

**ТЕОРИЯ НАНЕСЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
НА ВЫТАСКИВАЕМОЕ ИЗ НЕЕ ВОЛОКНО ИЛИ ПРОВОЛОКУ**

Б. В. Дерягин

(Москва)

При нанесении жидкости на вытаскиваемый из нее с постоянной скоростью U цилиндр радиуса r наступает стационарное состояние, характеризующееся тем, что скорости частиц жидкости в любой точке пространства делаются постоянными и независимыми от времени.

Обозначим через Q_s расход жидкости через любую нормальную к его оси и неподвижную в пространстве плоскость AA_1 , BB_1 , CC_1 (фиг. 1). Очевидно,

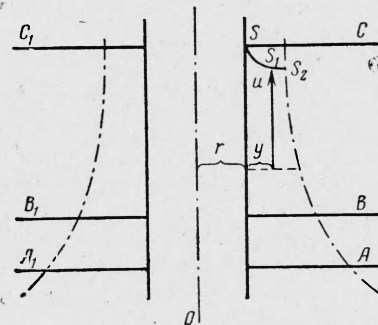
$$Q_s = 2\pi \int_0^h (r + y) u dy \quad (u = u(y)) \quad (1)$$

где y — расстояние от подложки, а u — скорость в направлении оси цилиндра в неподвижной системе координат, h — толщина слоя. Из условий стационарности вытекает соотношение

$$Q_s = \text{const} \quad (2)$$

Из (1) и (2) легко вывести, что, если известно количество жидкости, «захватываемое» единицей периметра цилиндра за единицу времени и равное Q , то можно вычислить окончательную толщину наноса жидкости h_∞ по формуле

$$h_\infty = \frac{Q}{U} \quad (h_\infty \ll r) \quad (3)$$



Фиг. 1

так что h_∞ не зависит ни от температуры и вязкости жидкости, ни от других условий на различной высоте от уровня жидкости, до тех пор, пока эти условия не окажутся несовместимыми с заданным значением Q .

Под окончательной толщиной h_∞ понимается та, которая должна получиться после потери слоем текучести вследствие затвердевания.

На любом участке слоя до его затвердевания частицы жидкости, дальше отстоящие от поверхности цилиндра, отстают от его движения под действием силы тяжести. Таким образом, u есть убывающая функция от y . Эта функция удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, которые для случая осевой симметрии и в пренебрежении инерционными членами дают

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{r+y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho g}{\eta} \quad (4)$$

где η — вязкость, ρ — плотность жидкости, g — ускорение тяжести.

При интегрировании уравнения (4) следует принимать во внимание

следующие граничные условия:

$$u = U \quad \text{при } y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = h \quad (5)$$

из которых первое выражает отсутствие скольжения между жидкостью и нитью, а второе вытекает из того, что на свободной поверхности слоя жидкости приложено только нормальное к ней давление воздуха и отсутствуют нормальные напряжения.

Легко видеть, что для случаев, когда $h/r \ll 1$, на результат интегрирования второй член в формуле (4) заметного влияния оказать не может; ограничиваясь случаем тонких слоев, этим членом будем пренебрегать.

При этом интегрирование (4) при граничных условиях (5) дает

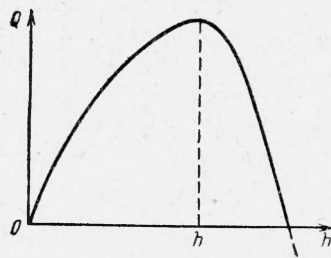
$$u = \frac{\rho g}{2\eta} (h - y)^2 - \frac{\rho g}{2\eta} h^2 + U \quad (6)$$

и, согласно (1),

$$Q = Uh - \frac{1}{3} \frac{\rho g}{\eta} h^3 \quad (7)$$

Если бы сила тяжести не действовала ($g = 0$), то во всей толще слоя жидкости было бы

$$u = U = \text{const}, \quad Q = Uh \quad (8)$$



Фиг. 2

Параболический профиль SS_1S_2 скоростей в поперечном сечении жидкого слоя, согласно (6), изображен на фиг. 2.

Легко видеть из уравнения (7), что при возрастании h от нуля Q сначала также растет от нуля и достигает максимума, равного

$$Q_m = \frac{2}{3} U h_m - \frac{2}{3} U^{3/2} \left(\frac{\eta}{\rho g} \right)^{1/2} \quad \text{при } h_m = \left(\frac{\eta U}{\rho g} \right)^{1/2} \quad (9)$$

и затем падает, становясь при значениях $h > \sqrt{3} h_m$ отрицательным (фиг. 2).

Сопоставляя (9) с формулой (3), находим, что максимально возможная толщина наноса h_{∞} равна

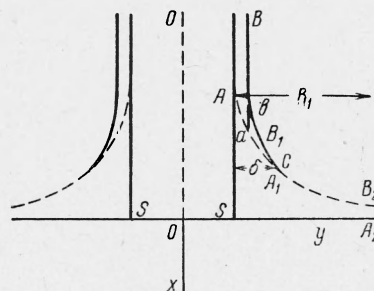
$$h_{\infty} = \frac{2}{3} h_m = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\eta U}{\rho g}} \quad (10)$$

Как было показано теоретически [1,2,3] и проверено экспериментально [4], в тех случаях, когда можно пренебречь действием капиллярного давления мениска вблизи «ватерлинии» (это давление по первому закону Лапласа зависит от поверхностного натяжения и кривизны мениска), фактически реализуется именно эта, максимально возможная толщина наноса. Однако при нанесении тонких слоев жидкости пренебрегать капиллярными силами нельзя.

Постараемся рассмотреть совместно те капиллярные и гидродинамические явления, имеющие место в зоне мениска и вблизи ватерлинии, которые определяют «захват» жидкости и тем самым толщину наноса h_{∞} .

Чтобы освободиться от обстоятельств, не могущих оказать существенного влияния на результат, но могущих осложнить трактовку поставленной задачи, формулируем ее следующим образом. Пусть из покоящейся в целом жидкости вытаскивается с постоянной скоростью U бесконечный цилиндр (фиг. 3) круглого сечения SS с вертикальной осью 00 . Сохранив тот же смысл обозначений η , ρ и g , что и ранее, обозначим через σ поверхностное натяжение жидкости.

При неподвижном положении цилиндра, смачиваемого жидкостью, мениск последней имеет форму AA_1A_2 , изображенную на фиг. 3 пунктиром. Движение поверхности, вытаскиваемой из жидкости, должно вызвать, помимо образования смачивающего ее и увлекаемого вверх слоя, изменение формы мениска; при этом очевидно, что деформация мениска, по мере удаления от поверхности цилиндра, должна убывать, стремясь к нулю. Величина этого искажения формы мениска должна зависеть от скорости вытягивания из жидкости цилиндра, уменьшаясь одновременно с ней. Поэтому при достаточно малых U зона, в которой мениск весьма мало деформирован, должна доходить до расстояния δ от стенки, малого по сравнению с радиусом кривизны мениска вблизи «ватерлинии» R_1 .



Фиг. 3

Можно считать довольно очевидным, что, поскольку деформация мениска за счет увлечения слоев жидкости поверхностью цилиндра убывает с удалением от последней, наклон касательных в отдельных точках деформированного мениска (сплошная кривая BB_1B_2 на фиг. 3) к поверхности будет меньше, чем в точках недеформированного мениска, расположенных на том же расстоянии от стенки (точки a и b на фиг. 3).

С другой стороны, эти углы наклона, как следует из простых геометрических соображений, малы для точек недеформированного мениска, находящихся от стенки на расстояниях, меньших δ .

Отсюда следует, что эти же наклоны малы и для аналогичных точек деформированного мениска (расположенных на фиг. 3 выше точки C). Таким образом, при малых U деформированная поверхность жидкости может быть получена соединением (сшиванием) поверхности, ограничивающей тонкий слой с толщиной, полого меняющейся вдоль стенки, и поверхности недеформированной, следовательно, удовлетворяющей уравнениям капиллярной статики жидкостей.

В этом положении и заключается, как мы сейчас увидим, подлинный ключ к математическому решению задачи, которое уже не представит других трудностей, кроме чисто вычислительных.

Расположим оси прямоугольной системы координат так, что ось x расположится вдоль оси цилиндра в направлении вниз, а ось y направится в сторону жидкого слоя. Если h — толщина жидкого слоя на участке стенки с абсциссой x , то зависимость

$$h = h(x)$$

будет определять форму поверхности жидкости и одновременно профиль захваченного слоя. Условие пологости этого профиля выше точки сшивания C можно написать в виде

$$\frac{dh}{dx} \ll 1 \quad \text{при } h < \delta \tag{11}$$

Рассмотрим гидродинамические уравнения для пологого участка жидкого слоя с толщиной от $h = h_0$ для $x = -\infty$ до $h = \delta$. Для такого участка, как и раньше, можно считать, что в первом приближении скорости частиц жидкости параллельны поверхности стенки. Условия (5) останутся в силе, как и раньше. Однако уравнение (4) следует видоизменить, так как теперь мы должны учесть непостоянство гидродинамического давления в слое.

Действительно, поскольку поверхность слоя уже не цилиндрическая, давление p под поверхностью, согласно первому закону капиллярности Лапласа, связано с внешним давлением p_0 соотношением

$$p = p_0 - \frac{\sigma}{R_1} - \frac{\sigma}{R_2} \quad (12)$$

где R_1 — радиус кривизны меридионального сечения поверхности жидкого слоя в точке, вблизи которой ищется p ; R_2 — радиус кривизны нормального сечения поверхности, перпендикулярного меридиональному сечению. При условиях

$$\frac{h}{r} \ll 1, \quad \frac{dh}{dx} \ll 1, \quad R_2 \approx r = \text{const} \quad (13)$$

кривизна нормального сечения этой поверхности, перпендикулярного вертикальному сечению, почти постоянна.

В силу условия (11) можно приближенно положить

$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{d^2h}{dx^2}$$

и тогда, взамен (12), учтя (13), получить

$$p = p_0 - \sigma \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\sigma}{r} \quad (14)$$

Таким образом, теперь $dp/dx \neq 0$. Пренебрегая силами инерции и проектируя остальные силы на оси x и y , получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\eta}{(r+y)} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (15)$$

Вследствие пологости слоя жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

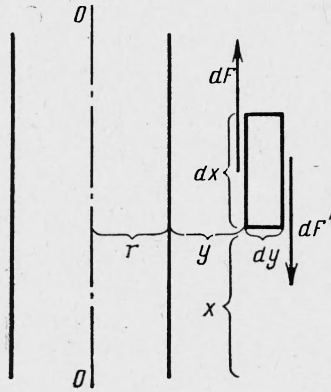
Поэтому из (15) следует

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \quad (16)$$

и в рассматриваемом приближении давление p можно считать неизменным поперек слоя. Из (16) следует, что в (15) можно для любого y брать значения $\partial p / \partial x$, соответствующие значениям p , имеющимся непосредственно под самой поверхностью слоя. Поэтому, дифференцируя (14), можно вместо (15) написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{(r+y)} \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\rho g}{\eta} - \frac{\sigma}{\eta} \frac{d^3h}{dx^3} \quad (17)$$

Полученное выражение для $\partial^2 u / \partial y^2$ отличается от того, которое имеется в уравнении (4) (помимо обратного знака, вследствие изменения направления оси x на обратное), присутствием второго члена в правой части. Интегрируя уравнение (4) (пренебрегая при этом вторым членом в левой части) и удовлетворяя условиям (5), мы получили уравнения (6) и (7). Так как интегрирование базировалось только на независимости правой части (4) от y , а (17) обладает тем же свойством, то ин-



Фиг. 4

тегрируя (17), мы получим (после перемены знака и опускания второго члена в левой части (17)):

$$u = - \left[\frac{\sigma}{2\eta} \frac{d^3h}{dx^3} + \frac{\rho g}{2\eta} \right] (h - y)^2 + \left[\frac{\sigma}{2\eta} \frac{d^3h}{dx^3} + \frac{\rho g}{2\eta} \right] h^2 - U \quad (18)$$

$$Q = - \int u dy = Uh - \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{\eta} \frac{d^3h}{dx^3} + \frac{\rho g}{\eta} \right] h^3 \quad (19)$$

Преобразуя (19), получаем уравнение

$$\sigma \frac{d^3h}{dx^3} + \rho g = 3\eta \left(\frac{U}{h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) \quad (20)$$

Толщина эмульсионного слоя в его верхней части стремится асимптотически (при $x \rightarrow -\infty$) к постоянному значению, которое обозначим через h_0 , при этом, очевидно, одновременно все производные h по x стремятся к нулю. Подставляя соответственные величины в (21), найдем

$$Q = Uh_0 - \frac{\rho g}{3\eta} h_0^3 \quad (21)$$

Вводя вместо h безразмерную величину

$$H = h / h_0 \quad (22)$$

и учитывая (21), преобразуем (20) к виду

$$\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{\rho g}{\sigma} \frac{1}{h_0} = \frac{3\eta}{h_0^3 \sigma} \left[\frac{U}{H^2} - \frac{[U - (\rho g / 3\eta) h_0^3]}{H^3} \right] \quad (23)$$

Вводя безразмерную переменную X , а также безразмерный параметр β по формулам

$$X = \left(\frac{3\eta U}{\sigma} \right)^{1/3} \frac{x}{h_0}, \quad \beta = \frac{\rho g}{3\eta U} h_0^2 \quad (24)$$

уравнение (23) можно привести к виду

$$\frac{d^3H}{dX^3} + \beta = \left[\frac{1}{H^2} - \frac{(1 - \beta)}{H^3} \right] \quad (25)$$

Уравнение (25) справедливо, согласно сделанному предположению (11), в области

$$H < \varepsilon \quad \left(\varepsilon = \frac{\delta}{h_0} \gg 1 \right) \quad (26)$$

т. е. в пределе при любых, сколь угодно больших значениях H . При интегрировании (25) следует искать решение, удовлетворяющее условиям

$$H \rightarrow 1 \quad \text{при } X \rightarrow -\infty, \quad H \rightarrow \infty \quad \text{при } X \rightarrow +\infty \quad (27)$$

вытекающим из постановки задачи.

На первый взгляд кажется, что поскольку (25) имеет третий порядок и, следовательно, его интеграл должен содержать три произвольные постоянные, условия (27) еще не определяют однозначно искомый профиль жидкого слоя. Легко, однако, видеть, что одна из трех произвольных постоянных должна входить в интеграл уравнения (25) таким образом, что ее вариация только смещает, как целое, поверхность слоя, выражаемую в некотором масштабе уравнением $H = H(X)$, параллельно оси X , не меняя ее форму, и, следовательно, приводит к одинаковой форме жидкого слоя в рассматриваемой зоне толщин.

Это обстоятельство вытекает из того, что в уравнение (25) не входит сама независимая переменная X , поэтому, если $H = H(X)$ есть одно решение этого уравнения, то $H = H(X + C)$, где C — произвольная постоянная, выражает ряд других решений.

Интегрирование уравнения (25) не приводимо к квадратурам, однако легко найти поведение его решения для той области, где H уже близко к единице. Действительно, обозначая $H - 1$ через Y и пренебрегая высши-

ми степенями Y , получим для его определения линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 Y}{dX^3} = (1 - 3\beta) Y$$

Его общее решение имеет вид

$$Y = C_1 e^{\alpha_1 X} + C_2 e^{\alpha_2 X} + C_3 e^{\alpha_3 X}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — три значения кубического корня из $(1 - 3\beta)$. Из этих трех корней два будут комплексными величинами с отрицательной действительной частью. Поэтому для соблюдения условия (27) необходимо, чтобы $C_2 = C_3 = 0$ и, следовательно,

$$H = 1 + C \exp [(1 - 3\beta)^{1/3} X] = 1 + \exp [(1 - 3\beta)^{1/3} (X - C_0)]$$

где $(1 - 3\beta)^{1/3}$ — обычное (действительное) значение кубического корня из $(1 - 3\beta)$. Предельная формула для H также обнаруживает, что изменения остающейся произвольной постоянной C влияют только на расположение поверхности жидкого слоя относительно начала координат, но не на его форму.

Как было указано ранее, для решения поставленной задачи определения h_0 необходимо спить в точке, где $H = \varepsilon$ и $h = \delta$, решение уравнения (23) или ему эквивалентного (25) с решением уравнений капиллярной статики. Для этого помножим почленно обе части уравнения (25) на $(d^2 H/dX^2) dX$ и проинтегрируем в пределах от $X = -\infty$ до зоны сшивания, соответствующей значению $X = X_0$. В результате получим

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d^2 H}{dX^2} \right]^2 + \beta \frac{dH}{dX} = \int_{-\infty}^{X_0} \left[\frac{1}{H^2} - \frac{(1 - \beta)}{H^3} \right] \frac{d^2 H}{dX^2} dX \quad (28)$$

Но из (25) следует, что при $X \rightarrow \infty$, когда $H \gg 1$ и правой частью (25) можно пренебречь, асимптотическое выражение для H имеет вид

$$H = \frac{\beta}{6} X^3, \quad \frac{dH}{dX} \approx \frac{\beta}{2} X^2 \approx \left(\frac{6H}{\beta} \right)^{2/3} \frac{\beta}{2} = \frac{\beta^{1/3}}{2} (6H)^{2/3}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{X_0}^{\infty} \left[\frac{1}{H^2} - \frac{(1 - \beta)}{H^3} \right] \frac{d^2 H}{dX^2} dX < \int_{X_0}^{\infty} \frac{\beta^{1/3}}{3} \frac{6 dH}{6^{1/3} H^{2+1/3}} < \frac{3^{2/3} \beta^{1/3}}{2^{1/3} H^{4/3}}$$

Поэтому интеграл в (28) при $X_0 \rightarrow \infty$ сходится и при $H = \varepsilon \gg 1$ левая часть (28) близка к своему предельному значению, равному

$$\lim_{H \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 H}{dX^2} \right)^2 + \beta \frac{dH}{dX} \right]_{H \rightarrow \infty} = B(\beta) \quad (29)$$

Здесь $B(\beta)$ — некоторая величина, зависящая только от β . Следовательно, вместо (28) мы имеем право приближенно написать

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 H}{dX^2} \right)^2 + \beta \frac{dH}{dX} \right] \approx B(\beta) \quad (30)$$

Рассмотрим поверхность жидкости, простирающуюся вправо от точки сшивания C , соответствующей значениям $H \gg \varepsilon$, каковая поверхность по предположению удовлетворяет уравнениям капиллярной статики, т. е. первому закону капиллярности Лапласа. Этот закон для рассматриваемого случая выражается уравнением (12). Но согласно основному закону гидростатики

$$p = p_0 - \rho g z \quad (31)$$

Здесь z — высота над тем уровнем, где гидростатическое давление равно атмосферному. В этом случае, когда на поверхности жидкости имеется

плоский горизонтальный участок, от его уровня, очевидно, и следует отсчитывать z . Объединяя (12) и (34), получим

$$\frac{\sigma}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} = \rho g z \quad (32)$$

Но известно, что

$$\frac{1}{R_1} - \frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{ds} - \sin \alpha \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d \cos \alpha}{dz} \quad (33)$$

где α — угол наклона к горизонту касательной к меридиональному сечению нашей поверхности и ds — элемент дуги этой кривой, соответствующий приращению da угла α . Очевидно, что вблизи точки сшивания C , где $\alpha \approx 1/2\pi$, можно положить, что $d(1/R_2) \approx 0$. Учтя это и выражая dz через $d(1/R_1)$ при помощи (32) и подставляя в (33), получим при α близких к $1/2\pi$

$$-d \cos \alpha = \frac{\sigma}{\rho g} \frac{1}{R_1} d \frac{1}{R_1} = \frac{\sigma}{2\rho g} d \frac{1}{R_1^2}$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$C - \cos \alpha = \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{1}{R_1^2} \quad (34)$$

Обозначим R_1 при $\alpha = 1/2\pi$ через R . Тогда постоянная интегрирования

$$C = \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{1}{R^2}$$

следовательно, вместо (34) получим

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{2\rho g} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad (35)$$

В точке C , где $h = \delta$ (фиг. 3), $\alpha = 1/2\pi - \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ — по условию малый угол наклона поверхности эмульсии к основе.

Разлагая $\cos \alpha$ в ряд по степеням $\Delta\alpha$, отбрасывая члены со степенями $\Delta\alpha$ выше первой и, наконец, заменяя $\Delta\alpha$ через dh/dx , а $1/R$ через d^2h/dx^2 , получим

$$\frac{\sigma}{2\rho g} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)^2 + \frac{dh}{dx} - \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{1}{R^2} \quad (36)$$

Переходя с помощью (22) и (24) от переменных h, x к переменным H, X , преобразуем (36) в уравнение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2H}{dX^2} \right)^2 + \beta \frac{dH}{dX} = \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{1}{R^2} \beta \left(\frac{\sigma}{3\eta U} \right)^{1/3} \quad (37)$$

Сопоставляя (37) с (30), находим условие сшивания

$$\frac{\sigma}{2\rho g} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\sigma}{3\eta U} \right)^{1/3} \beta = B(\beta) \quad (38)$$

или

$$\frac{\beta}{B(\beta)} = \frac{2\rho g}{\sigma} \left(\frac{3\eta U}{\sigma} \right)^{1/3} = \theta \quad (39)$$

Имея график функции $B(\beta)$, можно из (38), зная условия полива U, η и σ , найти β , а следовательно, согласно (24), и искомую толщину.

Для нахождения из (29) величин B для различных (но малых) значений параметра β необходимо путем интегрирования уравнения (25) определить dH/dX и d^2H/dX^2 для больших значений H . Так как уравнение (25) к квадратурам не приводится, то была предпринята численная интеграция его посредством электрического интегратора системы Гутенмахера. Эта часть работы была выполнена по нашей просьбе Ю. Г. Толстовым. Таким путем найдены значения функции $B(\beta)$ для различных значений (3). В частности, было найдено главное значение

$$B(0) = B_0 = 0.204 \dots \quad (40)$$

Это значение $B(0)$ позволяет найти предельное выражение для малых h_0 , соответствующих, очевидно, предельно малым U и, следовательно, весьма малым значениям безразмерного параметра

$$\gamma = \frac{\eta U}{\sigma} \quad (41)$$

Из (41) видно, что малым значениям γ соответствуют малые значения параметра β . Поэтому из (24), (38) и (40) получим

$$h_0 = mR \left(\frac{\eta U}{\sigma} \right)^{3/2}, \quad m = 2^{1/2} \cdot 3^{3/2} \cdot B_0^{1/2} = 1.32 \dots \quad (42)$$

Для определения толщины наноса h_∞ следует воспользоваться формулами (42), (3) и (21). Вычисления дают

$$h_\infty = h_0 \left(1 - \frac{\rho g h_0^2}{3\eta U} \right) = 1.32 \dots R \left(\frac{\eta U}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{\rho g h_0^2}{3\eta U} \right) \quad (43)$$

Следует заметить, что при условии малости γ второй член в квадратной скобке мал по сравнению с первым, вследствие чего $h_\infty \approx h_0$.

Расчетное определение радиуса меридионального сечения у ватерлинии цилиндра или, что эквивалентно, высоты последней над уровнем жидкости, в которую он опущен, — в общем случае нерешенная задача теории капиллярности. Решение вполне элементарно в случае, когда $r \gg \sqrt{\delta/\rho g}$, но это соответствует плоской задаче на нанос жидкости на плоскую поверхность, рассмотренной ранее [1-5]. Для противоположного предельного случая $r \ll \sqrt{\delta/\rho g}$ значение R было найдено (также методом сшивания) нами ранее [6]. В первом приближении

$$R \approx r$$

Подставляя это значение R в (42) или (43), получим расчетную формулу для толщины слоя жидкости, извлекаемого при вытаскивании из нее тонкой нити, что имеет большое прикладное значение (например, в промышленности стеклянного волокна, текстильной, электротехнической, синтетических волокон и др.).

Из вывода формул (42), (43) следует, что условие их справедливости может быть представлено в одном из двух равносильных видов

$$\frac{h_0}{R} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{\eta U}{\sigma} \ll 1 \quad (44)$$

Остается, однако, открытым вопрос о том, до какого предела можно пользоваться уравнениями (42), (43) при определенных требованиях к допустимой ошибке. Экспериментальные указания на это см. в [4].

Институт физической
химии Академии наук СССР

Поступила 15 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В. О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосудов после их опорожнения, и теории нанесения фотоэмульсии при поливе киноплёнки. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, стр. 11.
2. Дерягин Б. В. О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосудов после их опорожнения, для случая, когда влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь. Ж. эксперим. и теор. физ., 1945, т. 15, стр. 503.
3. Derjaguin B. V. On the thickness of the liquid film adhering to the walls of a vessel after emptying. (О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосуда после его опорожнения). Acta phys. chim., 1945, vol. 20, p. 349.
4. Дерягин Б. В. и Титиевская А. С. Экспериментальное изучение толщины слоя жидкости, остающегося на твердой стенке позади отступающего мениска. Докл. АН СССР, 1945, т. 50, стр. 307.
5. Дерягин Б. В., Леви С. М. Физико-химия нанесения тонких слоев на движущуюся подложку. Изд-во АН СССР, 1959.
6. Дерягин Б. В. Теория искажений плоской поверхности жидкости малыми объектами и ее применение к измерению краевых углов смачивания тонких нитей и волокон. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, стр. 519.