Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 4

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ИГиЛ СО РАН В 1986–1996 ГОДЫ

УДК 532

Б. А. Луговцов, Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Круг проблем механики жидкостей и газов, изучавшихся в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН в прошедшие десять лет, в значительной мере является продолжением исследований, очерченных интересами основателя Сибирского отделения — академика М. А. Лаврентьева. Результаты исследований, проведенных до 1987 года, изложены в обзоре [1]. В предлагаемой работе дается краткий обзор достижений в области гидромеханики на новом этапе, когда наряду с традиционной тематикой, восходящей к М. А. Лаврентьеву, возникли и успешно развивались новые перспективные направления. В обзоре отражены также некоторые результаты исследований других институтов СО РАН, направленность которых непосредственно примыкает к работам ИГиЛ.

Групповой анализ уравнений гидрогазодинамики. 1. Это направление исследований в приложении к построению точных решений уравнений движения газов и жидкостей получило развитие в процессе реализации программы ПОДМОДЕЛИ, впервые объявленной в [2]. В ее основе лежит тот факт, что многие «большие» математические модели физических процессов, описывающие их в виде системы дифференциальных уравнений E, обладают богатой симметрией, а именно, *допускают* достаточно широкую *непрерывную* группу G преобразований пространства независимых и зависимых переменных.

Целью программы ПОДМОДЕЛИ является исчерпание всех возможностей, заключенных в такой симметрии, для отыскания класса точных решений системы E. Хотя в мировой литературе имеется много примеров использования свойств симметрии для этой цели, проблема полного исчерпания этих свойств в программе ПОДМОДЕЛИ была поставлена впервые.

Идея такого исчерпания основана на том, что любая подгруппа $H \subset G$ является источником класса точных частных решений, отыскание которых сводится к *подмодели* — факторсистеме E/H, упрощенной по сравнению с E, например, имеющей пониженную размерность по независимым переменным. Поэтому, если система E допускает известную основную (наиболее широкую) группу G, то в качестве H будут выступать всевозможные подгруппы группы G. Таким образом, в программе ПОДМОДЕЛИ существенную роль играет решение чисто алгебраической задачи о составлении списка всех подгрупп данной группы G. На самом деле подгруппы $H \subset G$ достаточно перечислить с точностью до *подобия* в G, осуществляемого внутренними автоморфизмами группы G. Полный список не подобных подгрупп $H \subset G$ называется *оптимальной системой* подгрупп и обозначается ΘG.

Переход к уравнениям подмодели E/H состоит в установлении таких дополнительных соотношений между инвариантами группы H, которые гарантируют возможность определения искомых функций и последующего анализа совместности этих соотношений с уравнениями E.

Детальное описание программы ПОДМОДЕЛИ и основные алгоритмы ее реализации приведены в [3]. В силу известного соответствия между группами и *алгебрами* Ли в конкретных вычислениях участвуют алгебры Ли L *операторов*, а групповые преобразования восстанавливаются, если это необходимо, путем интегрирования определенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом чисто алгебраическая часть анализа состоит в построении оптимальной системы подалгебр ΘL, алгоритм которого описан в [4].

В [3] представлен итог начального этапа реализации программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений *газовой динамики* (УГД), а именно, *групповая классификация* УГД по *уравнению состояния* газа $p = F(\rho, S)$ (p — давление, ρ — плотность, S — энтропия), и полный список из 13 не подобных *инвариантных* подмоделей с *тремя* независимыми переменными для функции F общего вида. В этом случае УГД допускают 11-параметрическую группу Ли G_{11} (или соответствующую ей алгебру Ли L_{11}). Группа G_{11} является изоморфным нормальным расширением классической группы Галилея преобразований пространства — времени $R^4(t,x,y,z)$ за счет гомотетии — равномерного растяжения пространства R^4. В [3] приведена в виде таблицы вычисленная оптимальная система подалгебр ΘL_{11}, которая состоит из 220 представителей.

Каждый из этих представителей индуцирует, вообще говоря, несколько различных подмоделей УГД. В [5] для их классификации введено понятие *типа* (σ, δ) подмодели, где *ранг* σ равен числу инвариантных независимых переменных в уравнениях подмодели, а *дефект* δ есть число «лишних», неинвариантных искомых функций. Для УГД эти числа могут принимать значения $0 \leqslant \sigma \leqslant 3$, $0 \leqslant \delta \leqslant 4$. Подмодели типа $(\sigma, 0)$ называются *инвариантными*, а типа (σ, δ) при $\delta > 0$ — *частично инвариантными*. Последние, в свою очередь, подразделяются на *регулярные* (когда инвариантные независимые переменные не содержат искомых функций) и *нерегулярные* (когда искомые функции содержатся среди независимых переменных в уравнениях подмодели). Полный список возможных типов подмоделей УГД (для F общего вида) приведен в [6].

Необходимо заметить, что, в отличие от инвариантных, частично инвариантные подмодели образуют переопределенные системы дифференциальных уравнений E/H и вопрос о существовании их решений нетривиален. В [7] доказано, что решение всех регулярных подмоделей типа (2,1) существует, и дано их корректное описание.

К настоящему времени реализация программы ПОДМОДЕЛИ для УГД с произвольной F в основном завершена. Более детальный анализ физического содержания ряда конкретных подмоделей дан в [8–15].

Для специальных уравнений состояния газа количество возникающих подмоделей УГД возрастает на порядок. Например, в случае политропного газа с $F = g(S)\rho^\gamma(\gamma = \mathrm{const})$ допускаемая алгебра Ли расширяется до L_{13}, а вычисленная к настоящему времени оптимальная система подалгебр ΘL_{13} состоит из 1342 представителей [16]. Для показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ допускаемая алгебра Ли расширяется до L_{14}, а ΘL_{14} насчитывает более 2000 представителей [17].

2. В монографии [18] изложены вопросы группового анализа и построения точных решений уравнений гидродинамики (несжимаемой жидкости) в лагранжевых координатах. Переход от эйлеровых к лагранжевым координатам — нелокальное преобразование, поэтому допускаемая группа Ли в лагранжевых координатах была вычислена независимо. Дана физическая интерпретация ряда новых симметрий.

Указаны широкие классы точных решений уравнений Эйлера, которые описывают, как правило, нестационарные вихревые движения. В представления для решений в лагранжевых координатах входят произвольные функции времени и пространственных координат. Это позволяет рассматривать различные начально-краевые задачи. Показано, что трохоидальные волны Ф. Герстнера на поверхности бесконечно глубокой жидкости описываются инвариантным решением. Дано групповое объяснение известных экспериментов Дж. И. Тейлора по вращающимся жидкостям.

3. Уравнения двухскоростной гидродинамики на базе общих принципов: термодинамики, галилеевой инвариантности и законов сохранения массы, импульса, энергии и некото-

рых специальных структурных гипотез — построены в работах [19–22]. При построении центральную роль играют тензорная классификация величин, характеризующих состояние системы, соответствующая ей тензорная классификация базисных уравнений [19, 20] и трактовка термодинамики как двухскоростной [21].

Уравнения строятся в два этапа: на первом находятся уравнения «идеальной двухскоростной гидродинамики», которые содержат только первые производные [21]; на втором уравнения дополняются «диффузионными, диссипативными» слагаемыми, содержащими вторые производные, на базе общего принципа Онзагера [22]. Развитый в этих работах подход к построению уравнений, описывающих сложные многокомпонентные системы, ставит этот неоднозначный процесс на рациональную основу, позволяя тем самым получать непротиворечивое описание.

Течения со свободными границами. Поверхностные и внутренние волны. 1. В этом направлении доказан ряд новых теорем о существовании и единственности решений соответствующих краевых задач в точной классической постановке. Построена теория топологического индекса Конли для гладких функционалов, определенных на всюду плотных незамкнутых подпространствах гильбертова пространства, у которых линейный оператор, порожденный второй вариацией, имеет участки непрерывного спектра [23]. Эти результаты нашли применение для доказательства неединственности решения классической задачи о потенциальной уединенной волне на поверхности идеальной несжимаемой жидкости.

Разработана топологическая теория возмущений для функционалов, близких к симметричным, и предложен метод для оценки снизу собственных значений нелинейных вариационных операторов, в основе которого лежит комбинация оценок индекса критической точки из теории Морса и оценок размерности негативного собственного подпространства для оператора, порожденного второй вариацией функционала в этой точке. Полученные результаты были применены для доказательства существования периодических решений нелинейного гиперболического уравнения [24].

Изучена начально-краевая задача для системы уравнений, описывающих динамику плоских вихревых поверхностных волн в завихренной жидкости бесконечной глубины [25]. Доказана ее однозначная разрешимость в малом по времени, в классах функций конечной гладкости. Показано, что условие ее корректности совпадает (формально) с условием корректности задачи для безвихревых течений: градиент давления на свободной поверхности должен быть направлен внутрь жидкости.

В точной постановке решена задача о вытекающем из-под плоского горизонтального щита двумерного стационарного потока тяжелой несжимаемой идеальной безвихревой жидкости. Дно считается ровным и горизонтальным. Соответствующая краевая задача содержит параметр $\lambda = gh_0U^{-2}$ (квадрат обратного числа Фруда), различающий сверхкритическое ($\lambda < 1$) и докритическое ($\lambda > 1$) течения. Доказано, что для $\lambda = 1 - \delta$ и достаточно малого $\delta > 0$ существует нетривиальное решение, которое с точностью до слагаемых порядка $\delta^{1/4}$ совпадает с половиной уединенной волны [26]. Доказано также существование решения и для $\lambda = 1 + \delta$ (при достаточно малых $\delta > 0$), которое на бесконечности ведет себя как периодическая волна [27].

Нелинейные волны в стратифицированной среде имеют ряд особенностей, для которых нет прямого аналога в однородной жидкости. К ним относится возможность существования плавных боров — стационарных волновых конфигураций в виде непрерывного перехода, связывающего при $x \to \pm\infty$ пару отличных друг от друга горизонтальных течений. Доказано существование семейства точных решений уравнений Эйлера, описывающих бор в двухслойной жидкости [28, 29]. С этой целью разработана специальная конструкция для консервативных задач теории ветвления с нетривиальной симметрией [30].

Плавные боры в двухслойной жидкости были реализованы в экспериментах, где в невозмущенном состоянии слои покоились [31] и двигались относительно друг друга [32]. Результаты измерений хорошо согласуются с теоретическими расчетами.

Разработан алгоритм численного расчета двумерного нестационарного потенциального движения идеальной жидкости со свободной поверхностью [33]. Его эффективность показана на примере задачи об отражении уединенной волны от вертикальной стенки [34]. В работах [35, 36] исследована задача о генерации волн солитонного типа перед движущимся источником возмущения жидкости.

2. Существенное продвижение произошло в построении и исследовании приближенных моделей, связанных с описанием течения жидкости в «узких» областях.

Разработан принципиально новый подход к изучению математической модели вихревых длинных волн, обобщающей классическую модель теории мелкой воды [37]. В случае плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости модельные уравнения движения имеют вид

$$
\begin{gathered}
u_t(x,\lambda,t) + u(x,\lambda,t)u_x(x,\lambda,t) + g\int_0^1 H_x(x,\lambda',t)\,d\lambda' = 0, \\
H_t(x,\lambda,t) + (u(x,\lambda,t)H(x,\lambda,t))_x = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь u — горизонтальная компонента скорости; H — якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым; $\lambda \in [0,1]$ — лагранжева переменная по вертикали; x — эйлерова координата по горизонтали; t — время; g — ускорение свободного падения. Вертикальная составляющая скорости $v(x,\lambda,t)$ и завихренность $\omega(x,\lambda,t)$ определяются соотношениями

$$
v = F_t + uF_x, \qquad F_\lambda = H(x,\lambda,t), \qquad F(x,0,t) = 0, \qquad \omega = H^{-1}u_\lambda.
$$

В случае безвихревого течения $u_\lambda = 0, H_\lambda = 0$ и система уравнений (1) совпадает с классической моделью теории мелкой воды. Аналогичные системы уравнений построены для описания распространения длинных волн в баротропной и в неоднородной несжимаемой жидкости.

На системы типа (1) обобщены понятия характеристик и инвариантов Римана [37]. Существенно новым элементом теории по сравнению с классическим случаем является появление непрерывного спектра характеристических скоростей. Характеристики системы (1) задаются уравнением $x'(t) = k(x,t)$. Дискретные значения характеристических скоростей $k(x,t)$ определяются уравнением

$$
g\int_0^1 \frac{H(x,\lambda',t)\,d\lambda'}{(u(x,\lambda',t)-k)^2} = 1, \qquad k \neq u,
$$

а для непрерывного спектра $k(\lambda) = u(x,\lambda,t)$, $\lambda \in [0,1]$. Характеристики дискретного спектра отвечают поверхностным волнам, а непрерывного спектра — внутренним. В [38] доказана локальная корректность задачи Коши для системы (1) в том случае, когда начальные данные принадлежат области гиперболичности этой системы. Аналогичные результаты получены для модели вихревых движений баротропной жидкости [39]. Анализ характеристических свойств уравнений длинных волн в случае течений с немонотонным профилем скорости проведен в [40].

Модель течения идеальной несжимаемой жидкости через гидравлический прыжок, который отождествляется с сильным разрывом решений системы уравнений (1), предложена и исследована в [41]. В отличие от классической модели теории мелкой воды, соотношения на сильном разрыве позволяют определять не только средние характеристики течения, но и профили скорости за фронтом прыжка. В [42] предложена и исследована модель гидравлического прыжка в течении баротропной жидкости со свободной границей. Основное отличие от предыдущей модели состоит в том, что здесь могут возникать гидравлические прыжки понижения уровня.

Для модели (1) развита теория простых волн [43]. Ряд точных решений уравнений вихревой мелкой воды найден в [43, 44]. Простые волны уравнений движения баротропной жидкости исследовались в работе [45]: доказано существование простых волн, найдены новые примеры точных решений. Построенная теория позволяет анализировать двумерные нестационарные волновые движения неоднородной завихренной жидкости с учетом нелинейности происходящих процессов.

3. Простейшим случаем стратифицированного течения является двухслойное течение жидкости. Однако при использовании этой модели в длинноволновом приближении возникает ряд принципиальных трудностей. Уравнения движения имеют смешанный тип, и при достаточно большом сдвиге скорости в однородных слоях задача Коши становится некорректной. Законов сохранения массы и импульса недостаточно для получения естественным способом соотношения на внутренних гидравлических прыжках.

Один из возможных путей решения указанных проблем реализован в [46]. Размывание границы раздела слоев вследствие перемешивания или генерации коротких волн учитывается переходом к трехслойной схеме течения. В прослойке между однородными слоями используются полные законы сохранения массы, импульса и энергии, что позволяет получить замкнутую систему, не содержащую эмпирических констант, в том числе и соотношения на внутренних гидравлических прыжках.

Полученные уравнения дают возможность объяснить ряд особенностей течения смешивающихся жидкостей: резкое уменьшение скорости вовлечения при переходе от сверхкритического к докритическому режиму течения, возможность управления положением внутреннего гидравлического прыжка и степенью перемешивания путем изменения условий вниз по потоку, генерацию короткопериодных волн на гребне приливной волны. Проанализированы стационарные решения и бегущие волны в прослойке при глубине однородного слоя много больше толщины прослойки. Класс решений оказывается весьма широким. В него входят уединенные волны или «солитоны», решения типа «прыжок — волна» и «гладкий бор» [46, 47].

С использованием построенной модели решена задача о блокировке потока при обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью. Показано, что даже при сверхкритическом режиме обтекания перед препятствием формируется стационарная докритическая область течения, в которой происходит интенсивное перемешивание между слоями. Модель также описывает формирование слоя смешения и переход его в затопленную струю [48, 49].

Теоретически [50, 51] и экспериментально [52] изучена структура длинных волн, возникающих при обтекании двумерного препятствия на дне сдвиговым потоком двухслойной несмешивающейся жидкости. Аномальные течения двухслойной жидкости для системы вода — керосин, в которых препятствие поддерживает распространение нелинейных возмущений, а течение над его гребнем полностью сверхкритическое и изменение высоты препятствия не меняет течения вверх по потоку, экспериментально были обнаружены Р. Лонгом (1954) и П. Байнсом (1984).

Указана область параметров набегающего потока, при которых возмущения конечной амплитуды либо не могут распространяться вверх по потоку от препятствия, либо их скорость очень мала. Это позволяет проследить выход течения на стационарный режим и сравнить экспериментальные результаты с численными.

4. Новые результаты по линейной теории генерации поверхностных и внутренних волн получены при изучении влияния неровного дна на характеристики возбуждаемого волнового движения.

В плоском случае дифракция поверхностных волн над препятствиями прямоугольной формы с зонами тени исследована в [53, 54] соответственно для траншеи, частично закрытой крышкой, и подводного порога. Решение плоской задачи о распространении внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости получено в квадратурах в [55].

Методом лучевого приближения выполнено исследование эволюции начального возмущения свободной поверхности однородной жидкости в плоском [56, 57] и трехмерном [58] случаях. В трехмерной задаче решение в окрестности каустики строилось с помощью канонического оператора Маслова [59].

Влияние локализованной донной неровности малой высоты и резонансные эффекты при рассеянии внутренних волн, вызванных движущимся телом, на периодических донных неровностях изучены в [60].

В рамках линейного приближения длинных волн на мелкой воде показано, что периодические хребты, береговые линии, цепочки островов и т. п. могут обладать волноведущими свойствами [61].

Аналитические исследования нелинейных явлений выполнены для задачи о генерации внутренних волн в двухслойной жидкости движущимся и одновременно осциллирующим источником возмущений [62]. Показано, что при учете нелинейных эффектов задача сводится к кубическому уравнению Шредингера.

Новые результаты получены при изучении генерации внутренних волн в стратифицированной жидкости в экспериментах. В работе [63] экспериментально и теоретически изучен резонансный режим, возникающий при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости, при котором происходит значительное усиление волн по сравнению со случаями чисто поступательного или колебательного движения. Показано, что в окрестности этого режима волны распространяются не только за цилиндром, но и далеко впереди него, причем этот эффект описывается в рамках линейной теории. В работе [64] обнаружено, что при движении тела в стратифицированной жидкости в окрестности некоторого критического значения скорости впереди тела генерируются солитоноподобные волны, обгоняющие его и уходящие на бесконечность. Этот случай генерации возмущений впереди тела линейной теорией не описывается. В работе [65] изучены внутренние волны, возникающие в пикноклине при движении тела над барьером. Отмечен широкий диапазон спектральных мод, возбуждающихся в этом случае.

Экспериментально исследовано взаимодействие внутренних волн с погруженным телом. Обнаружен ряд интересных эффектов, важных для правильного понимания и описания этого явления. В работе [66] найдено удвоение частоты колебаний сил, действующих на тело, по сравнению с частотой набегающей волны; в [67] показано, что при определенных условиях дифракция внутренних волн на теле приводит к возбуждению высших мод, что сильно изменяет характер волновых нагрузок; в [68] выявлены неизвестные ранее механизмы памяти о предыстории движения, возможность дрейфа тела навстречу волнам, неожиданный характер его ориентации по отношению к волнам. Для случая эллиптического цилиндра с одной степенью свободы (возможность поворота относительно неподвижной горизонтальной оси) обнаружены преимущественная ориентация и, при определенных условиях, вращение цилиндра под воздействием периодических внутренних волн [69]. В работе [70] найдена неустойчивость внутренних волн от цилиндра в сдвиговом потоке с большим числом Ричардсона. Это расходится с предсказанием линейной теории устойчивости, по которой в данных условиях поток должен быть устойчивым, и дает пример ее недостаточности и необходимости нелинейного анализа.

Определению гидродинамической нагрузки, действующей со стороны стратифицированной жидкости на движущееся тело, посвящены работы [71–74], где изучена плоская задача о генерации и рассеянии поверхностных и внутренних волн горизонтальным цилиндрическим телом, движущимся под пикноклином. Аналитическое решение стационарной задачи об обтекании круга равномерным потоком безграничной двухслойной жидкости получено в [75] в форме быстро сходящихся рядов, коэффициенты которых определяются из рекурсивных соотношений. Аналогично построено решение дифракционной задачи для кругового цилиндра без хода в двухслойной жидкости [76]. Численные расчеты полной гидродинамической нагрузки представлены для кругового и эллиптического цилиндров. Сопоставление с экспериментальными данными выполнено в задаче о рассеянии внутренней волны первой моды на неподвижном эллиптическом цилиндре [77].

Гидродинамика крыла в потоке многослойной жидкости изучена в [78–80]. Краевая задача обтекания профиля сведена к системе интегральных уравнений, не вырождающихся в предельном случае бесконечно тонкого профиля. Решение задачи о движении вихреисточника в многослойной жидкости, имеющей произвольное конечное число однородных слоев, полученное в [81, 82], позволило рассмотреть широкий класс краевых задач о движении крыла вблизи границ раздела сред. Выполненные расчеты для симметричного профиля Жуковского показали существенное влияние толщины профиля на характер зависимости гидродинамических характеристик от угла атаки и отстояния профиля от границ раздела.

Впервые для экспоненциально стратифицированной жидкости рассмотрена задача обтекания крыла с учетом вихревого следа за ним [83]. Крыло моделировалось бесконечно тонкой пластиной, совершающей малые колебания по заданному закону, а вихревой след — линией контактного разрыва скорости. Показано, что классическая формула Жуковского для подъемной силы остается справедливой и для тонкого крыла в слабо стратифицированной жидкости. Расчеты гидродинамических сил свидетельствуют о немонотонной зависимости подъемной силы крыла от числа Фруда: при больших числах Фруда подъемная сила в стратифицированной жидкости меньше, чем в однородной, а при малых — больше. Момент сил при этом стремится к нулю с уменьшением числа Фруда.

Моделирование фазовых переходов. Фазовые превращения вещества представляют собой сложный процесс, распадающийся на несколько стадий. Основными являются стадии сепарации фаз и коагуляции. Первая занимает короткое время, в течение которого формируются области, занятые различными фазами. Вторая характеризуется исчезновением тонких структур; геометрия областей, занятых различными фазами, упрощается. В пределе граница раздела фаз стремится к поверхности минимальной площади. Из вышесказанного вытекает, что возможны два подхода к моделированию этих явлений. На стадии коагуляции естественно трактовать проблему как задачу со свободной границей, в качестве которой выступает поверхность раздела фаз. В этом случае в предположении, что среда заполняет область Ω, задача ставится следующим образом. Требуется определить поверхность $\Gamma(t)$, разделяющую подобласти $\Omega^{\pm}$, занятые различными фазами, и поле температуры $\vartheta(x,t)$ так, чтобы выполнялись уравнения

$$\vartheta_t - \Delta\vartheta = 0 \ \ (\Omega^{\pm}), \qquad \nabla\vartheta\cdot\mathbf{n} + k\vartheta = 0 \ \ (\partial\Omega).$$

На искомой поверхности раздела фаз температура, как правило, предполагается непрерывной и задаются дополнительные условия

$$\tau V = \varepsilon\mathbf{H} - \vartheta\mathbf{n}, \qquad V = [\nabla\vartheta]\cdot\mathbf{n}.$$

Здесь τ — параметр релаксации; ε — коэффициент, характеризующий поверхностную энергию межфазного взаимодействия; $\mathbf{H}$ — вектор кривизны; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела фаз; V — скорость движения поверхности раздела фаз в направлении нормали. При $\tau = \varepsilon = 0$ эта задача переходит в классическую задачу Стефана. В работах [84] ($\tau = \varepsilon = 0$) и [85] показано, что при гладких начальных данных в предположении, что в начальный момент $\partial\Omega$ не имеет точек пересечения со свободной границей, эта задача имеет на малых промежутках времени единственное гладкое решение.

Второй подход основан на изучении обобщенных решений. При этом свободная поверхность появляется естественным образом как поверхность, на которой внутренняя энергия среды терпит разрыв вместе с производными температуры и химического потенциала. Описание термодинамической системы дается плотностью свободной энергии $F(\vartheta, \varphi)$, которая является функцией температуры и параметра порядка, в качестве которого может быть выбрана фазовая концентрация. Основным является уравнение баланса энергии. К нему добавляются дополнительные уравнения, связывающие значения температуры и параметра порядка.

Наиболее общими являются уравнения градиентной теории фазовых переходов (уравнения Кана — Хилларда, Кана — Аллена, уравнения фазового поля), которые широко применяются как математические модели, описывающие фазовые превращения на некотором микроскопическом уровне. Они содержат два малых параметра — время релаксации τ и межфазный параметр ε (характерную длину межфазного взаимодействия). Предельный переход при $\tau, \varepsilon \to 0$ приводит к математическим моделям, описывающим фазовые превращения на макроскопическом уровне. Обоснование таких предельных переходов и исследование соответствующей асимптотики является одной из задач математической теории фазовых превращений.

В этом направлении получены следующие результаты. В работе [86] рассмотрены краевые задачи для уравнений

$$(\vartheta + l\varphi)_t - \Delta\vartheta = 0, \quad \varphi_t = \tau^{-1}(h(\vartheta) - \varphi),$$

где $h(\vartheta)$ — функция Хевисайда. Доказана корректность основных краевых задач и установлена сходимость их решений к решениям задачи Стефана. В работе [87] рассмотрена следующая краевая задача для квазистационарной системы уравнений фазового поля:

$$\Omega: \quad (\vartheta + l\varphi)_t - \Delta\vartheta = 0, \qquad -\varepsilon\Delta\varphi + W'(\varphi) = \varepsilon\vartheta, \qquad W(s) = (s^2 - 1)^2,$$

$$\partial\Omega: \quad \varphi_n = 0, \qquad \vartheta = 0.$$

В начальный момент времени считается заданным распределение внутренней энергии. Показано, что эта задача имеет решение, которое при стремлении параметра ε к нулю сходится к решению капиллярной задачи Стефана с нулевым значением параметра релаксации.

Результирующая математическая модель существенным образом зависит от выбора регуляризации. С целью выяснения этой зависимости были изучены сингулярные пределы решений уравнений вязкой диффузии и уравнений Кана — Хилларда. Уравнение вязкой диффузии имеет вид

$$u_t - \varepsilon\Delta W'(u) = \varepsilon\Delta u_t,$$

где функция $W'(u)$, производная от термодинамического потенциала, имеет N-образный график.

В работах [88, 89] доказано, что при стремлении малого параметра к нулю химический потенциал $W'(u)$ сходится сильно к некоторой функции v, а слабые пределы функций вида $G(u)$ допускают представление $\lambda_1 G(s_1) + \lambda_2 G(s_2) + \lambda_3 G(s_3)$, в котором функции $s_i(v)$ удовлетворяют уравнению $W'(s_i(v)) = v$. Здесь λ_i — концентрации фаз ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$).

Модель, в которой концентрация неустойчивой фазы равна нулю ($\lambda_2 = 0$), описывает процесс фазового перехода с учетом эффекта гистерезиса. Для этой модели проведено качественное исследование решений. В [90] установлено, что она удовлетворяет принципу необратимости: если в начальный момент фазы разделены, то они остаются таковыми во все последующие моменты времени. Если ведущим фактором являются поверхностные силы, то в изотермическом приближении разделение фаз описывается уравнениями Кана —

Хилларда

$$u_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \qquad -\varepsilon^2 u_{xx}(x,t) + W'(u(x,t)) = v(x,t), \qquad x,t \in Q.$$

В этом случае решения осциллируют с периодом ε и задача состоит в определении соответствующей функции распределения вероятностей. В [91] установлено, что при этом медленные переменные — химический потенциал v и адиабатический инвариант $I = -(\varepsilon/2)\,|u_x|^2 + W(u) - vu$ — сходятся сильно, а функция распределения предельных значений концентрации u выражается в явной форме через предельные значения медленных переменных.

В рамках классической теории фазовых превращений среда, как правило, предполагается неподвижной. Представляет интерес распространение подхода, основанного на методах градиентной теории фазовых переходов, к задачам о движении сплошных сред. В этом направлении в работе [92] была разработана модель фазового поля для задачи о движении двухкомпонентной вязкой жидкости, в которой учитываются как капиллярное взаимодействие жидкостей, так и их взаимная диффузия. Установлена корректность основных краевых задач для этой модели и проведен асимптотический анализ, показывающий, что при стремлении малого параметра к нулю ее решения сходятся к решению задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса.

Термокапиллярные течения и их устойчивость. В условиях, когда неравномерно нагретая жидкость обладает свободной границей и находится в состоянии, близком к невесомости, существенное влияние на ее движение оказывает зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект. Интенсивность термокапиллярного движения характеризуется числом Марангони $\mathrm{M} = æAl/\rho\nu\chi$, где $æ$ — постоянный температурный коэффициент; A — характерный градиент температуры вдоль свободной поверхности; l — характерный размер области течения; ρ, ν, χ — соответственно плотность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости. Это число играет столь же важную роль при рассмотрении термокапиллярных явлений, как и число Рейнольдса в классической гидродинамике. Диапазон изменения параметра M в реальных ситуациях весьма велик: от величины порядка единицы в процессах термокапиллярного дрейфа микропузырьков до 10^4 в экспериментах по направленной кристаллизации полупроводниковых материалов в условиях невесомости. Существенны также числа Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ и Вебера $\mathrm{We} = \sigma_0 l/\rho\nu\chi$, где σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения.

Влияние этих параметров на развитие осесимметричного течения в задаче о получении монокристаллов методом зонной плавки изучено в [93, 94]. При этом зависимость поверхностного натяжения от температуры может быть линейной ($\sigma = \sigma_0 - æ(\theta - \theta_0)$), или нелинейной ($\sigma = \sigma_0 + æ_1(\theta - \theta_0)^2$ — аномальный термокапиллярный эффект). В первом случае, как правило, поле скоростей и температур и свободная граница расплава ведут себя колебательным образом, во втором — либо монотонно возрастают, либо монотонно затухают во времени. Соответствующие стационарные течения имеют более сложную структуру. Так, при $\mathrm{Pr} = 4{,}1$, $\mathrm{M} = 10^2$ могут быть два различных режима в первом случае, а при $\mathrm{Pr} = 10, \mathrm{M} = 0,3$ при аномальном термокапиллярном эффекте могут быть пять различных решений задачи.

Исследованы вопросы устойчивости положения равновесия, а также стационарных течений, происходящих под действием термокапиллярных сил [95–99]. Аналитически и численно показано, что учет деформации свободной поверхности ($\mathrm{We} \neq 0$) приводит в случае монотонных возмущений не только к существенному понижению устойчивости в области малых волновых чисел, но и к появлению точки разрыва нейтральной кривой [95, 96]. Дано объяснение этому явлению посредством решения полной задачи. Оказалось, что нейтральная кривая состоит из двух ветвей, каждая из которых соответствует своему типу возмущений. При малых волновых числах преобладает капиллярная мода, ответственная за возмущение свободной границы,а при больших — тепловая, связанная с неравномерным нагревом жидкости.

В классической задаче Пирсона впервые обнаружена колебательная термокапиллярная неустойчивость в плоском слое при подогреве снизу [97]. Она возникает как за счет деформируемости свободной поверхности (в области коротких волн), так и вследствие взаимодействия капиллярных и термокапиллярных сил при больших числах Марангони, когда появляются осциллирующие возмущения нового типа.

Показано, что неустойчивость термокапиллярного течения (в цилиндрическом слое), возникающего при нагреве расплавленной зоны внешними источниками тепла, может быть вызвана деформацией поверхности (за нее ответственна капиллярная мода), движением расплава (гидродинамическая мода) и неравномерным нагревом жидкости (тепловая мода) [98, 99].

Возможность подавления Рэлей — Тейлоровской гравитационной неустойчивости действием тепловых межфазных эффектов показана в работах [100–102] при исследовании задачи устойчивости равновесия слоя пара или газа, отделяющего вязкую несжимаемую жидкость от нагреваемой твердой стенки. Принципиальным отличием от предыдущих исследований является учет эффекта вязкости более легкой нижней фазы и предположение о конечности ее толщины. На границе раздела жидкости и газа учитывался термокапиллярный эффект, а на границе «жидкость — пар» — фазовый переход. При достаточно тонких толщинах парового слоя доминирующим фактором, влияющим на устойчивость равновесия системы «жидкость над паром», является эффект фазового перехода на межфазной границе, а доминирующим механизмом неустойчивости одномерного переноса тепла от пластины в равновесную систему «жидкость над паром» является термокапиллярный механизм.

Условия подавления Рэлей — Тейлоровской неустойчивости сформулированы в терминах новых критериев подобия. Результаты для критического теплового потока согласуются с ранее установленной С. С. Кутателадзе причиной наступления кризиса кипения как условия нарушения устойчивости двухфазного пристенного течения [102].

Феноменологическая модель, описывающая движение эмульсии или газожидкостной смеси под действием термокапиллярных сил и микроускорений, сформулирована в [103]. Концентрация дисперсной фазы предполагается малой, что позволяет получить замкнутую систему уравнений, не содержащую эмпирических параметров, для концентрации, векторов скорости несущей и дисперсионной фаз, давления несущей фазы и общей температуры смеси.

Выполнены аналитическое и численное исследования одномерных режимов движений такой системы, изучена структура разрывных решений. Получены необходимые условия устойчивости плоской границы раздела «эмульсия — чистая жидкость». Исследована устойчивость пространственно однородного состояния смеси, описывающего движения с постоянными концентрациями и скоростями фаз [104]. Показано, что наиболее опасными являются одномерные возмущения. Найдено условие устойчивости, из которого для случая полной невесомости, в частности, следует, что равномерное движение капелек свинца в расплавленном алюминии устойчиво, а пространственно однородное состояние газожидкостной смеси при постоянном градиенте температуры неустойчиво и обнаруживает, как показывает численный анализ, тенденцию к образованию прослоек с высоким газосодержанием.

Исследовано влияние поверхностно-активного вещества (ПАВ) на возникновение термокапиллярной конвекции [105, 106]. Показано, что присутствие нерастворимого ПАВ не стабилизирует равновесие, как предполагалось ранее, а, наоборот, приводит к возникновению движения даже при очень малых перепадах температуры.

В [107] объяснено и смоделировано явление аномально медленного утонынения вертикальной пленки жидкости в поле тяжести при наличии ПАВ. Показано, что вследствие увлечения ПАВ в поле тяжести вниз возникает градиент поверхностного натяжения, вызывающий направленное вверх течение Марангони. Этот процесс стабилизирует пленку и увеличивает время ее существования на три порядка по сравнению со случаем чистой жидкости.

Микроконвекция в жидкости. Анализ предположений, сделанных при выводе уравнений Обербека — Буссинеска из точных уравнений движения вязкой теплопроводной жидкости, показывает, что классическая модель непригодна при выполнении неравенства $gl^3\chi/\nu < 1$, где g — ускорение силы тяжести; l — характерный линейный размер; ν — кинематический коэффициент вязкости; χ — коэффициент температуропроводности жидкости [108]. Кроме того, эта модель, в которой поле скорости предполагается соленоидальным, не в состоянии правильно описать конвективные течения в резко нестационарных условиях.

Предложенная в [108] новая модель конвекции изотермически несжимаемой жидкости отличается тем, что поле скоростей уже не является соленоидальным. При этом уравнения неразрывности и импульса удовлетворяются точно, а уравнение энергии — асимптотически точно.

Доказана однозначная разрешимость трехмерной нестационарной задачи микроконвекции в ограниченной области, на границе которой задан тепловой поток [109]. Установлено, что классическое решение этой задачи аналитично по параметру Буссинеска βT при малых значениях последнего (β — объемный коэффициент расширения, T — характерный перепад температур). Разрешимость стационарной задачи доказана при задании как теплового потока, так и температуры на границе области, если параметр $\varepsilon = \beta T$ мал. Показано, что в стационарном случае разность безразмерных значений вектора скорости, определенных на основе классической и новой моделей, имеет порядок ε [110].

Выполнен групповой анализ уравнений микроконвекции в двумерном нестационарном случае [18]. Исследован ряд инвариантных решений указанной системы, в частности, решение, описывающее конвективные течения в вертикальном слое под действием периодически меняющегося во времени теплового потока на его границах [111]. Обнаружено существенное различие в качественном поведении траекторий жидких частиц на больших временах, рассчитанных по двум моделям. Это подтверждено численными исследованиями режимов микроконвекции в кольцевых областях для жидкостей типа глицерина, расплавов кремния и стекла [112, 113]. Показано, в частности, что для нестационарных течений без свободных границ величины скоростей, рассчитанных по новой модели, могут на три порядка превышать те, что предписываются традиционной моделью.

Движение тел в вибрирующей жидкости. Исследования поведения тел в вибрирующей жидкости ведутся с прошлого века. Экспериментально установлено, что колебания жидкости могут существенно влиять на движение включений, быть причиной необычных (парадоксальных) явлений, служить средством управления включениями. До последнего времени объяснение этих явлений носило качественный, оценочный или макроскопический характер, когда смесь жидкость — включения рассматривалась как сплошная среда.

Новый подход к этой проблеме представлен в работах [114–118]. Это направление основано на точных постановках задач и экспериментах для отдельного включения, и его можно рассматривать как микроскопический подход в противоположность макроскопическому. В работе [114] найдено, что на цилиндр, находящийся вблизи стенки колеблющегося сосуда с жидкостью, в среднем действует сила, притягивающая его к стенке. Это обстоятельство позволяет объяснить наблюдаемое в экспериментах необычное поведение тел в вибрирующей жидкости в присутствии силы тяжести — всплывание тел с плотностью, превышающей плотность жидкости, и наоборот. В [115] было показано, что появление этой силы связано с зависимостью присоединенной массы тела от его положения в сосуде. Уравнения, описывающие движение шара в замкнутом сосуде, совершающем заданные поступательные колебания, имеют вид

$$(m\delta_{ij} + \mu_{ij})\ddot{\xi}_j = (\rho V - m)w_i,$$

$$\frac{d}{dt}(m\delta_{ij} + \mu_{ij})\dot{X}_j - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{jk}}{\partial X_i}\dot{X}_j\dot{X}_k = (m - \rho V)g_i + \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{jk}}{\partial X_i}\overline{\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k}, \qquad i = 1,\, 2,\, 3,$$

где m — масса шара; V — его объем; $\mu_{ij} = \mu_{ij}(X_k)$ — тензор присоединенной массы, зависящий от положения шара в сосуде и формы сосуда; ξ_i — быстро меняющееся во времени малое отклонение от средней траектории шара; w_i — ускорение сосуда; чертой обозначено усреднение по времени. Последний член в правой части второго уравнения, возникающий при осреднении по высокочастотным колебаниям точных уравнений, и описывает указанную силу.

Однако не только это обстоятельство может приводить к наблюдаемым в вибрирующей жидкости эффектам. Важно, чтобы включения при колебательных воздействиях совершали движения в разных направлениях в неодинаковых условиях. В [116] было показано, что движением включений можно управлять, если ими являются сжимаемые тела (газовый пузырь, твердое сжимаемое тело). Преимущественно однонаправленное движение включения достигается за счет определенного выбора разности фаз между колебаниями замкнутого сосуда и периодическими изменениями давления в нем. Этот теоретически полученный результат был подтвержден экспериментально [117, 118].

Переход от микроскопического описания к макроскопическому требует, как минимум, изучения взаимодействия включений между собой. Как первый шаг в этом направлении в [119] было исследовано движение шара, вызываемое колебаниями другого шара. Обнаружено, что среднее движение включения (свободный шар) направлено к шару, совершающему заданные периодические колебания, если его плотность больше плотности жидкости, и наоборот, если соотношение плотностей противоположное. Этот эффект можно рассматривать как «порождение» колеблющимся шаром «гравитационного поля», в котором свободный шар «всплывает» или «тонет» в зависимости от соотношения плотностей включения и жидкости.

Важным моментом в изучении закономерностей движения включений в вибрирующей жидкости явилось разделение колебаний жидкости на однородные и неоднородные [120]. Если в вибрирующей жидкости при осутствии включений все частицы жидкости движутся с одной и той же скоростью, то колебания являются однородными. Если это не так, то колебания неоднородны. В зависимости от характера колебаний происходит качественно различное среднее движение включений. В частности, при однородной вибрации твердое включение, плотность которого равна плотности жидкости, движется вместе с жидкостью.

В работе [121] показано, что в случае неоднородных колебаний, порождаемых точечным пульсирующим источником, среднее движение свободного шара той же плотности, что и жидкость, существует. Выяснены интересные детали такого движения при произвольном соотношении плотностей. Установлено, что шар приближается к источнику, если его плотность не меньше плотности жидкости либо в начальный момент его центр расположен не слишком далеко от источника. Шар удаляется от него, если его плотность меньше плотности жидкости и в начальный момент он находится на достаточно большом расстоянии от источника.

Фильтрационные течения. Получили развитие новые математические модели теории фильтрации. Предложена модель и итерационный алгоритм расчета явлений переноса загрязнений взаимодействующими потоками поверхностных, почвенных и грунтовых вод для крупномасштабных объектов [122]. Для отдельных составляющих сложной системы нелинейных уравнений взаимосвязи доказаны единственность и существование в малом по времени решений соответствующих начально-краевых задач. В частности, рассмотрены вопросы локализации решений нелинейных параболических уравнений, вырождающихся на поверхности [123]. Ряд точных решений многопараметрических задач для важного класса плоских фильтрационных течений со свободной поверхностью при наличии особых точек получен и детально исследован в монографии [124].

Применительно к решению проблем геотехнологии и экологии предложены модели взаимосвязи гидравлических и фильтрационных процессов, протекающих при бурении (система скважина — пласт, прогноз коркообразования, расположения зон возможного прихвата бурового инструмента) [125], а также подземного выщелачивания [126] с учетом неустановившихся процессов фильтрации, конвективной диффузии и массообмена между подвижным раствором и скелетом среды. Новый, основанный на применении статистических методов подход к изучению процесса механической кольматации пористой среды при фильтровании сквозь нее малоконцентрированных смесей типа глинистых растворов описан в [127].

Изучение свойств нелинейной системы вырождающихся уравнений двухфазной фильтрации, проведенное в работах [128, 129] и монографии [130], позволило выявить важные для теории и практики эффекты, присущие процессам несмешивающегося вытеснения. В частности, теоретически и экспериментально было обнаружено явление капиллярного запирания включений вытесняемой фазы как на границе, так и внутри области фильтрации вытесняющей жидкости, сформулированы критерии разрушения таких включений. Это позволяет по-новому взглянуть на природу образования целиков нефти на разрабатываемых месторождениях и создание методов интенсификации притока к скважинам. В последнее время обнаружено [131], что аналогичные явления имеют место и в случаях трехфазной фильтрации.

Изучена проблема сопряжения высокоскоростных потоков вязкой жидкости в скважинах и открытых руслах (каналах) с фильтрационными ее потоками в окружающей пористой среде [132]. Рассмотрен ряд вариантов сопряжения в рамках приближения пограничного слоя для обоих потоков. Для взаимно перпендикулярных пограничных слоев в скважине и примыкающей к ней пористой среде доказана разрешимость соответствующих краевых задач и найден класс автомодельных режимов течения.

Гидродинамическая устойчивость. За последние десять лет удалось существенно расширить область применимости прямого метода Ляпунова в исследованиях по устойчивости состояний равновесия (покоя) и стационарных течений жидкостей и газов. Новые результаты в этом направлении связаны с получением экспоненциальных оценок нарастания возмущений в задачах о линейной неустойчивости состояний покоя и стационарных течений и априорных оценок, свидетельствующих о среднеквадратическом росте возмущений, в задачах о нелинейной неустойчивости ряда состояний покоя. Представляет определенный интерес получение достаточных условий нелинейной устойчивости, обобщающих, с одной стороны, известные условия в смысле новых определений устойчивости, а с другой стороны, дающих сведения об устойчивости состояний равновесия и стационарных симметричных течений, которые известными условиями до настоящего времени не описывались.

В работах [133–140] приведены многочисленные примеры построения функционала Ляпунова и обращения теоремы Лагранжа для доказательства неустойчивости состояний покоя различных гидромеханических систем по отношению к малым пространственным возмущениям и получения экспоненциальных оценок их нарастания.

Доказана неустойчивость по отношению к малым возмущениям соответствующей симметрии и найдены экспоненциальные оценки их нарастания для стационарного осесимметричного сжимаемого бароклинного вихря в потенциальном поле внешних массовых сил [141] и вращательно-симметричных магнитогидродинамических (МГД) течений идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью [142].

Получены достаточные условия нелинейной устойчивости для состояний покоя несжимаемой, неоднородной по плотности (непрерывно стратифицированной) жидкости, находящейся в потенциальном поле внешних массовых сил, относительно пространственных возмущений и для ряда стационарных течений несжимаемой и сжимаемой жидкости, в том числе для идеально проводящей жидкости в магнитном поле, обладающих некоторым типом симметрии, к возмущениям той же симметрии [143–147].

Доказана неустойчивость состояний покоя двух несмешивающихся идеальных несжимаемых капиллярных жидкостей различных плотностей, заполняющих фиксированный цилиндрический сосуд и находящихся в потенциальном поле внешних массовых сил, относительно конечных плоских возмущений [148], а также безграничной самогравитирующей сжимаемой среды по отношению к конечным пространственным возмущениям [140]. Для обеих задач найдены оценки, свидетельствующие о среднеквадратическом нарастании соответствующих возмущений.

Своеобразной задачей об устойчивости течений жидкости является проблема спонтанной закрутки: может ли в осесимметричном течении в результате потери устойчивости возникать вращательное движение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда движение без вращения заведомо возможно?

В [149–151] утверждается, что спонтанная закрутка возможна. Это явление названо «самовращением» или «вихревым динамо». Однако в построенных примерах имеется втекающая в область течения ненулевая осевая компонента момента импульса. В [152, 153] была предложена более жесткая формулировка, обеспечивающая строгий контроль кинематического потока момента импульса, исключающая втекание вращающейся жидкости в рассматриваемую область течения. В такой постановке вопрос о возможности бифуркации исходного осесимметричного течения в результате потери устойчивости к течению с закруткой (необязательно вращательно-симметричному) остается открытым.

Для доказательства существования этого явления достаточно найти хотя бы один пример. Для сужения области поисков такого примера в работах [152–154] рассмотрен переход осесимметричного течения к вращательно-симметричному и плоский аналог такого перехода — возникновение спонтанного поперечного (перпендикулярного к исходному), не зависящего от поперечной координаты потока, в случае плоскопараллельного исходного течения.

В [153] показано, что бифуркации осесимметричное — вращательно-симметричное течение и соответствующий плоский аналог такого перехода не имеют места для произвольной сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. Этот результат аналогичен известной (в теории «магнитного динамо») теореме Каулинга о невозможности осесимметричного «магнитного динамо» и соответствующего плоского аналога этого явления. В случае плоского аналога показано, что это утверждение справедливо и для проводящей жидкости, движущейся в магнитном поле, независимо от характера связности области течения.

Для осесимметричных течений в магнитном поле дело обстоит по-другому. В этом случае, как показано в [153], при определенных условиях возможны стационарные течения с закруткой, поддерживаемые электромагнитными силами, и сама постановка задачи о спонтанной закрутке требует уточнения. Такое уточнение было сделано в [154] и показано, что осесимметричная спонтанная закрутка невозможна для жидкости с конечной проводимостью, если сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным. В такой области полоидальные компоненты магнитного поля со временем всегда исчезают, и закрутка становится невозможной. Для неодносвязной области вопрос остается открытым.

Для идеально проводящей жидкости характер связности области течения оказывается несущественным, так как в этом случае полоидальные компоненты магнитного поля не исчезают в силу вмороженности. В [155] приведен явный пример, показывающий, что, по крайней мере для невязкой жидкости, в таких МГД течениях при наличии внешних сил, имеющих только полоидальные компоненты, осесимметричная спонтанная закрутка возможна.

Как было показано в [153], возникновение вращательно-симметричного потока (в общем случае в среднем; осреднение по азимутальному углу) может происходить только за счет контрградиентного потока момента импульса. Течение, рассмотренное в [149], хотя и не может трактоваться как пример спонтанной закрутки, демонстрирует возможность появления контрградиентного потока момента импульса в неосесимметричных закрученных течениях. В МГД течениях за счет магнитного поля появляются дополнительные возможности для возникновения такого механизма и он, как показано в [155], реализуется в осесимметричной закрутке. Вопрос о его существовании в неосесимметричных течениях без магнитного поля в рамках постановки, предложенной в [152, 153], остается открытым.

Вихревые движения жидкости. Ряд результатов, полученных при исследовании нестационарных вихревых течений на основе группового анализа, приведен в монографии [18].

Вихревые структуры, представляющие несомненный самостоятельный интерес, привлекают к себе дополнительное внимание в связи с изучением крупномасштабных образований в турбулентных течениях. Интересные результаты получены при исследовании стационарных вихревых структур в невязкой несжимаемой жидкости при наличии дополнительных симметрий в работах [18, 156, 157].

В случае плоских стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости в [156] получены точные решения уравнения для функции тока $\Delta\psi = \omega(\psi)$. Найден вид всех правых частей $\omega(\psi)$, для которых это уравнение допускает обобщенное разделение переменных. Решения описывают течение типа источника в завихренной жидкости, периодические течения между двумя стенками, движения в прямоугольном цилиндре и ряд других.

Уравнение для функции тока в осесимметричных течениях с закруткой (в физике плазмы оно известно как уравнение Грэда — Шафранова) при специальной форме нелинейной правой части также допускает разделение переменных. Это позволило получить точные решения, соответствующие разнообразным вихревым структурам: экспоненциально затухающий вихрь, экранированный двумя стенками; аналоги тороидальных вихрей Тейлора; периодические «петлевые дорожки»; структура типа «кошачий глаз»; некоторые структуры магнитных вихрей в плазме [157].

В известном эллиптическом вихре Кирхгофа скорость жидкости непрерывна и жидкость на бесконечности покоится. В [158] исследован пространственный аналог такого течения. Рассматривались движения невязкой несжимаемой жидкости с кусочно-постоянными завихренностью и плотностью, которые терпят разрыв на поверхности эллипсоида. При этом допускается тангенциальный разрыв на границе эллипсоида и линейный рост на бесконечности скорости жидкости. В такой обобщенной постановке существуют нетривиальные пространственные решения. Найдены все течения такой структуры. Показано, что в этом классе течений содержатся, в частности, все известные обобщения вихря Кирхгофа (все они плоские).

В работах [159–162] проведен ряд расчетов плоских течений вязкой жидкости в замкнутых областях, границами которых являются твердые стенки. Использовался новый численный метод, созданный на основе абсолютно устойчивых разностных схем. Для решения двумерных систем разностных уравнений Стокса и Навье — Стокса, записанных в переменных «функция тока — завихренность», разработаны эффективные алгоритмы с использованием расщепления по физическим процессам и дискретного преобразования Фурье, обеспечивающие точное выполнение условий прилипания на стенках, а в случае двухсвязных областей и условия однозначности давления.

В работе [163] исследовался вопрос о возможности продолжения пограничного слоя Прандтля в случае, когда вниз по потоку давление возрастает. Установлено, что для любого распределения давления можно указать начальный профиль скорости, при котором продолжение возможно, если выполнено некоторое неравенство, связывающее величины, вычисленные по данным задачи.

Линейные (торнадоподобные) вихри. Изучение течений с линейными вихрями играет важную роль в понимании динамики вихревых образований в природе (циклонов, ураганов, смерчей, торнадо) и в различных технических устройствах (центробежных форсунках, вихревых камерах и т. п.). Эта область исследований развивалась в теоретическом и экспериментальном направлениях.

В [164] представлены результаты экспериментального исследования внутренней структуры и эволюции ядра торнадоподобного вихря, возникающего в течении между двумя соосными дисками одинакового радиуса, вращающимися с постоянной угловой скоростью в одном направлении. Измерения показывают, что устанавливается течение типа торнадоподобного вихря с твердотельно вращающимся ядром (поле средней скорости). Обнаружено, что поперечное сечение ядра при превышении некоторого критического числа Рейнольдса теряет круговую симметрию и приобретает форму овала, треугольника, четырехугольника и т. д. При этом число вершин многоугольника уменьшается с ростом числа Рейнольдса, что весьма необычно и противоречит интуитивным ожиданиям. Теоретического объяснения этого явления нет. При достаточно больших числах Рейнольдса ядро состоит из системы более мелких вторичных вихрей. Оно непрерывно деформируется и регулярно обменивается жидкостью с окружающим его потоком. Обмен осуществляется путем выброса из ядра спиральных рукавов, распространяющихся во внешний поток, и захвата внешней жидкости в ядро в виде отдельных струй.

В [165] экспериментально обнаружено, что в твердотельно вращающейся жидкости при самых разнообразных возмущениях возникает система торнадоподобных вихрей, параллельных оси вращения. На этой основе был предложен новый механизм возникновения смерчей, связанный с возбуждением интенсивных инерционных волн во вращающейся жидкости [166]. Установлено, что при движении жидкости, заполняющей вращающийся с постоянной угловой скоростью цилиндрический сосуд, гибкая верхняя поверхность которого колеблется заданным образом, возникает торнадоподобный вихрь с высоким уровнем завихренности, значительно превышающим удвоенную угловую скорость вращения сосуда [167]. Показано, что свойства этого вихря аналогичны известным свойствам природных атмосферных вихрей — смерчей. Установленная аналогия позволяет дать объяснение многим фактам, обусловленным прохождением смерча.

В работах [168, 169] на лабораторной установке показано, что вихри такого типа в определенных условиях могут возникать при взаимодействии мезоциклона с неровностями земной поверхности. Условия возникновения сформулированы в виде ряда критериев, дающих возможность прогнозировать появление смерчей в природе.

В точной постановке решена задача о воздействии вращательных тангенциальных напряжений определенного вида (спадающих обратно пропорционально квадрату расстояния до центра вращения) на плоскую свободную поверхность вязкой жидкости [170]. Показано, что в жидкости возникает линейный вихрь и восходящее течение вдоль него, причем течение оказывается автомодельным. Доказывается теорема существования, исследуется качественное поведение решений. Результаты используются для расчета апвеллинга (вне зоны максимальных ветров), возникающего при движении урагана над океаном.

В работах [171–175] для описания течений во вращательно-симметричных полых и торнадоподобных вихрях используются уравнения длинноволнового приближения, выведенные в [172], аналогичные уравнениям вихревой мелкой воды. Рассмотрено стационарное движение жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря без учета вращения жидкости в ядре [173] и с учетом [174]. Получен строгий критерий, выражающий условия продолжаемости решения на конечную или бесконечную высоту. Непродолжаемость решения связывается с возникновением распада вихря. Определено местоположение распада и построена аналитическая модель этого явления [171]. Эволюция течения в ядре вихря в зависимости от высоты исследована в [174] . В [175] рассмотрено стационарное движение жидкости в полом вихре в трубе переменного радиуса. Показано, что возможны два различных режима течения. Найден строгий критерий, разделяющий эти режимы. Показана аналогия с течениями идеального газа в трубах переменного сечения.

В настоящее время для расчета основных параметров течения в центробежной форсунке широко применяется предложенный Г. Н. Абрамовичем и независимо Дж. Тэйлором принцип максимального расхода (ПМР), дополняющий законы сохранения, которых в общем случае оказывается недостаточно. Из этого принципа следует, что поток в сопле форсунки должен быть точно критическим. В работе [176] показано, что для центробежной форсунки специальной формы (форсунка с насадком Борда) в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости основные параметры течения определяются точно с помощью законов сохранения. Сравнение точных результатов с полученными на основе ПМР обнаруживает существенное их различие. Так, например, скорость течения в сопле оказывается сверхкритической (превышает ее в два и более раза). Аналогичная ситуация имеет место и для течений через водосливы [177]. Эти результаты дают основания для сомнений в надежности расчетов, проводимых с помощью ПМР.

Турбулентность. Изучен переход от ламинарного режима к турбулентному в течении, вызванном продольными колебаниями цилиндра в безграничной жидкости [178]. Определена граница, разделяющая области ламинарного и турбулентного режимов.

Проведено экспериментальное исследование турбулентного осесимметричного безымпульсного струйного течения [179] и закрученного следа за сферой с компенсацией силы сопротивления [180]. Получен ряд статистических характеристик турбулентных пульсаций скорости.

В [181] экспериментально и с помощью численных расчетов исследуется процесс стирания «памяти» о первоначально несимметричном расположении источника тепла в симметричном в среднем турбулентном течении. Показано, что, хотя и медленно, распределения статистических характеристик поля температуры стремятся к той же симметрии, что и для поля скорости.

Гидроаэроупругость. Выполнены расчеты нестационарных аэродинамических характеристик для кольцевой решетки лопастей произвольной формы, колеблющихся в потоке несжимаемой жидкости [182], и для решетки пластин в дозвуковом потоке газа [183]. Численно определены пределы применимости гипотезы плоских и цилиндрических сечений.

В [184] рассмотрена эволюция вихревых следов при взаимодействии двух решеток. Анализ влияния эволюции вихревых следов на нестационарные аэродинамические характеристики решеток представлен в [185]. Экспериментальное и теоретическое исследование явления акустического резонанса, возникающего при аэродинамическом взаимодействии решеток, проведено в [186]. Показано, что для резонанса необходимо не только совпадение частот собственных колебаний и возбуждающих сил, но и выполнение определенного условия на соотношение числа лопастей взаимодвижущихся решеток.

На примере модельной задачи об устойчивости положения свободного вихреисточника в центре круговой решетки показана возможность возникновения за счет неустойчивости самовозбуждающейся окружной неравномерности потока в центробежных турбомашинах [187].

Разработан метод расчета аэроупругих колебаний решеток лопастей, позволяющий максимально приблизить расчетную модель к реальному объекту исследований [188].

В [189] предложена модель активного резонатора — типа резонатора Гельмгольца, применяемого для подавления акустических колебаний в камерах сгорания. Получены аналитические соотношения, позволяющие определить оптимальные параметры резонатора. С помощью этой модели дано объяснение не понятого ранее явления резкого повышения уровня вибраций активной части индуктивного источника энергии [190].

Проведены теоретические, экспериментальные и натурные исследования нестационарных процессов в камерах сгорания. Показано, что источником возбуждения низкочастотных акустических колебаний в камерах сгорания твердотопливных реактивных двигателей является гидродинамическая неустойчивость крупномасштабных вихревых структур [191, 192].

Удар по воде. Проблема соударения жидких и твердых масс принадлежит широкому классу задач о неустановившемся движении жидкости, занимающей изменяющуюся со временем область, граница которой состоит из свободной поверхности, движущейся твердой поверхности и линии контакта между ними.

В задаче об ударе твердого тела по жидкости особый интерес вызывает начальная стадия соударения, когда основные величины претерпевают значительные изменения. Сразу после начала движения меняется топология области течения: появляется отсутствовавшая ранее компонента границы жидкости, примыкающая к твердой поверхности. Даже после всех возможных упрощений задача остается нелинейной, так как размер области контакта заранее неизвестен. Он определяется из условия ограниченности перемещений жидких частиц [193], которое в рамках модели несжимаемой идеальной жидкости приводит в плоском случае к системе двух трансцендентных уравнений относительно координат точек контакта. Этого удалось достичь с помощью введения потенциала перемещений вместо традиционно используемого в задачах проникания потенциала скоростей. Оказалось, что вид уравнения зависит только от геометрии тела, это позволило детально исследовать влияние формы погружающегося тела на гидродинамические нагрузки и указать формы тел, для которых эти нагрузки экстремальны [194].

Скорость расширения смоченной части затупленного тела на начальном этапе его погружения в жидкость может превышать местную скорость звука в жидкости даже тогда, когда скорости соударения не очень велики. Поэтому пренебрежение сжимаемостью жидкости может вести в некоторых случаях к физически нереальным результатам. Асимптотическая теория соударения твердого тела со слабо сжимаемой жидкостью построена в [195–198]. Причем роль малого параметра играет малое число Маха, равное отношению скорости удара к скорости звука в покоящейся жидкости. Теория существенно основана на идеях, развитых в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Однако теперь размер области контакта зависит не только от формы тела, но и от истории движения тела и течения жидкости. Наличие неизвестной заранее линии контакта приводит к тому, что задача остается существенно нелинейной даже после линеаризации граничных условий и уравнений движения. Но и такая «частичная» линеаризация возможна не всегда. Предлагаемая теория позволяет описать распределение давления по смоченной части тела [195, 196], динамику ударных волн, генерируемых при ударе [197, 198], формирование брызговых струй [199], кавитационные явления [200], наблюдаемые в области контакта. Обобщение теории на случай деформируемого тела дано в работе [201]. Большинство результатов получено в аналитическом виде, что позволило детально проанализировать указанные явления и оценить основные характеристики. Ранее такие задачи исследовались только численно.

В заключение авторы выражают благодарность В. К. Андрееву, Л. Г. Бадратиновой, В. И. Букрееву, Ю. Г. Губареву, А. А. Коробкину, В. Б. Курзину, В. Ю. Ляпидевскому, Н. И. Макаренко, В. И. Налимову, П. И. Плотникову, В. В. Пухначеву, И. В. Стуровой, В. М. Тешукову и другим коллегам за предоставленные ими материалы, которые использованы при составлении настоящего обзора, а также Э. З. Боровской и Ф. В. Луговцовой за помощь в подготовке рукописи к изданию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Луговцов Б. А., Овсянников Л. В.** Развитие гидромеханики в Сибирском отделении АН СССР // ПМТФ. 1987. № 4. С. 3–22.
2. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 1992.
3. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
4. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333. С. 702-704.
5. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343. С. 156–159.
6. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 1011–1020.
7. **Овсянников Л. В.** Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–13.
8. **Овсянников Л. В.** Изобарические движения газа // Дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1994. Т. 30. С. 1792–1799.
9. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
10. **Хабиров С. В.** К анализу подмоделей вихревых движений в газовой динамике // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. С. 119.
11. **Хабиров С. В.** К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341. С. 764–766.
12. **Мелешко С. В.** Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58. С. 56–62.
13. **Мелешко С. В.** Об одном классе частично инвариантных решений плоских течений газа // Дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1994. Т. 30. С. 1825–1827.
14. **Талышев А. А.** О компьютерной программе построения дифференцирований конечномерной алгебры Ли // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1995. Т. 4. С. 272–274.
15. **Chupakhin A. P.** Optimal system of subalgebras of one solvable algebra L_7 // Lie Groups and Their Applications. Celal Bayar University, Manisa, Turkey. 1994. V. 1. P. 56–70.
16. **Головин С. В.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск, 1996 (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 5-96).
17. **Черевко А. А.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Новосибирск, 1996 (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 4–96).
18. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
19. **Шугрин С. М.** Галилеевы системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1980. Т. 16, № 12. С. 2205–2218.
20. **Шугрин С. М.** Законы сохранения, инвариантность и уравнения газовой динамики // ПМТФ. 1989. № 2. С. 10–18.
21. **Шугрин С. М.** Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 41–59.
22. **Шугрин С. М.** Диссипативная двухскоростная гидродинамика // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 4. С. 59–87.
23. **Плотников П. И.** Бифуркации критических точек гладких функционалов и неединственность решений задачи об уединенных волнах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 55, № 2. С. 340–366.
24. **Плотников П. И.** Существование бесконечного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабонелинейного волнового уравнения // Математ. сб. 1988. Т. 136 (178), № 4(8). С. 546–559.
25. **Налимов В. И.** Нестационарные вихревые поверхностные волны // Сиб. мат. журн. 1996. № 6. С. 1356–1366.
26. **Налимов В. И.** Сверхкритические течения из-под щита // ПМТФ. 1989. № 2. С. 77–81.
27. **Налимов В. И.** Докритические течения из-под щита // ПМТФ (в печати).
28. **Makarenko N. I.** Smooth bore in a two-layer fluid // Int. Ser. Numer. Math. Basel: Birkhauser Verlag, 1992. V. 106. P. 195–204.

29. **Макаренко Н. И.** Асимптотика несимметричных внутренних волн // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1993. Т. 2, № 4. С. 22–29.
30. **Макаренко Н. И.** О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 302–304.
31. **Агеев В. А., Букреев В. И., Гаврилов Н. В.** Новый тип плоских стационарных волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 187–190.
32. **Гаврилов Н. В.** Плавные боры в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // ПМТФ. 1987. № 3. С. 45–49.
33. **Протопопов Б. Е.** Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 84. С. 91–105.
34. **Протопопов Б. Е.** Численный анализ трансформации уединенной волны при отражении от вертикальной стенки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 115–123.
35. **Протопопов Б. Е.** Численное моделирование явления генерации солитонов движущейся областью поверхностного давления // ПМТФ. 1991. № 3. С. 78–84.
36. **Протопопов Б. Е.** Генерация солитонов вверх по потоку: численный анализ зависимости от ключевых параметров // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 1. С. 88–94.
37. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
38. **Teshukov V. M.** On Cauchy problem for long wave equation // Int. Ser. Numer. Math. Basel: Birkhauser Verlag, 1992. V. 106. P. 331–338.
39. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
40. **Тешуков В. М., Стерхова М. М.** Характеристические свойства системы уравнений сдвигового течения с немонотонным профилем скорости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 53–59.
41. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
42. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
43. **Тешуков В. М.** Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
44. **Чесноков А. А.** Точные решения уравнений вихревой мелкой воды // ПМТФ (в печати).
45. **Елемесова Б. Н.** Простые волны в слое идеальной баротропной жидкости // ПМТФ (в печати).
46. **Ляпидевский В. Ю.** Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // Лабораторное моделирование: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики. 1991. С. 87–97.
47. **Ляпидевский В. Ю.** Динамика однородного турбулентного слоя // ПМТФ. 1989. № 2. С. 73–76.
48. **Ляпидевский В.Ю.** Блокировка потока при обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 108–112.
49. **Liapidevskii V. Yu.** Mixing and blocking effects in two-layer flow over an obstacle // Proc. 4th Int. Symp. on Stratified Flows. 1994. V. 4. P. 183–189.
50. **Ляпидевский В. Ю.** Форсированные режимы обтекания препятствия двухслойной жидкостью // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 1. С. 61–63.
51. **Ляпидевский В.Ю.** Генерация длинных волн рельефом дна в двухслойном течении // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 34–37.
52. **Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю.** Аномальные режимы течения двухслойной жидкости над препятствием // ПМТФ. 1996. Т.37, № 4. С. 81–88.
53. **Стурова И. В.** Распространение плоских поверхностных волн над прямоугольной траншеей, частично закрытой крышкой // ПМТФ. 1991. № 5. С. 40–46.
54. **Стурова И. В.** Распространение плоских поверхностных волн над подводным порогом и погруженной пластиной // ПМТФ. 1991. № 3. С. 55–62.
55. **Коробкин А. А.** Распространение внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости над уступом // ПМТФ. 1992. № 2. С. 32–38.
56. **Коробкин А. А.** Фундаментальное решение задачи Коши — Пуассона для бассейна с неровным дном // ПМТФ. 1990. № 2. С. 40–47.
57. **Коробкин А. А., Стурова И. В.** Плоская задача Коши — Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном. Примеры численных расчетов // ПМТФ. 1990. № 3. С. 54–60.
58. **Коробкин А. А., Стурова И. В.** Пространственная задача Коши — Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 97. С. 37–50.
59. **Korobkin A. A., Sturova I. V.** Numerical calculation of unsteady surface waves using Maslov's operator method // Proc. 1st Int. Conf. Math. and Numer. Aspects of Wave Propagation Phenomena. Strastburg, France, 1991. P. 577–591.

60. **Стурова И. В.** Рассеяние внутренних волн, вызванных движущимся телом, на периодических донных неровностях // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 755–762.
61. **Сухинин С. В.** Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
62. **Коробкин А. А.** Асимптотический анализ нестационарной задачи о волнах в потоке двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 82–90.
63. **Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В.** Генерация внутренних волн при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 63–70.
64. **Букреев В. И., Гаврилов Н. В.** Экспериментальное изучение возмущений впереди крыла, движущегося в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1990. № 2. С. 102–105.
65. **Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Гусев А. В.** Внутренние волны в пикноклине при движении крыла над барьером // ПМТФ. 1991. № 4. С. 68–74.
66. **Ерманюк Е. В.** Экспериментальное изучение силового воздействия внутренних волн на неподвижную сферу // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 103–107.
67. **Гаврилов Н. В., Ерманюк Е. В.** О влиянии пикноклина на силы, действующие на неподвижный эллиптический цилиндр при набегании внутренних волн // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 61–69.
68. **Букреев В. И., Гусев А. В., Ерманюк Е. В.** Экспериментальное исследование движения погруженного тела на внутренних волнах // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 199–203.
69. **Гаврилов Н. В., Ерманюк Е. В., Стурова И. В.** О явлении преимущественной ориентации погруженного эллиптического цилиндра под воздействием поверхности волн // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 25–34.
70. **Букреев В. И.** Неустойчивость внутренних волн от цилиндра в сдвиговом потоке с большим числом Ричардсона // ПМТФ. 1988. № 5. С. 85–89.
71. **Стурова И. В.** Влияние внутренних волн на гидродинамические характеристики погруженного тела // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 6. С. 732–738.
72. **Стурова И. В.** Влияние аномальных дисперсионных зависимостей на рассеяние и генерацию внутренних волн // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 47–53.
73. **Стурова И. В.** Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 144–155.
74. **Стурова И. В.** Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела при наличии хода в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 32–44.
75. **Хабахпашева Т. И.** Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 91–97.
76. **Хабахпашева Т. И.** Дифракция внутренних волн на цилиндре в двухслойной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 4. С. 559–564.
77. **Gavrilov N. V., Ermanyuk E. V., Sturova I. V.** The forces exerted by internal waves on a restrained body submerged in a stratified fluid // Proc. 21th Symp. on Naval Hydrodynamics. Trondheim, Norway. 1996. P. 254–265.
78. **Горелов Д. Н., Горлов С. И.** Движение профиля вблизи плоского экрана // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–52.
79. **Горелов Д. Н., Горлов С. И.** Линейная задача о движении профиля под границей раздела двух тяжелых жидкостей // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 43–47.
80. **Горлов С. И.** Движение профиля над границей раздела двух тяжелых жидкостей // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 48–51.
81. **Горлов С. И.** Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 127–132.
82. **Горлов С. И.** Влияние внутренних линейных волн на гидродинамические характеристики вихреисточника // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 146–153.
83. **Ткачева Л. А.** Нестационарное движение тонкого крыла в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 6. С. 37–49.
84. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.
85. **Старовойтов В. Н.** Разрешимость в малом по времени задачи Стефана с условием Гиббса — Томсона на межфазной границе // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 95. С. 151–156.
86. **Kaliev I. A.** Nonequilibrium phase transitions in frozen grounds // Free Boundary Problems in Continuum Mechanics. Int. Ser. of Numerical Math. 1992. V. 106. P. 141–148.
87. **Плотников П. И., Старовойтов В. Н.** Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел уравнений фазового поля // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–470.
88. **Плотников П. И.** Уравнения с переменным направлением параболичности и эффект гистерезиса // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 6. С. 691–693.
89. **Плотников П. И.** Предельный переход по вязкости в уравнениях с переменным направлением параболичности // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 665–675.

90. **Plotnikov P. I.** Forward-backward parabolic equations and Hysteresis // Зап. науч. семинара Петербургского оптико-механич. ин-та. С.-Петербург: Наука, 1996. Т. 28, вып. 233. С. 191–216.
91. **Плотников П. И.** Предельный переход по малому параметру в уравнении Хана — Хилларда // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3.
92. **Старовойтов В. Н.** Модель движения двухкомпонентной жидкости с учетом капиллярных сил // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 61–71.
93. **Andreev V. K., Admaev O. V.** Axisymmetric thermocapillary flow in cylinder and cylindrical layer // Hydromech. and Heat / Mass Transfer in Microgravity. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publ., 1992. P. 169–172.
94. **Андреев В. К., Адмаев О. В.** Моделирование процессов выращивания кристаллов методом бестигельной зонной плавки // Проблемы обеспечения качества изделий в машиностроении / Тр. Междунар. конф. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1994. С. 372–380.
95. **Андреев В. К., Родионов А. А., Рябицкий Е. А.** Возникновение термокапиллярной конвекции в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слоях под действием внутренних источников тепла // ПМТФ. 1989. № 2. С. 101–108.
96. **Андреев В. К., Рябицкий Е. А.** Численное исследование термокапиллярной неустойчивости в цилиндрическом слое // Гидродинамика и тепломассообмен в невесомости. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1988. С. 35–44.
97. **Ryabitskii E. A.** Oscillatory thermocapillary instability of a liquid layer heated from below // Microgravity Sci. Thechnol. VIII/3 (1995), Munich. P. 1–5.
98. **Andreev V. K., Ryabitskii E. A.** Numerical investigation of thermocapillary instability of Marangoni convection in a cylindrical layer // Microgravity Sci. Technol. VII/1 (1994), Munich. P. 36–40.
99. **Рябицкий Е. А.** Об устойчивости термокапиллярного движения в цилиндрическом слое // ПМТФ. 1989. № 4. С. 50–52.
100. **Badratinova L. G., Hennenberg M., Colinet P., Legros J. C.** On Rayleigh–Teylor instability in liated liquid–gas and liquid–vaper liate // Russian J. of Eng. Thermophys. 1996. V. 6, N 1. P. 1–31.
101. **Badratinova L. G., Hennenberg M., Colinet P., Legros J. C.** Theoretical models for boiling at microgravity // Lecture Notes in Phys. 1996. V. 464. P. 361–370.
102. **Бадратинова Л. Г.** О кризисе перехода пузырькового режима кипения в пленочный // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 15–20.
103. **Pukhnachov V. V., Voinov O. V.** Mathematical model of motion of emulsion under effect of thermocapillary forces and microacceleration // Ninth Europ. Symp. of Gravity Dependent Phenomena in Phys. Sci.: Abstrs. Berlin, 1995. P. 32–33.
104. **Pukhnachov V. V., Voinov O. V.** Thermocapillary motion in an emulsion // Fluid Physics in Microgravity. Proc. 3rd NASA Conf. Cleveland, 1996. P. 337–342.
105. **Рябицкий Е. А.** Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 6–10.
106. **Рябицкий Е. А.** Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии ПАВ // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 3–8.
107. **Антановский Л. К.** Влияние поверхностно-активных веществ на процесс утоньшения вертикальной пленки жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 54–58.
108. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1992. Т. 6 (23), № 4. С. 47–58.
109. **Pukhnachov V. V.** Solvability of initial boundary-value problem in nonstandard model of convection // Зап. науч. семинара ПОМИ. С.-Петербург: Наука, 1996. Т. 233. С. 217–226.
110. **Пухначев В. В.** Стационарная задача микроконвекции // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 109–116.
111. **Пухначев В. В.** Микроконвекция в вертикальном слое // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 76–84.
112. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в слабых силовых полях. Сравнение двух моделей при численном исследовании // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 58–63.
113. **Гончарова О. Н.** Численное исследование микроконвекции в областях со свободными границами // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 64–68.
114. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
115. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
116. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.
117. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
118. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 1. С. 100–101.

119. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
120. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and nonuniformly vibrating liquid // Proc. Int. Workshop on G-Jitter. US, Potsdam: Clarkson Univ., 1993.
121. **Лаврентьева О. М.** О движении твердого тела в идеальной пульсирующей жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 103. С. 120–125.
122. **Кашеваров А. А.** Численное моделирование взаимосвязи напорной фильтрации и поверхностного стока // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 40–48.
123. **Антонцев С. Н., Кашеваров А. А.** Локализация решений нелинейных параболических уравнений, вырождающихся на поверхности // Там же. С. 7–20.
124. **Эмих В. Н.** Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993.
125. **Пеньковский В. И., Рыбакова С. Т.** Коркообразование при бурении скважин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 90. С. 72–80.
126. **Пеньковский В. И., Рыбакова С. Т.** Численное моделирование процессов массопереноса при подземном выщелачивании // Там же. С. 81–92.
127. **Капранов Ю. И.** Структурная модель процесса механической кольматации пористой среды // Там же. С. 27–39.
128. **Доманский А. В.** Стабилизация обобщенных решений вырождающихся задач двухфазной фильтрации // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 641–648.
129. **Антонцев С. Н., Диаз Н. И., Доманский А. В.** Устойчивость и стабилизация обобщенных решений вырождающихся задач двухфазной фильтрации // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 1151–1155.
130. **Антонцев С. Н., Доманский А. В., Пеньковский В. И.** Фильтрация в прискважинной зоне пласта и проблемы интенсификации притока. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1989.
131. **Пеньковский В. И.** Капиллярное давление, гравитационное и динамическое распределение фаз в системе вода — нефть — газ — порода // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 85–90.
132. **Монахов В. Н., Хуснутдинова Н. В.** О сопряжении каналовых и фильтрационных течений вязкой несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 95–99.
133. **Владимиров В. А.** К неустойчивости равновесия жидкостей // ПМТФ. 1989. № 2. С. 108–116.
134. **Владимиров В. А.** Вариационные подходы в теории устойчивости бароклинной атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 4. С. 348–355.
135. **Владимиров В. А.** К неустойчивости равновесия вязкой капиллярной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 89. С. 92–106.
136. **Владимиров В. А., Румянцев В. В.** К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 608–612.
137. **Владимиров В. А., Румянцев В. В.** К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 190–200.
138. **Ильин К. И.** Неустойчивость состояний равновесия жидких кристаллов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 96. С. 111–121.
139. **Губарев Ю. Г.** К обращению теоремы Лагранжа в магнитной гидродинамике // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 6. С. 988–991.
140. **Губарев Ю. Г.** Неустойчивость самогравитирующей сжимаемой среды // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 68–77.
141. **Ильин К. И.** К устойчивости бароклинного вихря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27, № 5. С. 584–588.
142. **Губарев Ю. Г.** К неустойчивости вращательно-симметричных МГД течений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 19–25.
143. **Владимиров В. А.** Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 5. С. 727–733.
144. **Владимиров В. А.** Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.
145. **Vladimirov V. A.** On nonlinear stability of incompressible fluid flows // Arch. Mech. 1986. V. 38, N 5/6. P. 689–696.
146. **Владимиров В. А.** Условия устойчивости течений идеальной жидкости с разрывами вихря // ПМТФ. 1988. № 1. С. 83–91.
147. **Владимиров В. А., Губарев Ю. Г.** Условия нелинейной устойчивости плоских и винтовых МГД течений // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 3. С. 442–450.

148. **Белов С. Я., Владимиров В. А.** Пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 84. С. 21–27.
149. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
150. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989.
151. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Турбулентное вихревое динамо // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 613–624.
152. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
153. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
154. **Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 36–43.
155. **Луговцов Б. А.** Осесимметричная спонтанная закрутка в идеально проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ (в печати).
156. **Капцов О. В.** Некоторые классы вихревых течений идеальной жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 109–117.
157. **Капцов О. В.** Стационарные вихревые структуры в идеальной жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1990. Т. 98, вып. 2(8). С. 532–541.
158. **Гарипов Р.М.** Эллипсоидальные капля или вихрь в неоднородном потоке // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 76–80.
159. **Воеводин А. Ф., Овчарова А. С.** О вычислении функции вихря на границе замкнутой круговой области // Моделирование в механике. 1991. Т. 5(22), № 1. С. 115–120.
160. **Воеводин А. Ф.** Устойчивость и реализация неявных схем для уравнений Стокса // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 1. С. 119–130.
161. **Воеводин А. Ф., Остапенко В. В., Пивоваров Ю. В., Шугрин С. М.** Проблемы вычислительной математики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995.
162. **Воеводин А. Ф.** Устойчивость разностной краевой задачи для уравнений Стокса в двухсвязной круговой области // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1995. Т. 4, № 12. С. 70–76.
163. **Кузнецов В. В.** Об условиях разрешимости краевой задачи для пограничного слоя Прандтля // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 624–629.
164. **Ахметов Д. Г., Тарасов В. Ф.** О структуре и эволюции вихревых ядер // ПМТФ. 1986. № 5. С. 68–73.
165. **Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф.** О структуре течения вращающейся жидкости после движения в ней тела // ПМТФ. 1988. № 6. С. 113–117.
166. **Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф.** Экспериментальная модель смерча // ПМТФ. 1987. № 5. С. 115–122.
167. **Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф.** Экспериментальная модель смерча // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 2. С. 297–300.
168. **Макаренко В. Г.** О некоторых характерных особенностях инерционных резонансов во вращающейся жидкости // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 2. С. 89–96.
169. **Макаренко В. Г.** О зависимости времени формирования осциллирующих вихрей от частоты возмущений вращающейся жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 85–94.
170. **Никулин В. В.** Коническое вихревое течение, индуцируемое тангенциальными напряжениями на плоской свободной поверхности // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 4. С. 594–600.
171. **Nikulin V. V.** Space evolution of tornado-like vortex core // Int. Ser. Numer. Math. Basel: Birkhauser Verlag, 1992. V. 106. P. 229–237.
172. **Никулин В. В.** Аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. № 2. С. 47–52.
173. **Никулин В. В.** Распад вертикального торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. № 4. С. 42–47.
174. **Никулин В. В.** Движение завихренной жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 81–87.
175. **Никулин В. В.** Полый вихрь с осевой скоростью в трубе переменного радиуса // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 49–53.
176. **Луговцов Б. А.** Определение основных параметров течения центробежной форсунки с помощью законов сохранения // ПМТФ. 1989. № 2. С. 68–73.
177. **Луговцов Б. А.** О принципе максимального расхода // ПМТФ. 1991. № 4. С. 105–106.
178. **Букреев В. И.** Экспериментальное изучение диапазона применимости решения второй задачи Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 26–31.

179. **Алексеенко Н. В., Костомаха В. А.** Экспериментальное исследование осесимметричного безымпульсного турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. № 1. С. 65–69.
180. **Костомаха В. А., Леснова Н. В.** Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 88–98.
181. **Букреев В. И., Деменков А. Г., Костомаха В. А., Черных Г. Г.** Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 115–126.
182. **Рябченко В. П.** Расчет нестационарных аэродинамических характеристик кольцевой решетки лопастей произвольной формы // Тр. ЦИАМ. 1987. № 1221. С. 4–14.
183. **Рябченко В. П.** Нестационарные аэродинамические характеристики пространственной решетки пластин в дозвуковом потоке газа // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 45–55.
184. **Курзин В. Б.** Течение идеальной жидкости, индуцируемое периодической системой вихревых следов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 87. С. 88–96.
185. **Юдин В. А.** Решетка профилей в нестационарном завихренном потоке // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 85–91.
186. **Измайлов Р. А., Курзин В. Б., Окулов В. П.** Явление акустического резонанса при аэродинамическом взаимодействии решеток в дозвуковом потоке газа // ПМТФ. 1987. № 1. С. 20–27.
187. **Курзин В. Б., Овсянникова О. Б.** Об устойчивости положения вихреисточника в центре вращающейся круговой решетки профилей // Тр. ЦИАМ. 1991. № 1293. С. 87–98.
188. **Курзин В. Б., Коробейников С. Н., Рябченко В. П., Ткачева Л. А.** Собственные колебания лопастей однородной решетки гидротурбин в жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 80–90.
189. **Курзин В. Б.** Асимптотическая модель активного резонансного поглотителя акустических колебаний в ограниченной области // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 44–55.
190. **Курзин В. Б.** Гидроупругие колебания активной части индуктивного источника энергии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 151–158.
191. **Сухинин С. В., Ахмадеев В. Ф.** Гидродинамические источники колебаний в камерах сгорания // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 6. С. 38–46.
192. **Сухинин С. В., Ахмадеев В. Ф.** Колебания и вихри в камере сгорания // Изв. вузов. Физика. 1994. № 4. С. 111–118.
193. **Korobkin A. A., Pukhnachov V. V.** Initial stage of water impact // Annual Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 159–185.
194. **Korobkin A. A.** Acoustic effects on water impact // Proc. 10th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Oxford, 1995. P. 25.1–25.4.
195. **Коробкин А. А.** Акустическое приближение в задаче погружения затупленного контура в идеальную жидкость // ПМТФ. 1992. № 4. С. 48–54.
196. **Korobkin A. A.** Blunt-body impact on the free surface of a compressible liquid // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 319–342.
197. **Korobkin A. A.** Impact on the surface of a compressible liquid // Propagation of a Weak, Nearly Plane Shock Wave. Shock Waves. 1995. V. 4, N 4. P. 209–216.
198. **Korobkin A. A.** Impact on the surface of a compressible liquid // Focusing of a Weak, Near-Cylindrical Shock Wave. Shock Waves. 1995. V. 4, N 4. P. 217–224.
199. **Korobkin A. A.** Jetting under body impact on a liquid free surface // Proc. 4th Int. Symp. on Nonlinear and Free-Surface Flows, Hiroshima Univ., 1995. P. 5–8.
200. **Korobkin A. A.** Low-pressure zones under a liquid–solid impact // Fluid Mech. and its Appl. 1994. V. 23. P. 375–381.
201. **Korobkin A. A.** Acoustic approximation in the slamming problem // J. Fluid Mech. 1996. V. 318. P. 165–188.

Поступила в редакцию 30/XII 1996 г.