практически одинакова, не зависит от величины параметра μ и приближается к обратно пропорциональной частотной квадратичной зависимости, т.е. выполняются соотношения

$$W_{1,2}(\omega) = O(\omega^{-2}), \quad W_{2,\infty}(\omega) = O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Таким образом, частотный ход данных спектральных вкладов *не соответствует* исходному поведению спектральной плотности $W(\omega)$ (1).

В [1] представлены и проанализированы аналитические аппроксимационные зависимости частотного поведения всех указанных спектральных вкладов. В частности, из них следуют полученные численными методами вышеотмеченные выводы об их асимптотическом поведении.

Материал, изложенный в [1], позволяет более правильно понять и интерпретировать спектрально-структурные связи СПСП со степенной структурной функцией (СФ), в том числе и заданной на различных ограниченных интервалах временных (или пространственных) сдвигов, при $0 < \mu < 1$. В данной статье проведем аналогичное исследование указанных спектральных вкладов для показателя степени СФ $D_\mu(\tau)$ в диапазоне $1 < \mu < 2$. При этом исходное выражение для определения СП, приводящее к соотношению (1), имеет вид [1–4]:

* Валерий Александрович Федоров (fva21@iao.ru).

$$W(\omega) = \frac{C^2 \mu (\mu - 1)}{2\pi \omega^2} \int_0^{\infty} \tau^{\mu-2} \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (3)$$

Отметим, что проведенные ранее исследования [7, 8] показали, что повторяемость случаев $1 < \mu < 2$ гораздо меньше, чем случаев $0 < \mu < 1$. Тем не менее для полноты исследований целесообразно провести анализ для всех возможных значений μ из диапазона $0 < \mu < 2$.

Оценка спектральных вкладов

$W_{0,1}(\omega)$ начального участка

СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$.

Область задания $|\tau| \leq \tau_1 < \infty$

Из выражения (3) непосредственно вытекает оценка искомого спектрального вклада:

$$W_{0,1}(\omega) = \frac{C^2 \mu (\mu - 1)}{2\pi \omega^2} \int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-2} \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (4)$$

Результаты расчетов соотношения (4) показывают, что характер поведения спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$ для $1 < \mu < 2$ существенно отличается от случая $0 < \mu < 1$ [1] и что начиная с $\mu \approx 1,7$ и выше анализируемая функция $W_{0,1}(\omega)$ является знакопеременной. На низких частотах она всегда положительна, однако насыщения не наблюдается.

На рис. 1 в терминах циклических частот представлены нормированные на C^2 значения СП (обозначены $W(f)$), соответствующие СФ $D_\mu(\tau)$ при $\mu = 1,01$ и $1,99$. Показаны и рассчитанные по соотношению (4) спектральные вклады $W_{0,1}(f)$ (для $\mu = 1,99$ – модуль) их начальных участков длительностью $\tau_1 = 10$ с. Обращает на себя внимание разное поведение $W_{0,1}(f)$ для $\mu = 1,01$ и $1,99$. В первом случае наблюдается небольшое мультипликативное взвешивание исходной спектральной зависимости (1) строго положительной квазипериодической функцией $K_{0,1}(f)$ с «периодом» $F_1 \approx 1/\tau_1 = 0,1$ Гц. Поэтому отличия $W_{0,1}(f)$ от $W(f)$ незначительны. Это верно для всех значений μ в диапазоне $1 < \mu \leq 1,50$. Об этом свидетельствуют результаты расчетов $W_{0,1}(f)$ в большом диапазоне значений τ_1 . Для $1,5 < \mu < 1,7$ указанные осцилляции увеличиваются. Однако поведение их средних значений, так же как при $0 < \mu < 1$, соответствует частотному ходу (1), т.е. с точностью до константы справедливо $W_{0,1}(f) \sim \omega^{-(\mu+1)}$, $\omega \rightarrow \infty$.

Во втором случае ($\mu = 1,99$) график $W_{0,1}(f)$ носит знакопеременный, сильно осциллирующий характер относительно $W(f)$. Значительные модуляции данного спектрального вклада наблюдаются для всех μ в диапазоне $1,75 \leq \mu < 2,0$. Так, для $\mu = 1,75$ на низких частотах присутствуют отрицательные значения $K_{0,1}(f)$, не превышающие по модулю 0,5 единиц. При этом их положительный максимум

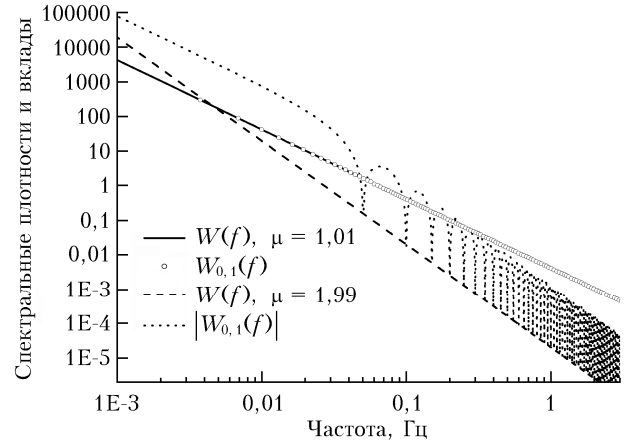


Рис. 1. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ для степенной СФ и спектральный вклад $W_{0,1}(f)$ ее начального участка длительностью $\tau_1 = 10$ с при $\mu = 1,01$ и $|W_{0,1}(f)|$ при $\mu = 1,99$

не превышает 3 единиц. С увеличением μ происходит как расширение области отрицательных значений $K_{0,1}(f)$, так и их сильнейший рост. В частности, для $\mu = 1,99$ амплитуда знакопеременных осцилляций $K_{0,1}(f)$ превышает уже 60 единиц. Но средний частотный спад $W_{0,1}(f)$ по-прежнему соответствует спаду $W(f)$. При этом можно записать

$$W_{0,1}(\omega) = O(\omega^{-(\mu+1)}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В [1] для $0 < \mu < 1$ получены и проанализированы составные аналитические аппроксимационные зависимости поведения $W_{0,1}(\omega)$ на частотном интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Представим аналогичный материал для $1 < \mu < 2$. Первую составляющую для $\omega \tau_1 \ll 1$ получим из выражения (4) с учетом трех членов разложения Маклорена функции $\cos(\omega \tau)$. Вторую для $\omega \tau_1 \gg 1$, как и в [1], получим следуя теореме Эрдели [9], предварительно записав:

$$\int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-2} \cos(\omega \tau) d\tau = \text{Re} \left\{ \int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-2} \exp(i\omega \tau) d\tau \right\},$$

где Re – вещественная часть комплексного выражения в фигурных скобках. Затем используем результаты, приведенные в [9], с дальнейшим обратным выделением соответствующей реальной компоненты. В результате после ряда преобразований можно записать общее аппроксимационное выражение для спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$ при $1 < \mu < 2$:

$$W_{0,1}(\omega) \approx W_{0,1\text{apr}}(\omega) = \begin{cases} \frac{C^2 \mu (\mu - 1) \tau_1^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \left\{ \frac{1}{\mu - 1} - \frac{(\omega \tau_1)^2}{2(\mu + 1)} + \frac{(\omega \tau_1)^4}{24(\mu + 3)} \right\}, & \omega \leq \omega_b, \\ W(\omega) + \frac{C^2 \mu (\mu - 1) \tau_1^{\mu-2}}{2\pi \omega^3} \left\{ \sin \omega \tau_1 + \frac{(\mu - 2)}{\omega \tau_1} \cos \omega \tau_1 \right\}, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (6)$$

Напомним, что СП $W(\omega)$ в нижней строке данного выражения вычисляется по формуле (1).

Заметим, что при неограниченном возрастании τ_1 величина граничной частоты ω_b стремится к нулю и справедлива только нижняя часть выражения (6); значения $W_{0,1\text{apr}}(\omega)$ приближаются к СП $W(\omega)$, т.е. выполняется $\lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} W_{0,1\text{apr}}(\omega) = W(\omega)$.

В качестве меры точности аппроксимации $W_{0,1}(\omega)$ функцией $W_{0,1\text{apr}}(\omega)$ использовалась как их разность $d(\omega) = W_{0,1\text{apr}}(\omega) - W_{0,1}(\omega)$, так и относительная процентная ошибка $\varepsilon(\omega) = [d(\omega)/W_{0,1}(\omega)] \cdot 100$. Выбор граничной частоты ω_b проводился исходя из минимизации «переходных» ошибок $\varepsilon(\omega)$ между двумя областями аппроксимации. В итоге был осуществлен следующий выбор $\omega_b = 2\pi f_b$:

$$f_b = \begin{cases} f_{b0} + 10/64\tau_1, & 1 < \mu \leq 1,1; \\ f_{b0} + 9/64\tau_1, & 1,1 < \mu \leq 1,35; \\ f_{b0} + 8/64\tau_1, & 1,35 < \mu \leq 1,5; \\ f_{b0} + 7/64\tau_1, & 1,5 < \mu \leq 1,7; \\ f_{b0} + 6/64\tau_1, & 1,7 < \mu \leq 1,8; \\ f_{b0} + 3/64\tau_1, & 1,8 < \mu \leq 1,9; \\ f_{b0}, & 1,9 < \mu < 2; \end{cases} \quad (7)$$

где $f_{b0} = 1/4\tau_1$, или $\omega_{b0} = 2\pi f_{b0} = \pi/2\tau_1$.

Отметим, что для интервала $1 < \mu < 2$ характер поведения ошибок $\varepsilon(\omega)$ более сложен, чем для $0 < \mu < 1$. Это объясняется тем, что в данном случае аппроксимируемая функция $W_{0,1}(\omega)$ при $\omega > \omega_b$ может быть знакопеременной. Оценить, при какой величине параметра $\mu = \mu_0$ функция $W_{0,1}(\omega) \approx W_{0,1\text{apr}}(\omega)$ является таковой, можно из соотношения (6). Для этого рассмотрим ее значения на частотах $\omega_l = \pi(4l+3)/2\tau_1$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Тогда главный синусоидальный член в фигурных скобках является отрицательным, а второй — нулевым. Таким образом, приходим к необходимости анализа выражения

$$\Delta(\mu) = \left[\frac{\pi(4l+3)}{2} \right]^{2-\mu} \cdot \Gamma(\mu) \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - (\mu-1) < 0.$$

Его численное решение дает минимальное значение $\mu_0 \approx 1,69$ при $l = 0$. Следовательно, при $\mu \geq 1,69$ функция $W_{0,1}(\omega)$ является знакопеременной. Этот вывод полностью подтверждается результатами проведенных расчетов (см., например, рис. 1).

В целом при всех $1 < \mu < 2$ в переходной зоне от ω_{b0} до $2\omega_{b0}$ ошибки аппроксимации незначительны и не превышают нескольких процентов. В остальной области частотного диапазона при удалении от $2\omega_{b0}$ величиной $|\varepsilon(\omega)|$ при $1 < \mu \leq 1,50$ можно пренебречь из-за ее крайней малости (десятые и менее доли процента). Для $1,5 < \mu < 1,69$ значение $|\varepsilon(\omega)|$ при некотором удалении от $2\omega_{b0}$ может даже несколько возрасти (до 12% при $\mu = 5/3$). Это объясняется непропорциональным уменьшением $W_{0,1}(\omega)$ из-за увеличения осцилляций $K_{0,1}(\omega)$ при относительно стабильной абсолютной ошибке $d(\omega)$. Отмеченное наблюдается на небольшом участке частот-

ного интервала. На остальной его части величины $|\varepsilon(\omega)|$ незначительны. Можно констатировать, что частотное поведение $\varepsilon(\omega)$ для $1 < \mu < 1,69$ подобно такому для $0 < \mu < 1$, которое анализировалось в работе [1].

Для $1,69 \leq \mu < 2$ аппроксимируемая функция $W_{0,1}(\omega)$ при $\omega > \omega_b$ знакопеременна. Поэтому значения $|\varepsilon(\omega)|$ могут резко увеличиваться вблизи ее нулевых значений даже при существенном уменьшении $|d(\omega)|$. Так, при $\tau_1 = 10$ с, $\mu = 1,99$ значения $|\varepsilon(\omega)|$ достигают максимума в 42% на частоте $f_k = 0,0503125$ Гц. Существуют и другие всплески $|\varepsilon(\omega)|$, но они уже незначительны. Подобные зависимости характеризуют поведение абсолютных и относительных ошибок аппроксимации функции $W_{0,1}(\omega)$ и для других значений τ_1 с учетом изменения соответствующих частотных масштабов. Однако такие резкие увеличения $|\varepsilon(\omega)|$ наблюдаются на чрезвычайно малых частотных интервалах при почти нулевых значениях аппроксимируемой функции и поэтому не приводят к значимым отклонениям хода $W_{0,1\text{apr}}(\omega)$ от $W_{0,1}(\omega)$.

Заметим, что из выражения (6) следует ранее полученный численными методами вывод (5). Также $W_{0,1}(\omega)$ для $\omega > \omega_b$ можно представить в мультипликативном виде

$$W_{0,1}(\omega) \approx W_{0,1\text{apr}}(\omega) = W(\omega) \cdot K_{0,1\text{apr}}(\omega),$$

где

$$K_{0,1\text{apr}}(\omega) = 1 + \frac{(\mu-1) \cdot (\omega\tau_1)^{\mu-2}}{\Gamma(\mu) \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \left\{ \sin\omega\tau_1 + \frac{(\mu-2)}{\omega\tau_1} \cos\omega\tau_1 \right\}.$$

Это соотношение полностью соответствует вышерассмотренному поведению $K_{0,1}(\omega)$.

Оценка спектральных вкладов

$W_{1,2}(\omega)$ среднего участка

СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$.

Область задания $\tau_1 \leq |\tau| \leq \tau_2$

Из соотношения (3) непосредственно следует

$$W_{1,2}(\omega) = \frac{C^2 \mu (\mu-1)}{2\pi\omega^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{\mu-2} \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (8)$$

На рис. 2 после численного интегрирования (8) представлены нормированные на C^2 значения модулей спектральных вкладов $W_{1,2}(f)$ участков степенной СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 100$ с при $\mu = 1,01$ и $1,99$. В отличие от вкладов начальных участков $W_{0,1}(f)$ они всегда знакопеременны, а вследствие взаимодействия двух спектральных масштабов $1/\tau_1$ и $1/\tau_2$ носят более сложный частотный характер. В сравнении с предыдущим вариантом $0 < \mu < 1$ [1] насыщения $W_{1,2}(f)$ при данных μ на малых частотах не наблюдается. С ростом ω средняя скорость

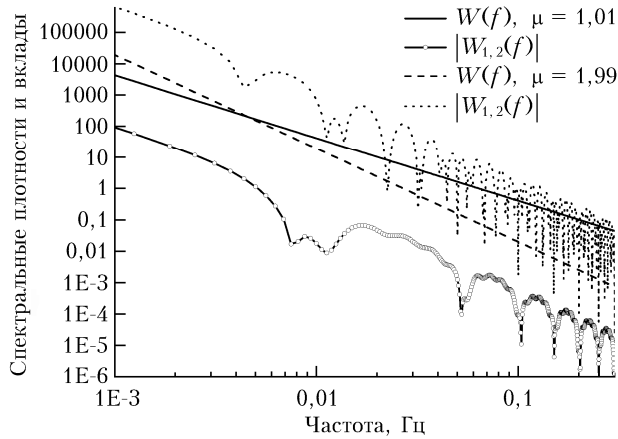


Рис. 2. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ и вклады $|W_{1,2}(f)|$ в нее средних участков СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 100$ с при $\mu = 1,01$ и $1,99$

спада модуля $W_{1,2}(f)$ так же, как и для $0 < \mu < 1$, практически не зависит от величины параметра μ , но при этом приближается уже к обратно пропорциональной кубической зависимости. Поэтому асимптотическое поведение $|W_{1,2}(\omega)|$ снова не соответствует соотношениям (1) и (5). Это различие наиболее велико при значениях μ , несущественно превышающих единицу, что и показано на рис. 2. Можно констатировать, что $W_{1,2}(\omega)$ при $1 < \mu < 2$ является знакопеременной функцией с асимптотическим поведением:

$$W_{1,2}(\omega) \sim O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (9)$$

На практике для определения $W_{1,2}(\omega)$ вместо интегрирования (8) целесообразно использовать тождество $W_{1,2}(\omega) = W_{0,2}(\omega) - W_{0,1}(\omega)$, где $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$ – спектральные вклады начальных участков СФ $D_\mu(\tau)$ на интервалах $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $0 \leq \tau \leq \tau_1$ соответственно. Их нужно вычислить отдельно для значений τ_2 и τ_1 , следуя соответствующим аналитическим выражениям (6), (7). При этом для определения $W_{0,2}(\omega)$ во всех указанных соотношениях величину τ_1 необходимо заменить на τ_2 . В итоге результаты проведенных расчетов $W_{1,2\text{apr}}(\omega)$ хорошо совпадают с ранее полученными численными методами. Их точностные характеристики подобны таковым при аппроксимации знакопеременной функции $W_{0,1}(\omega)$ для $1,69 \leq \mu < 2$. Так, относительные ошибки $|\varepsilon(\omega)|$ могут быть завышены вблизи перехода $W_{1,2}(\omega)$ через ноль даже при существенном уменьшении абсолютных ошибок $|d(\omega)|$. Однако, как отмечалось выше, резкие увеличения $|\varepsilon(\omega)|$ наблюдаются лишь на малых частотных интервалах и не приводят к значимым отклонениям графика $W_{1,2\text{apr}}(\omega)$ от хода $W_{1,2}(\omega)$. Указанное подтверждается большим объемом проведенных расчетов при широком варьировании значений τ_1 и τ_2 .

Используя соотношение (6), аппроксимационные выражения для $W_{1,2}(\omega)$ можно записать и без разделения на $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$:

$$W_{1,2\text{apr}}(\omega) = \begin{cases} \frac{C^2 \mu (\mu - 1)}{2\pi \omega^2} \left\{ \frac{\tau_2^{\mu-1} - \tau_1^{\mu-1}}{\mu - 1} - \frac{\tau_2^{\mu-1} \beta_2^2 - \tau_1^{\mu-1} \beta_1^2}{2(\mu + 1)} + \frac{\tau_2^{\mu-1} \beta_2^4 - \tau_1^{\mu-1} \beta_1^4}{24(\mu + 3)} \right\}, & \omega \leq \omega_{b2}, \\ \frac{C^2 \mu (\mu - 1)}{2\pi \omega^3} \left\{ \tau_2^{\mu-2} \left[\sin \beta_2 + \frac{(\mu - 2)}{\beta_2} \cos \beta_2 \right] - \tau_1^{\mu-2} \left[\sin \beta_1 + \frac{(\mu - 2)}{\beta_1} \cos \beta_1 \right] \right\}, & \omega > \omega_{b1}. \end{cases}$$

где $\beta_1 = \omega \tau_1$, $\beta_2 = \omega \tau_2$, ω_{b1} соответствует ω_b из выражения (7), а для нахождения ω_{b2} необходимо в (7) величину τ_1 заменить на τ_2 . При этом на указанных частотных интервалах будет обеспечена точность аппроксимации не хуже, чем при раздельном вычислении разности $W_{0,2\text{apr}}(\omega)$ и $W_{0,1\text{apr}}(\omega)$. Для определения $W_{1,2\text{apr}}(\omega)$ на частотах $\omega_{b2} < \omega \leq \omega_{b1}$ можно использовать любое из приведенных соотношений, но хорошая точность аппроксимации при этом не гарантируется. Более конкретный выбор одной переходной частоты затруднен из-за возможной большой вариации значений τ_1 и τ_2 . Поэтому раздельное вычисление $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$ предпочтительнее. С другой стороны, приведенные в последнем виде соотношения для $W_{1,2\text{apr}}(\omega)$ дают ясное представление о поведении спектральных вкладов $W_{1,2}(\omega)$ практически на всем участке частотного диапазона. Они подтверждают ранее полученные численными методами выводы (9).

Оценка спектральных вкладов $W_{2,\infty}(\omega)$ «конечного» участка СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$. Область задания $\tau_2 \leq |\tau| < \infty$

Для полноты изложения оценим вклад $W_{2,\infty}(\omega)$ указанного участка СФ в СП $W(\omega)$. Из соотношения (3) непосредственно следует

$$W_{2,\infty}(\omega) = \frac{C^2 \mu (\mu - 1)}{2\pi \omega^2} \int_{\tau_2}^{\infty} \tau^{\mu-2} \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (10)$$

На рис. 3 после численного интегрирования (10) представлены модули знакопеременных спектральных вкладов $W_{2,\infty}(\omega)$ при $\tau_2 = 100$ с и $\mu = 1,01$ и $1,99$. Их частотные ходы во многом подобны таковым для $|W_{1,2}(f)|$, но менее изрезаны. Так, на низких частотах функция $W_{2,\infty}(\omega)$ всегда неограниченно положительна. С ростом частоты средняя скорость спада модуля $|W_{2,\infty}(f)|$ практически не зависит от параметра μ и стремится к обратно пропорциональной частотной кубической зависимости. Поэтому асимптотическое поведение $|W_{2,\infty}(f)|$ снова не соответствует исходному поведению СП $W(\omega)$. Указанное различие наиболее велико при значениях μ , несущих

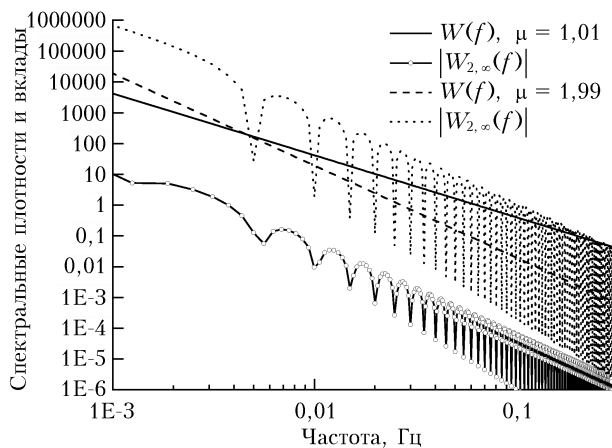


Рис. 3. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ и вклады $|W_{2,\infty}(f)|$ в нее «конечных» участков СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_2 = 100$ с до $\tau \rightarrow \infty$ при $\mu = 1,01$ и $1,99$

щественно превышающих единицу, что показано на рис. 3. Можно констатировать, что $W_{2,\infty}(\omega)$, как и $W_{1,2}(\omega)$, при $1 < \mu < 2$ является знакопеременной функцией с асимптотическим поведением (9).

Аналитические аппроксимации зависимостей $W_{2,\infty}(\omega)$ можно получить из выражений (6):

$$W_{2,\infty \text{ apr}}(\omega) = \begin{cases} W(\omega) - \frac{C^2 \mu (\mu - 1) \tau_2^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\mu - 1} - \frac{(\omega \tau_2)^2}{2(\mu + 1)} + \frac{(\omega \tau_2)^4}{24(\mu + 3)} \right\}, & \omega \leq \omega_b, \\ -\frac{C^2 \mu (\mu - 1) \tau_2^{\mu-2}}{2\pi \omega^3} \left\{ \sin \omega \tau_2 + \frac{(\mu - 2)}{\omega \tau_2} \cos \omega \tau_2 \right\}, & \omega > \omega_b, \end{cases}$$

где значения ω_b определяются из соотношения (7) при замене τ_1 на τ_2 .

При уменьшении τ_2 до нуля величина граничной частоты ω_b стремится к бесконечности и справедлива только верхняя часть последнего выражения. В итоге значения $W_{2,\infty \text{ apr}}(\omega)$ приближаются к СП $W(\omega)$, т.е. выполняется $\lim_{\tau_2 \rightarrow 0} W_{2,\infty \text{ apr}}(\omega) = W(\omega)$.

Результаты проведенных расчетов $W_{2,\infty \text{ apr}}(\omega)$ хорошо совпадают с результатами численного интегрирования соотношения (10). При этом ошибки аппроксимации в целом незначительны и их поведение аналогично таковому для знакопеременных спектральных вкладов $W_{1,2}(\omega)$.

На рис. 4 показано разложение нормированной СП $W(f)$ вблизи нулевых частот на три ее спектральных вклада для $\mu = 1,75$, $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 100$ с. Отрицательные значения $W_{0,1}(f)$, которые начинаются с циклической частоты $f = 0,0625$ Гц, не показаны. Однако, суммирование указанных вкладов дает строго положительную исходную СП $W(\omega)$.

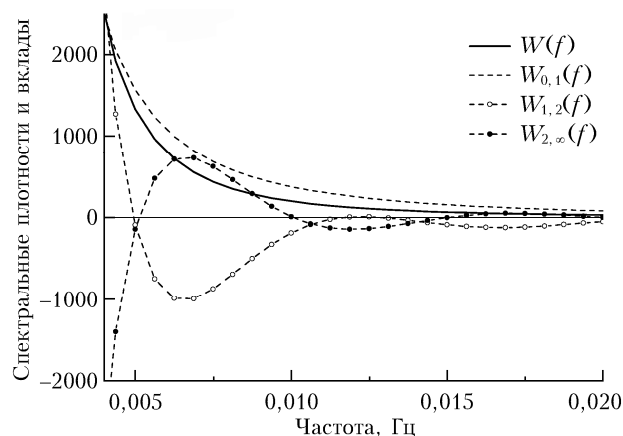


Рис. 4. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ и вклады в нее начальных $W_{0,1}(f)$, средних $W_{1,2}(f)$ и «конечных» $W_{2,\infty}(f)$ участков степенной СФ при $\mu = 1,75$, $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 100$ с

Заключение

Из представленного материала следует, что частотное поведение спектральных вкладов начальных $W_{0,1}(\omega)$, средних $W_{1,2}(\omega)$ и «конечных» $W_{2,\infty}(\omega)$ участков степенной СФ СПСП $D_\mu(\tau)$ для $1 < \mu < 2$ значительно сложнее строго положительной монотонной степенной частотной зависимости исходной СП $W(\omega)$, заданной формулой (1). Обнаружены и существенные отличия их поведения относительно случая $0 < \mu < 1$ [1].

Так, в отличие от $0 < \mu < 1$, в рассматриваемом случае значения $W_{0,1}(\omega)$ всегда положительны только при $1 < \mu < 1,69$. При этом также наблюдается модуляция монотонного хода $W(\omega)$ некоторыми строго положительными квазипериодическими функциями. Их колебательный характер определяется величинами τ_1 и μ . Причем амплитуда осцилляций увеличивается с ростом параметра μ внутри этого интервала. Далее при $1,69 \leq \mu < 2$ функция $W_{0,1}(\omega)$ знакопеременна, причем с ростом μ наблюдается особенно сильное возрастание ее осцилляций.

Важно заметить, что для всего интервала рассматриваемых значений параметра $1 < \mu < 2$ справедливо выражение (5). Следовательно, средний частотный спад спектрального вклада начального участка степенной СФ $W_{0,1}(\omega)$ соответствует спаду исходной СП $W(\omega)$ вида (1), т.е. с увеличением частоты ω уменьшается обратно пропорционально ее степени $(\mu + 1)$.

Все другие спектральные вклады всегда знакопеременны. При этом наиболее сложный частотный характер вследствие взаимодействия двух спектральных масштабов $1/\tau_1$ и $1/\tau_2$ наблюдается у $W_{1,2}(\omega)$. Характерным является то, что с ростом частоты средняя скорость спада $W_{1,2}(\omega)$ и $W_{2,\infty}(\omega)$ практически одинакова и не зависит от величины параметра μ . Но в отличие от диапазона $0 < \mu < 1$ она приближается к обратно пропорциональной кубической зависимости, т.е. выполняется соотношение (9).

Иными словами, асимптотическое частотное поведение данных спектральных вкладов не соответствует не только исходному поведению СП $W(\omega)$ в форме (1), но и менее строгому выражению (5).

В статье представлены и проанализированы аналитические аппроксимационные зависимости поведения спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$, $W_{1,2}(\omega)$, $W_{2,\infty}(\omega)$ на всем частотном интервале ω . Показана их высокая точность для описания частотных ходов указанных вкладов при всех возможных значениях μ , τ_1 и τ_2 . В частности, из этих зависимостей следуют полученные численными методами выводы об их асимптотическом поведении. Указанные аппроксимационные зависимости рекомендуются для практического использования.

Представленные результаты позволяют более правильно понять и интерпретировать спектрально-структурные связи СПСП со степенной СФ, в том числе и заданной на различных ограниченных интервалах временных (или пространственных) сдвигов.

1. Федоров В.А. Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями. Часть 1. Показатель степени меньше единицы // Оптика атмосф. и океана. 2018. Т. 31, № 12. С. 955–961.
2. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
4. Рытов С.М., Кравицов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
5. Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 359 с.
6. Юшков В.П. Структурная функция энтропии и масштабы турбулентности // Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2012. № 4. С. 62–68.
7. Гладких В.А., Невзорова И.В., Одинцов С.Л., Федоров В.А. Структурные функции температуры воздуха над неоднородной подстилающей поверхностью. Часть II. Статистика параметров структурных функций // Оптика атмосф. и океана. 2013. Т. 26, № 11. С. 955–963; Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L., Fedorov V.A. Structure functions of air temperature over an inhomogeneous underlying surface. Part II. Statistics of structure functions' parameters // Atmos. Ocean. Opt. 2014. V. 27, N 2. P. 154–163.
8. Гладких В.А., Невзорова И.В., Одинцов С.Л., Федоров В.А. Структурные функции компонент вектора ветра над неоднородной подстилающей поверхностью // Оптика атмосф. и океана. 2014. Т. 27, № 10. С. 882–890; Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L., Fedorov V.A. Structure functions of wind velocity components over an inhomogeneous underlying surface // Atmos. Ocean. Opt. 2015. V. 28, N 3. P. 273–281.
9. Панулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 496 с.

V.A. Fedorov. Spectral contributions of sections of power-law structure function of random processes with stationary increments. Part 2. The exponent is greater than one.

The frequency behavior of the spectral contributions of the initial, middle, and “finite” parts of the power-law structure function (with an exponent less than one) to the spectral density (SD) of a random process with stationary increments is considered. It is shown that it is much more complicated than the strictly positive monotonic power-law frequency dependence of the initial SD. The latter corresponds only to the behavior of the spectral contribution of the initial section of the given structure function. The analytical approximate dependences of the frequency behavior of all these spectral contributions are presented and analyzed. They are recommended for wide practical use.