

Автор благодарит Л. В. Овсянникова, А. А. Дерибаса, Р. М. Гарипова за обсуждение результатов, В. В. Дейнеко, Л. Н. Щеглову, Н. Г. Анникову за помощь в проведении численных расчетов.

Поступила 12 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Дересевич Г. Механика зернистой среды.— В кн.: Проблемы механики. М.: ИЛ, 1961.
2. Черный Г. И. Распространение плоских волн сжатия в зернистой упругопластической среде.— В кн.: Взрыв в пористых и дисперсных средах. Киев: Наукова думка, 1969.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
4. Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. M. Collected Works of Enrico Fermi. Vol.2. Chicago, 1965.
5. Tsai D. H., Beckett C. W. Shock wave propagation in cubic lattices.— J. Geophys. Res., 1966, vol. 71, N 10.
6. Hill T. G., Knopoff L. Propagation of shock waves in one-dimensional crystal lattices.— J. Geophys. Res., 1980, vol. 85, N B12.
7. Strenzwik D. F. Shock profiles caused by different end conditions in one-dimensional quiescent lattices.— J. Appl. Phys., 1979, vol. 50, N 11.
8. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.

УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Л. А. Назаров

(Новосибирск)

Задача о колебаниях упругого полупространства под действием внутреннего источника типа расширение — сжатие была решена в [1]. В [2] рассмотрено установившееся движение безграничной упругой среды при действии виброисточника с неоднородными граничными условиями, где исследовалась в основном зависимость амплитуды смещений от частоты граничной нагрузки. В данной работе указан способ получения полей смещений и напряжений в слоистых средах с плоскопараллельными границами раздела, если граничные условия заданы аналогично [2]. Для чего методом разделения переменных вычисляются потенциалы в сферической системе координат, которые потом записываются в цилиндрической системе. В качестве иллюстрации приводятся теоретические осциллограммы смещений на поверхности полупространства при действии «распорного» источника. Получена асимптотическая формула для смещений в окрестности фронтов волн при действии виброисточника.

1. В сферической системе координат (R, θ, χ) рассмотрим класс источников, симметричных относительно некоторой прямой. Совместим эту прямую с осью z цилиндрической системы координат (r, χ, z) (фиг. 1). Плоскость $z = 0$ разделяет пространство на части с различными физическими свойствами либо является свободной поверхностью полупространства.

Пусть на сфере радиуса R_0 с центром в точке $(0, 0, h)$ цилиндрической системы координат задано некоторое распределение смещений

$$(1.1) \quad u_R|_{R=R_0} = U_R(\theta) f(t), \quad u_\theta|_{R=R_0} = U_\theta(\theta) f(t)$$

или напряжений

$$(1.1)' \quad \sigma_R|_{R=R_0} = F_R(\theta) f(t), \quad \tau_{R\theta}|_{R=R_0} = F_\theta(\theta) f(t).$$

Необходимо найти поле смещений и напряжений в среде. Задача сводится к решению двух волновых уравнений

$$(1.2) \quad \Delta\varphi = a^2\varphi_{tt}, \quad \Delta\psi = b^2\psi_{tt}$$

для продольного φ и поперечного ψ потенциалов при нулевых начальных данных

$$(1.3) \quad \varphi = \varphi_t = 0, \quad \psi = \psi_t = 0, \quad t = 0$$

и граничных условиях (1.1) или (1.1)'. В (1.2) $a = 1/V_p$, $b = 1/V_s$, где $V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $V_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости продольных и поперечных волн; λ , μ — параметры Ламэ; ρ — плотность части среды, в которой находится источник.

В силу принятого предположения о симметрии неизвестные функции не зависят от угла χ и смещение $u_\chi = 0$, тогда поперечный потенциал имеет вид $\psi = (0, 0, \psi)$ и отсутствуют касательные компоненты тензора напряжений: $\tau_{R\chi} = \tau_{\theta\chi} = 0$ (поэтому в (1.1) не фигурируют u_χ и $\tau_{R\chi}$, а в (1.2), (1.3) можно писать ψ вместо Ψ).

Метод разделения переменных позволяет получить выражения для потенциалов в виде

$$(1.4) \quad \bar{\varphi}(R, \theta, s) = \bar{f}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n(s) \frac{K_\nu(asR)}{\sqrt{R}} + C_n(s) \frac{I_\nu(asR)}{\sqrt{R}} \right] P_n(\cos \theta),$$

$$(1.4)' \quad \bar{\psi}(R, \theta, s) = \bar{f}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n(s) \frac{K_\nu(bsR)}{\sqrt{R}} + D_n(s) \frac{I_\nu(bsR)}{\sqrt{R}} \right] P_n^1(\cos \theta),$$

где черта над функциями означает образ по Лапласу; s — параметр преобразования Лапласа; K_ν — функция Макдональда; $\nu = n + 1/2$; I_ν — модифицированная функция Бесселя; P_n — полином Лежандра; P_n^1 — присоединенный полином Лежандра. Поскольку $I_\nu(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$, а начальные данные нулевые, то $C_n(s) = D_n(s) = 0$, $n \geq 0$.

Функцию, заданную на сфере, можно разложить в ряд по полиномам Лежандра, например

$$(1.5) \quad F_R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta), \quad F_\theta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n^1(\cos \theta).$$

Для функций U_R и U_θ имеют место аналогичные представления. Теперь, вычисляя с помощью (1.4), (1.4)' по известным формулам смещения и напряжения при $R = R_0$ и сравнивая их с разложениями типа (1.5), найдем неизвестные функции $A_n(s)$ и $B_n(s)$, а затем, воспользовавшись формулой обращения Меллина, получим выражение для $\varphi = \varphi(R, \theta, t)$ и $\psi = \psi(R, \theta, t)$.

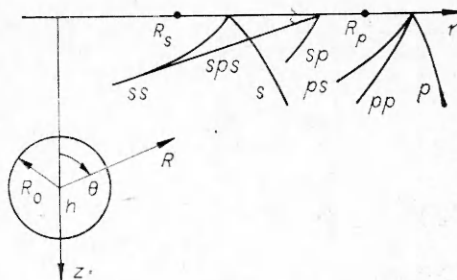
Найденное решение справедливо до выхода инициированных волн на границу $z = 0$. Для того чтобы описать процесс отражения — преломление волн, необходимо получить выражения потенциалов φ и ψ в цилиндрической системе координат. В [1] использовалась формула

$$\sqrt{\frac{2as}{\pi}} \frac{K_{0.5}(asR)}{\sqrt{R}} P_0(\cos \theta) = \frac{e^{-asR}}{R} = \int_0^{\infty} k J_0(kr) \frac{e^{-|h-z|\rho_a}}{\rho_a} dk,$$

где $\rho_a = \sqrt{k^2 + a^2 s^2}$; $R^2 = r^2 + (h - z)^2$; J_0 — функция Бесселя. Выведем аналогичную формулу для отдельного слагаемого из (1.4)

$$(1.6) \quad \frac{K_\nu(asR)}{\sqrt{R}} P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2as}} \int_0^{\infty} k J_\nu(kr) \frac{H_n}{\rho_a} e^{-|h-z|\rho_a} dk.$$

Продифференцировав обе части равенства (1.6) по z (это можно сделать в силу абсолютной сходимости интеграла в правой части (1.6) и его любой производной во всем пространстве, исключая плоскость $z = h$) и проведя



Ф и г. 1

несложные преобразования, получим рекуррентную формулу для H_n :

$$(1.7) \quad \bar{H}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\rho_a}{as} \bar{H}_n - \frac{n}{n+1} H_{n-1}, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = \rho_a/as.$$

Для слагаемых из (1.4)' имеет место равенство

$$(1.8) \quad \frac{K_v(bsR)}{\sqrt{R}} P_n^1(\cos \theta) = \frac{1}{bs} \sqrt{\frac{\pi}{2bs}} \int_0^\infty k^2 J_1(kr) \frac{Q_n}{\rho_b} e^{-|h-z|\rho_b} dk.$$

Функции Q_n связаны соотношением

$$(1.9) \quad Q_{n+1} = \frac{2n+1}{n} \frac{\rho_b}{bs} Q_n - \frac{n+1}{n} Q_{n-1}, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = \rho_b/b_s.$$

Отметим, что для $P_n(x)$ и $P_n^1(x)$ справедливы формулы (1.7), (1.9) (с заменой ρ_a/as и ρ_b/b_s на x).

2. Вычислим смещения на свободной поверхности полупространства, возникающие в результате действия «распорного» виброисточника [2]. В этом случае

$$f(t) = \sin 2\pi\omega t \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

$$F_R(\theta) = \sigma_0(1 + \cos 2\theta) = \sigma_0 \left[\frac{2}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} P_2(\cos \theta) \right], \quad F_\theta(\theta) = 0.$$

Тогда в (1.5) $a_0 = (2/3)\sigma_0$, $a_1 = 0$, $a_2 = (4/3)\sigma_0$, $a_n = 0$, $n \geq 3$. В силу линейности задача распадается на две с разными граничными условиями:

а) $F_R(\theta) = \sigma_0 P_0(\cos \theta) = \sigma_0$; б) $F_R(\theta) = \sigma_0 P_2(\cos \theta)$.

Первая задача решена в [1], решение второй выпишем сразу, опуская промежуточные выкладки.

При падении продольной волны (см. фиг. 1, где p — падающая продольная волна, pp , ps и R_p — отраженные продольная, поперечная и рэлеевская волны, возбужденные p -волной)

$$(2.1) \quad u(t) = K \int_{t_p}^t \frac{\Phi(t-\tau)}{\tau V_z} \left[\int_0^\infty J_1(k\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{2\beta g_1}{\xi^2 R(\xi)} e^{h(\xi-\eta\alpha)} d\xi \right\} dk \right] d\tau,$$

$$w(t) = -K \int_{t_p}^t \frac{\Phi(t-\tau)}{\tau V_z} \left[\int_0^\infty J_0(k\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{g g_1}{\xi^2 R(\xi)} e^{h(\xi-\eta\alpha)} d\xi \right\} dk \right] d\tau,$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{s\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s^4 + 5s^3 + 21s^2 + 48s + 48}{d(s)} e^{s(t-\tau)} ds,$$

где $d(s) = \gamma^2 s^6 + \gamma(3 + 5\gamma + 4\gamma^2)s^5 + (3 + 15\gamma + 49\gamma^2 - 4\gamma^3)s^4 + (15 + 135\gamma + 68\gamma^2 - 36\gamma^3)s^3 + (135 + 216\gamma + 36\gamma^2 - 96\gamma^3)s^2 + (1 + \gamma)(216 - 96\gamma^2)s + 216 - 96\gamma^2$; u , w — смещения в направлениях r и z ; $t_p = a(\sqrt{r^2 + h^2} - R_0)$ — время прихода в точку (r, χ, h) продольной волны; $K = \sigma_0 R_0^3/\mu$; $\xi = rb/\tau$; $\eta = hb/\tau$; $\zeta = sb/k$; $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$; $\beta = \sqrt{1 + \zeta^2}$; $\gamma = a/b$; $\omega_0 = 2\pi\omega b R_0$; $g_1 = 3 + 2\gamma^2 \zeta^2$; $g = 2 + \zeta^2$; $R(\zeta) = g^2 - 4\alpha\beta$; l — контур на комплексной плоскости ζ , проходящий справа от мнимой оси параллельно ей, ветви радикалов фиксированы условием $\arg \alpha = \arg \beta = 0$ при $\zeta > 0$.

При падении поперечной волны (см. фиг. 1, где s — падающая поперечная волна, sp , ss и R_s — отраженные продольная, поперечная и рэлеевская волны, возбужденные s -волной, sps — коническая волна, возникающая в результате отражения sp -волны от свободной поверхности)

$$(2.2) \quad u(t) = K \int_{t_*}^t \frac{\Psi(t-\tau)}{\tau V_z} \left[\int_0^\infty J_1(k\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} V(\zeta) e^{h(\xi-\eta\beta)} d\zeta \right\} dk \right] d\tau,$$

$$w(t) = -K \int_{t_*}^t \frac{\Psi(t-\tau)}{\tau V_s} \left[\int_0^\infty J_0(k\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} W(\zeta) e^{k(\zeta - \eta\beta)} d\zeta \right\} dk \right] d\tau,$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{s\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{2(\gamma^3 s^3 + 5\gamma^2 s^2 + 12\gamma s + 12)}{d(s)} e^{s(t-1)} ds,$$

$$t_* = \begin{cases} t_s, & \theta < \theta_*, \\ t_{sp}, & \theta > \theta_*, \end{cases}$$

где $\theta_* = \arcsin \gamma$ — критический угол падения поперечной волны; $t_s = b(\sqrt{\gamma^2 + h^2} - R_0)$, $t_{sp} = b(\gamma r + h\sqrt{1 - \gamma^2} - R_0)$ — время прихода в исследуемую точку поперечной и sp -волн соответственно;

$$V(\zeta) = \begin{cases} \frac{6\beta g}{\zeta^2 R(\zeta)} - \frac{3\beta}{\zeta^4}, & t_{sp} < \tau < t_s, \\ \frac{6\beta g}{\zeta^2 R(\zeta)}, & t_s < \tau; \end{cases}$$

$$W(\zeta) = \begin{cases} \frac{12\alpha\beta}{\zeta^2 R(\zeta)} - \frac{3}{\zeta^4}, & t_{sp} < \tau < t_s, \\ \frac{12\alpha\beta}{\zeta^2 R(\zeta)}, & t_s < \tau. \end{cases}$$

Выражения в квадратных скобках вычисляются методом сведения к вещественным интегралам, описанным, например, в [3]. Решение исходной задачи есть линейная комбинация решений задач «а» и «б».

Для расчетов выбирались следующие параметры: $\omega = 10$ Гц, $V_s = 4000$ м/с, $h = 100$ м, $R_0 = 1$ м, $\gamma = 1/\sqrt{3}$, σ_0 и μ оставались произвольными. По оси абсцисс откладывалось время в секундах, по оси ординат — смещения, отнесенные к 0,01 К. На фиг. 2, 3 (сплошная линия) и 4 представлены результаты расчетов. Для сравнения на фиг. 5, 3 (штриховая линия) и 6 представлены осциллограммы смещений при действии источника типа расширение — сжатие с той же энергией, что и «распорный».

3. Интегралы в квадратных скобках в (2.1), (2.2) в случае многослойных сред методом сведения к вещественным интегралам вычислить чрезвычайно сложно, поэтому пользуются различными асимптотическими методами.

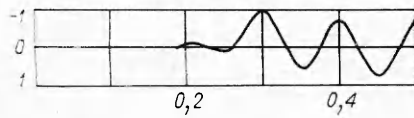
Характерный интеграл, получающийся в результате вычисления, например, поля смещений, можно записать в виде

$$(3.1) \quad I_j(t) = \int_0^\infty k J_j(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} L(s) \bar{f}(s) M(k, s) e^{st - q(k, s)} ds \right\} dk,$$

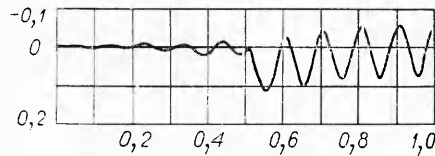
где функция $L(s)$ известна из решения граничной задачи; $M(k, s)$ и $q(k, s)$ — однородные функции нулевого и первого порядка соответственно, отвечающие некоторой волне, $j = 0, 1$. Перепишем (3.1) с помощью интеграла свертки:

$$I_j(t) = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} s L(s) e^{s(t-\tau)} ds \right\} T_j(\tau) d\tau,$$

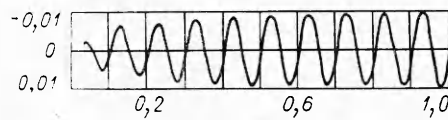
$$T_j(t) = \int_0^\infty k J_j(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \bar{f}(s) \frac{M(k, s)}{s} e^{st - q(k, s)} ds \right\} dk,$$



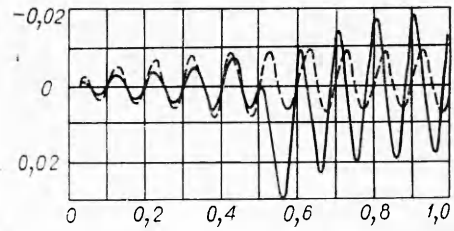
Ф и г. 2



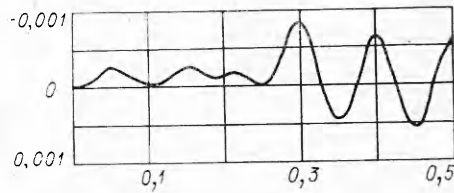
Ф и г. 4



Ф и г. 6



Ф и г. 3



Ф и г. 5

t_0 — время прихода данной волны в исследуемую точку. В T_j сделаем замену переменной $\zeta = sb/k$, тогда

$$T_j(t) = \int_0^{\infty} k J_j(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \bar{f}\left(\frac{\zeta k}{h}\right) \frac{M(\zeta)}{\tau} e^{h\left[\frac{\zeta t}{b} - q(\zeta)\right]} d\zeta \right\} dk.$$

Теперь, вычислив внутренний интеграл методом стационарной фазы [4] при $f(t) = e^{i\omega t} \varepsilon(t)$, а затем проинтегрировав по k , получим асимптотическое представление T_j в окрестности фронта волны, соответствующей функциям q и M :

$$(3.2) \quad T_j(t) \approx - \frac{0,5\pi E_j e^{i\omega\tau_0} + G_j \left[e^{i\omega\tau_0} \text{ci } \omega\tau_0 - i e^{-i\omega\tau_0} (0,5\pi + \text{si } \omega\tau_0) \right]}{\pi\omega \sqrt{r} |q''(\zeta_0)|},$$

где $tV_s = q'(\zeta_0)$; $\tau_0 = t - t_0$; $E_0 = G_1 = \text{Im} [M(\zeta_0)/\zeta_0]$; $E_1 = G_0 = \text{Re} [M(\zeta_0)/\zeta_0]$; si и ci — интегральные синус и косинус.

В заключение отметим следующее.

1. Формулы (1.6)—(1.9) позволяют записать в цилиндрической системе координат потенциалы, вычисленные в сферической системе, тем самым давая возможность решать задачи о действии источников с неоднородными граничными условиями в слоистых средах с плоскопараллельными границами раздела.

2. Расчеты смещений на поверхности полупространства показали:

а) при действии «распорного» источника амплитуда смещения w значительно больше амплитуды u на расстояниях, сравнимых с глубиной h ;

б) установление, т. е. совпадение частоты колебаний рассматриваемой точки с частотой граничной нагрузки, происходит с момента времени $\sim 15t_s$;

в) амплитуда смещения w при действии «распорного» источника при небольших углах падения волн на 2—3 порядка выше, чем при действии источника типа расширение — сжатие с той же энергией (фиг. 2, 5, $\theta = 0$) — это показывает преимущество «распорного» источника, с увеличением угла θ разница в амплитудах уменьшается (фиг. 4, 6, $\theta = 60^\circ$);

г) амплитуды смещения u у вышеупомянутых типов источников различаются незначительно (фиг. 3, сплошная и штриховая линии, $\theta = 60^\circ$).

3. В многослойных средах при действии виброисточника для вычис-

ления полей смещений и напряжений в окрестности фронтов волн можно пользоваться асимптотическими формулами типа (3.2).

Автор благодарит Е. И. Шемякина за внимание к работе.

Поступила 25 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Курс лекций. Новосибирск: изд. НГУ, 1968.
2. Чичинин И. С. Исследование механизма формирования продольных и поперечных волн сейсмическим источником, заданным в виде осциллирующего шара, в безграничном пространстве. — В кн.: Измерительная аппаратура для разведочной геофизики. Новосибирск: изд. Ин-та геологии и геофизики СО АН СССР, 1973.
3. Никифоровский В. С. Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки. — ПМТФ, 1962, № 2.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1974.

УДК 539.376

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК НА ТОНКИЙ НЕОДНОРОДНЫЙ ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ

А. В. МАНЖИРОВ

(Москва)

Исследуются задачи о действии нагрузок на тонкие* неоднородные вязкоупругие слои, причем учитываются два вида неоднородности. Первая неоднородность характеризуется тем, что элементы слоев обладают различными упругими и реологическими свойствами, вторая — обусловлена неоднородным старением материала. Найдены приближенные решения задач. Обсуждаются различные частные случаи.

1. Рассмотрим задачи о действии нагрузок на тонкие слои в рамках модели, описываемой следующими уравнениями состояния [1—3]:

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij}(x, t) = (1 + \nu)(I - L) \frac{\sigma_{ij}(x, t)}{E} - \\ - \delta_{ij} \nu (I - L) \frac{\sigma_{kk}(x, t)}{E},$$

$$(I - L) \frac{\omega(x, t)}{E} = \frac{\omega(x, t)}{E(t + \kappa(x), x)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\omega(x, \tau)}{E(\tau + \kappa(x), x)} K(t + \kappa(x), \tau + \kappa(x), x) d\tau,$$

$$K(t, \tau, x) = E(t, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau, x)} + C(t, \tau, x) \right],$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = \frac{E(t, x)}{1 + \nu} \left[(I + N) \varepsilon_{ij}(x, t) + \delta_{ij} \frac{\nu}{1 - 2\nu} (I + N) \varepsilon_{kk}(x, t) \right],$$

$$(I + N) \omega(x, t) = \omega(x, t) + \int_{\tau_0}^t \omega(x, \tau) R(t + \kappa(x), \tau + \kappa(x), x) D\tau,$$

где $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненты тензоров деформации и напряжения; ε_{kk} — объемная деформация; $\sigma_{kk}/3$ — среднее гидростатическое давление; $E(t, x)$ — модуль упругомгновенной деформации; $x(x_1, x_2, x_3)$ — наблюдаемая точка тела; t — текущий момент времени; τ_0 — возраст тела в точке с координатами $x(0, 0, 0)$ в момент приложения напряжений; $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона; $K(t, \tau, x)$ — ядро ползучести; $R(t, \tau, x)$ — его резольвента; $C(t, \tau, x)$ — мера ползучести при растяжении или сжатии; $\kappa(x)$ — функция неоднородного старения; δ_{ij} — символ Кронекера.

Далее исследуем случай плоской деформации.

Задача 1. О действии нормальной нагрузки $q(x_1, t)$ на неоднородный вязкоупругий тонкий слой, лежащий без трения на жестком основании.

* Слой будем считать тонким, если характерный размер области его активного нагружения гораздо больше толщины слоя.