ПМТФ, № 6, 1961

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О. Д. Григорьев

(Москва)

В статье посредством криволинейных ортогональных координат, за которые приняты линии тока и ортогональные к ним траектории, рассматриваются следующие классы плоского течения жестко-пластического тела:

1) течение, при котором угол между вектором скорости и главным напряжением σ_1 постоянен вдоль соответствующей линии тока;

2) течение, где указанный угол сохраняет постоянное значение вдоль линий тока;

3) течение, где линии тока совпадают с траекториями главных напряжений.

Исследуются случаи, когда линии тока являются логарифмическими спиралями, и др. Показан способ построения решения полной системы уравнений для рассмотренных классов течения. Статья является развитием работы [1].

В статье [1] было показано, что уравнения плоского течения жестко-пластического тела (например [2])

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2 \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \qquad \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\partial v_y/\partial x+\partial v_x/\partial y}{\partial v_x/\partial x-\partial v_y/\partial y}$$

в криволинейных координатах $q_1=\mathrm{const}$, $q_2=\mathrm{const}$, когда за последние приняты линии тока и ортогональные к ним кривые, имеют вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q_1}+\frac{k\partial\cos 2\beta}{\partial q_1}+\frac{2k\sin 2\beta}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{kH_1}{H_2}\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_2}+\frac{2k\cos 2\beta}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}=0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q_2}+\frac{kH_2}{H_1}\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_1}-\frac{2k\cos 2\beta}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{k\partial\cos 2\beta}{\partial q_2}+\frac{2k\sin 2\beta}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}=0 \tag{0.3}$$

$$v=\frac{f(q_2)}{H_2}, \qquad \operatorname{tg} 2\beta=\frac{H_1}{2\partial H_2/\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\frac{H_1H_2}{f(q_2)} \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)=0 \qquad \left(\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right) \tag{0.5}$$

Здесь β — угол между направлением большего главного напряжения σ_1 и вектором скорости, v — модуль вектора скорости, H_1, H_2 — коэффициенты Ламе, $f(q_2)$ — некоторая функция своего аргумента.

Эта система эквивалентна трем уравнениям [1]

$$\frac{2\partial^2\cos 2\beta}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_2}\left[\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)\right]-\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)+\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]+$$
$$+\frac{2\partial\cos 2\beta}{\partial q_2}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial\cos 2\beta}{\partial q_1}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial^2\sin 2\beta}{\partial q_2^2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial^2\sin 2\beta}{\partial q_1^2}+$$
$$+4\sin 2\beta\,\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)+2\cos 2\beta\,\frac{\partial^2}{\partial q_1\partial q_2}\ln H_1H_2=0$$

$$\operatorname{tg} 2\beta=\frac{H_1}{2\partial H_2/\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\frac{H_1H_2}{f(q_2)}, \qquad \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)=0 \tag{0.6}$$

Исследуем теперь указанные классы плоского течения жестко-пластического тела, а именно:

а) плоское течение, для которого $\beta = \beta(q_2)$, т. е. течение с постоянным углом наклона большего главного напряжения σ_1 к соответствующей линии тока. Для случая, когда функция $\beta(q_2)$ изменяет свой знак, моделью такого течения является движение среды в длинном криволинейном канале, обе стенки которого имеют постоянную, но различную шероховатость;

б) течение, где $\beta(q_1, q_2) = \mathrm{const}$, т. е. движение среды с одинаковым углом наклона главного напряжения σ_1 ко всем линиям тока. При этом случай, когда $\beta = \pm\pi/4$, рассматривался в [1]. Случай же, когда $\beta = 0$ или $\beta = 0 \pm \pi/2$, рассматривается ниже;

в) течение, в котором линии тока совпадают с траекториями главных напряжений. Моделью такого течения является движение среды в длинном криволинейном канале с идеально гладкими стенками. Этот случай уже обсуждался в [1], в настоящей статье указанное исследование продолжено.

1. Рассмотрим вначале плоское течение, для которого $\beta(q_2)$. В этом случае первое из уравнений (0.6) принимает вид

$$\frac{d\sin 2\beta}{dq_2}\left[\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)\right]+2\frac{d\cos 2\beta}{dq_2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{H_1}{H_2}\frac{d^2\sin 2\beta}{dq_2{}^2}+$$
$$+4\sin 2\beta\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)+2\cos 2\beta\left(\frac{\partial^2\ln H_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2\ln H_2}{\partial q_1\partial q_2}\right)=0 \qquad (1.1)$$

Так как согласно (0.4), (0.5)

$$2\operatorname{tg}2\beta\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=-2\operatorname{tg}2\beta\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial q_1\partial q_2}\ln H_1H_2 \qquad (1.2)$$

то (1.1) можно записать в виде

$$\frac{d\sin 2\beta}{dq_2}\left(\frac{3\,\partial\ln H_1}{\partial q_2}-\frac{\partial\ln H_2}{\partial q_2}\right)+\frac{2\,d\cos 2\beta}{dq_2}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{d^2\sin 2\beta}{dq_2{}^2}=0 \qquad (1.3)$$

или, используя еще раз (0.4), найдем

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\left[\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 f(q_2)\right]=-\frac{d}{dq_2}\ln\frac{d\sin 2\beta}{dq_2},\quad \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2=\frac{\psi(q_1)}{f(q_2)(\sin 2\beta)'} \qquad (1.4)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по q_2, $\psi_{(q_1)}$ — некоторая функция. Подставив два последних соотношения в (0.4), получим следующее уравнение относительно H_2

$$\frac{2\,\partial\ln H_2}{\partial q_1}\left(\frac{f}{\psi}\frac{d\sin 2\beta}{dq_2}\right)^{1/2}=\operatorname{ctg}2\beta\left(\frac{2\,\partial\ln H_2}{\partial q_2}-\frac{3}{2}\frac{d}{dq_2}\ln f-\frac{1}{2}\frac{d}{dq_2}\ln\frac{d\sin 2\beta}{dq_2}\right) \qquad (1.5)$$

Уравнение характеристик для (1.5) есть

$$\frac{1}{2}\frac{\psi^{1/2}}{[f(\sin 2\beta)']^{1/2}}dq_1=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\beta\,dq_2=\frac{-\operatorname{tg}2\beta\,d\ln H_2}{{}^3/_2(\ln f)'+{}^1/_2[\ln(\sin 2\beta)']'} \qquad (1.6)$$

откуда найдем следующие первые интегралы (1.7)

$$\int\psi^{1/2}dq_1+\int\operatorname{tg}2\beta\,[f(\sin 2\beta)']^{1/2}dq_2=u,\qquad \frac{3}{4}\ln f+\frac{1}{4}\ln(\sin 2\beta)'-\ln H_2=w$$

Таким образом, общее решение (1.5) имеет вид

$$\ln H_2=\frac{3}{4}\ln f+\frac{1}{4}\ln(\sin 2\beta)'+F(u) \qquad (1.8)$$

Здесь $F(u)$ — некоторая функция своего аргумента, который определяется из (1.7). Итак, ввиду (1.4), (1.8) получим

$$H_1 = f(q_2)^{1/4}[(\sin 2\beta)']^{-1/4}\psi(q_1)^{1/2}\exp[F(u)]$$
$$H_2 = f(q_2)^{3/4}[(\sin 2\beta)']^{1/4}\exp[F(u)] \qquad (1.9)$$

Очевидно, функции $f(q_2)$, $\psi(q_1)$, $\sin 2\beta$, $F(u)$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение Ламе. Исследуем вначале вид функции $F(u)$. Заметим, что случай, когда $\psi(q_1) = \mathrm{const}$ или $F(u) = \mathrm{const}$, что согласно (1.9) соответствует эквидистантным линиям тока, был рассмотрен в [1]. Подставив (1.9) в уравнение Ламе (0.5), найдем

$$-\frac{1}{2}[f(\sin 2\beta)']^{-3/2}[f'(\sin 2\beta)' + f(\sin 2\beta)'']\frac{1}{4}\left[\ln\frac{f}{(\sin 2\beta)'}\right]' +$$
$$+[f(\sin 2\beta)']^{-1/2}\frac{1}{4}\left[\ln\frac{f}{(\sin 2\beta)'}\right]'' + \frac{\partial F}{\partial u}(\operatorname{tg} 2\beta)' + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{[f(\sin 2\beta)']^{1/2}}{\cos^2 2\beta} = 0 \qquad (1.10)$$

Отсюда после простых преобразований и дифференцирования по q_1 получим следующее уравнение для $F(u)$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} + 2[f(\sin 2\beta)']^{-1/2}\beta'\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0 \qquad (1.11)$$

Так как $F(u) \neq \mathrm{const}$, $\psi(q_1) \neq \mathrm{const}$, $\beta = \beta(q_2)$, то из (1.7), (1.11) следует

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \qquad F = c_1 u + c_2 \qquad (1.12)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \Big/ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right) = \psi^{1/2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \Big/ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right) = 0$$
$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \Big/ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = -2\beta'[f(\sin 2\beta)']^{-1/2} = C_3 \quad (C_i = \mathrm{const}) \qquad (1.13)$$

Ограничимся рассмотрением соотношений (1.12). В этом случае согласно (1.9), (1.7) будем иметь

$$H_1 = \left[\frac{f(q_2)\psi^2(q_1)}{(\sin 2\beta)'}\right]^{1/4}\exp\left\{c_1\int\psi(q_1)^{1/2}dq_1 + c_1\int \operatorname{tg} 2\beta[f(q_2)(\sin 2\beta)']^{1/2}dq_2 + c_2\right\}$$
$$H_2 = [f(q_2)^{3/4}(\sin 2\beta)']^{1/4}\exp\left\{c_1\int\psi(q_1)^{1/2}dq_1 + \right.$$
$$\left. + c_1\int \operatorname{tg} 2\beta\,[f(q_2)(\sin 2\beta)']^{1/2}dq_2 + c_2\right\} \qquad (1.14)$$

или

$$H_1 = AR_1(q_1)R_2(q_2), \qquad H_2 = BQ_1(q_1)Q_2(q_2) \qquad (A, B = \mathrm{const}) \qquad (1.15)$$

Для определения функций $R_1(q_1)$, $Q_1(q_1)$, $R_2(q_2)$, $Q_2(q_2)$ заметим, что из (1.14) следует

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = c_1[f(q_2)(\sin 2\beta)']^{1/2} = F_1(q_2) \qquad (1.16)$$

Из уравнения Ламе получим

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = F_2(q_1) \qquad (1.17)$$

Здесь $F_1(q_2)$ и $F_2(q_1)$ — некоторые функции своих аргументов. Сравнивая (1.16), (1.17) с (1.15), найдем

$$Q_1'(q_1) = c_3 R_1(q_1), \qquad Q_2(q_2) = c_4 R_2'(q_2) \qquad (1.18)$$

Таким образом,

$$H_1 = AR_1(q_1)\, R_2(q_2), \qquad H_2 = B\left[c_3 \int R_1(q_1)\, dq_1 + c_5\right] c_4 R_2'(q_2)$$

или, положив для удобства $c_3 = c_4 = 1$, не уменьшая при этом общности,

$$H_1 = A\Phi'(q_1)\, \Psi(q_2), \qquad H_2 = B\Phi(q_1)\, \Psi'(q_2) \tag{1.19}$$

Здесь $\Phi(q_1)$ и $\Psi(q_2)$ — произвольные функции своих аргументов. Соотношения (1.19) при $A = B = 1$ были приведены без вывода в [1].

Покажем, что уравнениям (1.19) на плоскости $0xy$ соответствует класс взаимно ортогональных логарифмических спиралей. Так как

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial S_1} = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \qquad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial \alpha}{\partial S_2} = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}$$
$$dS_1 = H_1 dq_1, \qquad dS_2 = H_2 dq_2 \tag{1.20}$$

(Здесь R_i— радиус кривизны координатной линии, $\partial\alpha / \partial S_i$ — ее кривизна, dS_i — дифференциал дуги), то натуральные уравнения координатных линий имеют вид

$$R_1 = -\frac{B}{A} s_1 + c_1, \qquad R_2 = -\frac{A}{B} s_2 + c_2 \tag{1.21}$$

и совпадают, таким образом, с уравнениями логарифмических спиралей.

Найдем теперь отображение полей (1.19) на плоскость $0xy$ через функции $\Phi(q_1)$ и $\Psi(q_2)$. Заметим, что из (1.19) и (1.20) легко следует

$$\alpha = \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}} \tag{1.22}$$

Отсюда в силу известных соотношений

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = H_1 \cos\alpha, \qquad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -H_2 \sin\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial q_1} = H_1 \sin\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial q_2} = H_2 \cos\alpha \tag{1.23}$$

получим

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = A\Phi'(q_1)\, \Psi(q_2) \cos \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}, \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -B\Phi(q_1)\, \Psi'(q_2) \sin \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = A\Phi'(q_1)\, \Psi(q_2) \sin \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_2} = \Phi B(q_1)\, \Psi'(q_2) \cos \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}$$

Интегрируя последние уравнения по частям, найдем

$$x = \frac{AB\,\Phi(q_1)\,\Psi(q_2)}{A^2 + B^2}\left[B \cos \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}} - A \sin \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}\right]$$
$$y = \frac{AB\Phi(q_1)\,\Psi(q_2)}{A^2 + B^2}\left[A \cos \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}} + B \sin \ln \frac{c\Psi(q_2)^{B/A}}{\Phi(q_1)^{A/B}}\right] \tag{1.24}$$

При этом параметр q_2 сохраняет постоянное значение вдоль линий тока, а q_1 — вдоль ортогональных к ним кривых. Уравнение (1.3) в рассматриваемом случае обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\beta(q_2)$

$$(\sin 2\beta)' \,[3(\ln\Psi)' - (\ln \Psi')'] + 2\frac{B}{A}(\cos 2\beta)'(\ln\Psi)' + (\sin 2\beta)'' = 0 \tag{1.25}$$

Остальные функции находятся квадратурами из (0.2)—(0.4). Построенное таким образом решение можно представить как обтекание средой некоторого логарифмического профиля с постоянной шероховатостью. Нормальные напряжения на последнем согласно (0.2), (1.19) будут

$$\sigma_{22} = \sigma - k\cos 2\beta = -2k \sin 2\beta \frac{A}{B} \ln\Phi(q_1) - \frac{kA \ln\Phi(q_1)}{B \ln \Psi'(q_2)}(\sin 2\beta)' -$$
$$- 2k \cos 2\beta \ln \Phi(q_1) - k\cos 2\beta + c \tag{1.26}$$

и величина скорости на обтекаемом контуре определится из (0.4), т. е.

$$v = f(q_2)/B\Psi'(q_2)\,\Phi(q_1)$$

Границей решения может быть линия тока, совпадающая с линией скольжения ($\beta = \pm\pi/4$), отделяющая, например, неподвижную жесткую область тела.

Представляет интерес случай, когда $\sigma = \sigma(q_2)$, $\beta = \beta(q_2)$, т. е. когда на обтекаемой поверхности постоянны как касательные, так и нормальные напряжения. В этом случае уравнения (0.2) — (0.4) имеют вид

$$2\sin 2\beta\,(\ln\Psi)' + (\sin 2\beta)' + \frac{2B}{A}\cos 2\beta\,(\ln\Psi)' = 0$$

$$\sigma' - 2k\cos 2\beta\,(\ln\Psi)' - k(\cos 2\beta)' + 2k\frac{B}{A}\sin 2\beta\,(\ln\Psi)' = 0$$

$$\frac{2B}{A}(\sin 2\beta)(\ln\Psi)' - \cos 2\beta\,(\ln\Psi)' - \cos 2\beta\,(\ln\Psi')' - \cos 2\beta\,(\ln f)' = 0$$

или после простых преобразований

$$d\ln\Psi(q_2) = -\frac{\cos 2\beta\, d\beta}{\sin 2\beta + B/A\cos 2\beta}$$

$$\frac{B}{A}d\sigma + \frac{2kB}{A}\sin 2\beta\, d\beta + 2k\cos 2\beta\, d\beta - 2k\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right)\frac{\sin 2\beta\cos 2\beta\, d\beta}{\sin 2\beta + B/A\cos 2\beta} = 0 \qquad (1.27)$$

$$\left(\frac{2B^2}{A^2} + 1\right)d\ln\Psi(q_2) + d\ln\Psi'(q_2) - d\ln f(q_2) + \frac{2B}{A}d\beta = 0$$

Таким образом, найдем

$$\ln\Psi(q_2) = -\frac{1}{2}\sin\varphi(\cos\varphi)(2\beta - \varphi) - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\ln\cos(2\beta - \varphi) + c_1$$

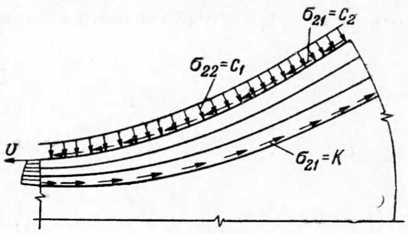
$$\frac{B}{A}\sigma - \frac{kB}{A}\cos 2\beta + k\sin 2\beta + k\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right)\sin\varphi\Big[\cos 2\varphi\cos(2\beta - \varphi) -$$

$$- \sin 2\varphi\sin(2\beta - \varphi) + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \frac{\varphi}{2}\right)\Big] = c_2 \qquad (1.28)$$

$$\frac{2B}{A}\beta = \ln f(q_2) - \left(2\frac{B^2}{A^2} + 1\right)\ln\Psi(q_2) - \ln\Psi'(q_2) + c_3$$

Здесь $\varphi = \operatorname{arc\,tg} A/B$. Полученное решение зависит от выбора функции $\Psi(q_2)$. Модель течения показана на фиг. 1.

2. Рассмотрим плоское течение, для которого $\beta(q_1, q_2) = \mathrm{const}$, т. е. главное напряжение σ_1 имеет постоянный угол наклона к линиям тока.



Пусть $\operatorname{tg} 2\beta = A$, где $A = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (0.6) принимает вид

$$2A\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial^2\ln H_1H_2}{\partial q_1\partial q_2} = 0 \qquad (2.1)$$

С другой стороны, из (0.4) следует

$$2A\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial^2\ln H_1H_2}{\partial q_1\partial q_2} = 0 \qquad (2.2)$$

Откуда из уравнения Ламе (0.5) получим следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial^2\ln H_1H_2}{\partial q_1\partial q_2} = 0 \qquad (2.3)$$

или

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = F_2(q_2), \qquad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = F_1(q_1), \qquad H_1H_2 = R_1(q_1)\,R_2(q_2) \qquad (2.4)$$

где $F_1(q_1)$, $F_2(q_2)$, $R_1(q_1)$, $R_2(q_2)$ — некоторые функции своих аргументов.

Таким образом, любое поле линий тока, которое обращает (0.4) в постоянную, т. е. $\operatorname{tg} 2\beta = A \neq 0$, является возможным.

Очевидным решением системы (2.3) являются соотношения (1.19). При этом уравнения (0.2) — (0.3) имеют следующие интегралы:

$$\sigma + \frac{2kA}{B} \ln \Phi(q_1) \sin 2\beta + 2k \cos 2\beta \ln \Phi(q_1) = \eta(q_2)$$

$$\sigma - 2k \ln \Psi(q_2) \cos 2\beta + 2\frac{kB}{A} \ln \Psi(q_2) = \gamma(q_1) \qquad (2.5)$$

$$f(q_2) = c\,[\Psi(q_2)]^{\left(1-2\frac{B}{A}\operatorname{tg} 2\beta\right)} \Psi'(q_2)$$

3. Обратимся теперь к случаю совпадения линий тока с траекториями главных напряжений, т. е. $\beta = 0 \pm \pi/2$. Будем для определенности полагать, что $\beta = 0$.

В статье [1] указано решение для изотермической сетки линий тока.

Построим класс решений, зависящий от двух произвольных функций. В рассматриваемом случае уравнения (0.4), (0.5) запишутся в виде

$$\frac{\partial \ln H_1H_2}{\partial q_2} = \ln f'(q_2) \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \ln H_1H_2}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \qquad (3.2)$$

Так как уравнения (3.1) и (3.2) эквивалентны одно другому, то мы имеем два уравнения (3.2), (0.5) для функций H_1, H_2. Уравнения равновесия (0.2), (0.3) и их интегралы имеют известный вид [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma}{\partial q_1} + 2k\frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial q_2} - 2k\frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} = 0 \\ \sigma + 2k \ln H_2 = \eta(q_2), \qquad \sigma - 2k \ln H_1 = \gamma(q_1)\end{gathered} \qquad (3.3)$$

Функция $f(q_2)$, а следовательно, и v легко определяются из (3.1). Заметим, что уравнение (3.2) обращается в тождество, если положить

$$H_1 = R_1(q_1) R_2(q_2), \qquad H_2 = Q_1(q_1) Q_2(q_2) \qquad (3.4)$$

где функции $R_1(q_1)$, $R_2(q_2)$, $Q_1(q_1)$, $Q_2(q_2)$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение Ламе. Очевидно, это будет выполнено, если взять за коэффициенты Ламе соотношения (1.19); таким образом, и в рассматриваемом случае линиями тока могут быть логарифмические спирали (1.24). Подставим теперь (3.4) в уравнение Ламе (0.5)

$$\frac{Q_2}{R_2} \frac{Q_1''R_1 - Q_1'R_1'}{R_1^2} = \frac{R_1}{Q_1} \frac{Q_2'R_2' - Q_2R_2''}{Q_2^2} \qquad (3.5)$$

Или, разделяя переменные, получим

$$Q_1Q_1''R_1 - Q_1Q'R_1' = \lambda R_1^3 \qquad (3.6)$$

$$R_2R_2'Q_2' - R_2R_2''Q_2 = \lambda Q_2^3 \quad (\lambda = \mathrm{const}) \qquad (3.7)$$

Возьмем теперь две произвольные функции $Q_1(q_1)$ и $R_2(q_2)$, имеющие соответствующие непрерывные производные. Тогда соотношения (3.6), (3.7) обращаются в уравнения Бернулли для функций $R_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$

$$R_1' = f_1(q_1) R_1 + f_2(q_1) R_1^3 \qquad (3.8)$$

$$Q_1' = h_1(q_2) Q_2 + h_2(q_2) Q_2^3 \qquad (3.9)$$

где

$$f_1(q_1) = \frac{Q_1''}{Q_1'}, \qquad f_2(q_1) = -\frac{\lambda}{Q_1Q_1'}, \qquad h_1(q_2) = \frac{R_2''}{R_2'}, \qquad h_2(q_2) = \frac{\lambda}{R_2R_2'}$$

Решение (3.8), (3.9) получим через подстановку

$$R_1 = u(q_1)\exp\int f_1(q_1)\,dq_1, \qquad Q_2 = w(q_2)\exp\int h_1(q_2)\,dq_2 \tag{3.10}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{-2\int [f_2(q_1)\exp 2\int f_1(q_1)\,dq_1]\,dq_1 + c_1\right\}^{-1/2}\exp\int f_1(q_1)\,dq_1 \\ Q_2 &= \left\{-2\int [h_2(q_2)\exp 2\int h_1(q_2)\,dq_2]\,dq_2 + c_2\right\}^{-1/2}\exp\int h_1(q_2)\,dq_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда из (3.4) для коэффициентов Ламе получим

$$\begin{aligned} H_1 &= R_2\left[-2\int\left(-\frac{\lambda}{Q_1Q_1'}\exp 2\int\frac{Q_1''}{Q_1}dq_1\right)dq_1 + c_1\right]^{-1/2}\exp\int\frac{Q_1''}{Q_1'}dq_1 \\ H_2 &= Q_1\left[-2\int\left(\frac{\lambda}{R_2R_2'}\exp 2\int\frac{R_2''}{R_2'}dq_2\right)dq_2 + c_2\right]^{-1/2}\exp\int\frac{R_2''}{R_2'}dq_2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

или

$$\begin{aligned} H_1 &= R_2\,(q_2)\,[2\lambda\ln\,Q_1(q_1) + c_1]^{-1/2}\,Q_1'(q_1) \\ H_2 &= Q_1(q_1)\,[-2\lambda\ln R_2(q_2) + c_2]^{-1/2}\,R_2'(q_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.3), (3.1), (3.13), (0.4) найдем

$$\sigma = 2k\ln\frac{c_3R_2}{Q_1}, \qquad f(q_2) = c_4R_2R_2'(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{-1/2}, \qquad v = \frac{c_4R_2}{Q_1} \tag{3.14}$$

Найдем отображение полей линий тока и ортогональных к ним траекторий на плоскость $0xy$. Согласно (1.20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial q_1} &= -\frac{\lambda Q_1'}{Q_1}(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{-1/2} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial q_2} &= \lambda\frac{R_2'}{R_2}(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{-1/2}(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{1/2} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha = -(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{1/2} + c_5 \tag{3.15}$$

и ввиду (1.23) получим следующие параметрические уравнения для x, y

$$\begin{aligned} x &= \int\limits_{q_1=a}^{q_1} Q_1'R_2(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{-1/2}\cos[-(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{1/2} + \\ &+ c_5]\,dq_1 - \int\limits_{q_2=b}^{q_2} R_2'Q_1(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{-1/2}\sin[-(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}(2\lambda\ln Q_1 + \\ &+ c_1)^{1/2} + c_5]\,dq_2 + c_6 \\ y &= \int\limits_{q_1=a}^{q_1} Q_1'R_2(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{-1/2}\sin[-(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{1/2} + \\ &+ c_5]\,dq_1 + \int\limits_{q_2=b}^{q_2} R_2'Q_1(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{-1/2}\cos[-(-2\lambda\ln R_2 + c_2)^{1/2}\times \\ &\times(2\lambda\ln Q_1 + c_1)^{1/2} + c_5]\,dq_2 + c_7 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Автор признателен Г. А. Гениеву за внимание к работе.

Поступила 23 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.