

О СТАЦИОНАРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕНДРИТНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ

А. Н. Черепанов
(Новосибирск)

Теоретическое исследование процессов кристаллизации металлических сплавов связано с необходимостью описания закономерностей фазовых превращений в двухфазной зоне. В имеющихся в настоящее время математических моделях предполагается либо объемное зарождение и рост твердой фазы [1], либо дендритный характер развития двухфазной зоны (теория квазиравновесной двухфазной зоны) [2]. В последней допускается, что двухфазная зона достаточно мелкодисперсна, а ее развитие осуществляется таким образом, чтобы переохлаждение расплава равнялось нулю в течение всего процесса кристаллизации.

Известно, что для большинства металлических сплавов характерна дендритная форма кристаллизации, причем дендриты растут в переохлажденном расплаве. Это переохлаждение, несмотря на малость его величины, является основной движущей силой роста кристаллов и, следовательно, развития двухфазной зоны, где происходит формирование структуры слитка. Поэтому исследование кинетики роста дендритов в двухфазной зоне представляет значительный интерес. Эта кинетика определяется как тепловыми и диффузионными явлениями, так и кинетическими процессами на поверхности растущих кристаллов. В работе [3] проведено исследование влияния переохлаждения на кинетику развития двухфазной зоны бинарного сплава без учета диффузионных процессов и рассмотрения формы дендритов.

Для нахождения путей оптимального управления формированием структуры, физических и механических свойств литого металла необходимо количественное описание закономерностей роста дендритов, их формы и распределения примеси в процессе кристаллизации.

В данной работе предлагается одномерная стационарная модель двухфазной зоны с учетом кинетики роста дендритов и распределения растворимой примеси в жидкой фазе.

1. Рассмотрим установившийся процесс кристаллизации бинарного сплава, движущегося во внешней системе охлаждения вдоль оси z с постоянной скоростью v (фиг. 1). Будем считать, что двухфазная зона состоит из однородных плоскосимметричных дендритов переменного сечения. Число дендритов n , приходящихся на единицу поперечного сечения слитка, не меняется в процессе кристаллизации. Скорость роста дендритов в направлении нормали к их поверхности $R(z)$ является функцией локального переохлаждения ΔT

$$(1.1) \quad v_n = F_1(\Delta T).$$

Связь скорости v_n со скоростью v в установившемся режиме определяется выражением

$$(1.2) \quad v_n = vR'(z)/\sqrt{1 + [R'(z)]^2},$$

аналогичным соотношению, используемому при определении скорости кристаллизации в теории непрерывного литья [4]. Здесь штрих означает производную по z , а $2R(z)$ — размер дендрита в поперечном сечении в некоторой точке z . Из (1.1), (1.2) имеем

$$(1.3) \quad vR'(z)/\sqrt{1 + [R'(z)]^2} = F_1(\Delta T).$$

Скорость роста вершин дендритов в рассматриваемом случае равна скорости движения расплава и также является функцией соответствующего локального переохлаждения. Учитывая возможность анизотропии роста

кристаллов в продольном и поперечном направлениях, запишем

$$(1.4) \quad v = F_0(\Delta T).$$

Далее для определенности примем

$$(1.5) \quad F_i(\Delta T) = K_i \Delta T^m, \quad m \geq 1, \quad i = 0, 1,$$

где K_i — кинетический коэффициент, величина которого считается постоянной в рассматриваемом интервале изменения ΔT . Анизотропия роста дендрита может быть учтена отличием по величине коэффициента K_1 от K_0 .

Величина переохлаждения ΔT с учетом влияния локальной кривизны поверхности дендрита на температуру ликвидуса определяется выражением

$$(1.6) \quad \Delta T = T_l(C) \left(1 - \frac{2\sigma k_r}{\kappa\rho} \right) - T;$$

$$(1.7) \quad k_r = \frac{R''}{(1 + R'^2)^{3/2}},$$

где k_r — значение локальной кривизны поверхности дендрита; σ — поверхностное натяжение; κ — скрытая теплота плавления; ρ — плотность; $T_l(C)$ — равновесное значение температуры ликвидуса при $k_r = 0$; C — концентрация растворимой примеси.

Из (1.3) с учетом (1.5)–(1.7) получим кинетическое уравнение для определения формы дендрита в двухфазной зоне

$$(1.8) \quad R' = \frac{K_1}{v} \sqrt{1 + R'^2} \left\{ T_l(C) \left[1 - \frac{\sigma R''}{\kappa\rho(1 + R'^2)^{3/2}} \right] - T \right\}^m.$$

Соотношение (1.4) с учетом (1.5), (1.6) устанавливает связь скорости движения двухфазной зоны с температурой начала кристаллизации (или величиной переохлаждения на фронте двухфазной зоны)

$$(1.9) \quad v = K_0 \{ T_l(C_n) [1 - \sigma k_r(z_n)/\kappa\rho] - T_n \}^m,$$

где буквой n обозначены величины, соответствующие началу двухфазной зоны. К соотношениям (1.8), (1.9) необходимо добавить уравнения, определяющие изменения температуры T и концентрации C в процессе затвердевания расплава. Будем полагать, что кристаллизующийся слиток имеет плоскую или аксиальную симметрию, его размер в поперечном направлении достаточно мал, а теплофизические параметры и коэффициент диффузии являются величинами постоянными. На боковой поверхности слитка и на оси симметрии соответственно справедливы условия

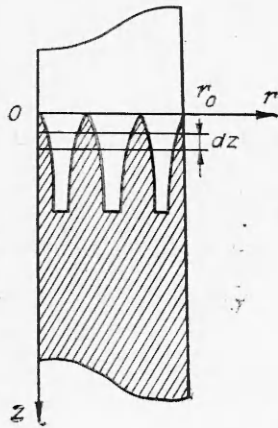
$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T|_{r=r_0} - T_c), \quad \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

где α — коэффициент теплоотдачи от слитка к охлаждающей среде; λ — коэффициент теплопроводности; T_c — температура охлаждающей среды; r_0 — радиус (полутолщина) слитка. Составляя баланс тепла и массы для некоторого слоя dz (фиг. 1), получим уравнения тепло- и массопереноса, которые после соответствующих преобразований запишем в виде

$$(1.10) \quad T'' - \frac{v}{a} T' - \frac{(1+v)\alpha}{r_0\lambda} (T - T_c) + \frac{\kappa\rho v}{\lambda} \psi' = 0;$$

$$(1.11) \quad C'' + \left\{ [\ln(1-\psi)]' - \frac{v}{D} \right\} C' - \frac{(1-k)v}{D} [\ln(1-\psi)]' C = 0,$$

$$\psi = 0 \text{ при } T \geq T_n, \quad \psi \equiv 1 \text{ при } T < T_n,$$



Ф и г. 1

где a — температуропроводность; ψ — сечение твердой фазы в двухфазной зоне; D — коэффициент диффузии в жидкой фазе; k — коэффициент распределения примеси; T_R — температура конца кристаллизации; $v = 0$ в случае плоского слитка; $v = 1$ в случае круглого слитка. Уравнения (1.10), (1.11) получены при условии быстрого выравнивания температуры и концентрации примеси по сечению слитка и отсутствии диффузии в твердой фазе, поскольку для металлических сплавов $D_T/D \sim 10^{-4}$, где D_T — коэффициент диффузии в твердой фазе.

Связь величины сечения твердой фазы ψ с поперечным размером дендрита $2R$ определяется соотношением

$$(1.12) \quad \psi(z) = 2nR(z).$$

Формула (1.12) справедлива для плоскосимметричного слитка. Для получения соответствующей зависимости в случае круглого слитка рассмотрим некоторый кольцевой интервал $dr \gg R$ в плоскости поперечного сечения слитка. Площадь кольца $f_0 = 2\pi r_i dr$, где r_i — расстояние от оси слитка до i -го дендрита. Суммарная площадь сечения дендритов, приходящихся на эту площадку, $f = 4\pi nR(R + r_i)f_0$. Следовательно, относительное сечение твердой фазы $\psi_1 = 4\pi nR(R + r_i)$. Заменяя дискретное распределение дендритов непрерывным и усредняя полученное выражение для ψ_1 по радиусу слитка, найдем

$$(1.13) \quad \psi = 4\pi nR(R + 2r_0/3).$$

Плотность дендритов n выразим через расстояние между осями дендритов d_1

$$(1.14) \quad n = 1/d_1.$$

С другой стороны, для величины d_1 имеет место зависимость [5, 6]

$$(1.15) \quad d_1 = b_1(G_1 v)^{-s},$$

где показатель степени s близок 0,5; G_1 — значение градиента температуры на фронте двухфазной зоны; b_1 — коэффициент, характеризующий рассматриваемый сплав.

Из (1.14), (1.15) имеем

$$(1.16) \quad n = b_1^{-1} (G_1 v)^s.$$

Таким образом, полученные дифференциальные уравнения (1.8), (1.10), (1.11) совместно с соотношением (1.12) или (1.13) и с учетом (1.16) при соответствующих граничных условиях определяют искомые функции — изменения температуры и концентрации примеси, форму дендритов и сечение твердой фазы в двухфазной зоне.

2. С целью получения аналитических зависимостей рассмотрим приближенное решение задачи о кристаллизации переохлажденного бинарного сплава. Положим, что кристаллизующийся слиток имеет плоскосимметричную форму, скорость его движения направлена по оси z , а начало отсчета координаты совпадает с началом двухфазной зоны. Жидкая фаза занимает полупространство $z < 0$ (область 1), двухфазная зона — $z > 0$ (область 2). Температура расплава при $z = -\infty$ равна температуре охлаждающей среды T_{c1} . В конце двухфазной зоны сплав охлаждается до температуры внешней среды, равной T_{c2} . Для общности здесь принимает-

ся, что в областях 1 и 2 температура охлаждающей среды и коэффициент теплоотдачи могут иметь соответственно разные значения, являясь постоянными в пределах своей области. Кроме того, считая, что для дендритов справедлив нормальный механизм роста, положим $m = 1$ [7, 8]. Переходя к безразмерным переменным и учитывая принятые выше допущения, запишем систему (1.8)–(1.12) в виде

$$(2.1) \quad Y'(x) = \frac{\text{Pe}_{\text{к1}}}{\text{Pe}_{\text{к0}}} [\Theta_l - \Theta(x)], \quad 0 \leq Y \leq \psi_{\text{к}}/N;$$

$$(2.2) \quad \Theta_j'(x) - \text{Pe} \Theta_j'(x) - \text{Bi}_j \Theta_j(x) = -\kappa \text{Pe} NY'(x) - \text{Bi}_j \Delta \Theta_{cj};$$

$$(2.3) \quad X(x) = [1 - NY(x)]^{k-1}, \quad Y = 0 \text{ при } z < 0;$$

$$(2.4) \quad \Theta_l = \varphi(X);$$

$$(2.5) \quad \text{Pe} = \text{Pe}_{\text{к0}}(\Delta \Theta - \Theta_{\text{н}}),$$

где $\Theta_j = (T_j - T_{c1})/T_{l0}$; $\Theta_l = (T_l - T_{c1})/T_{l0}$; $\Delta \Theta = 1 - T_{c1}/T_{l0}$; $X = C/C_0$; $Y = R/r_0$; $\text{Pe} = vr_0/a$; $\text{Bi} = \alpha r_0(1 + \nu)/\lambda$; $\text{Pe}_{\text{к1}} = K_1 T_{l0} r_0/a$; $\text{Pe}_{\text{к0}} = K_0 T_{l0} r_0/a$; $\kappa = \kappa_0/cT_{l0}$; $N = 2r_0n$; $x = z/r_0$; $\Delta \Theta_{cj} = (T_{cj} - T_{c1})/T_{l0}$.

Индексом $j = 1$ обозначены температура и коэффициент теплоотдачи в области 1, индексом $j = 2$ — в области 2. Величина $\psi_{\text{к}}$ определяет сечение твердой фазы в конце двухфазной зоны, T_{l0} — значение температуры ликвидуса, соответствующее концентрации $C = C_0$. Уравнение (2.3) следует из (1.11) при $D = 0$, $k = \text{const}$ и совпадает с уравнением Шейла [5].

Систему (2.1)–(2.4) будем решать при граничных условиях

$$(2.6) \quad \Theta_1|_{z=-\infty} = 0, \quad \Theta_1|_{z=0} = \Theta_2|_{z=0} = \Theta_{\text{н}};$$

$$(2.7) \quad \Theta_1'|_{z=0} = \Theta_2'|_{z=0}, \quad \Theta_2|_{z=\infty} = \Theta_{c2};$$

$$(2.8) \quad Y|_{z=0} = 0$$

с учетом соотношения (2.5). При этом уравнение ликвидуса (2.5) определяется диаграммой состояния. Считая последнюю линейной, запишем

$$(2.9) \quad \Theta_l = \Theta_A - \beta X,$$

где $\Theta_A = (T_A - T_{c1})/T_{l0}$; T_A — температура плавления чистого компонента; $\beta = (T_A - T_{l0})/T_{l0}$ — наклон линии ликвидуса. Линеаризуя выражение (2.3), получим

$$X = 1 + (1 - k)NY.$$

Подставляя последнее в (2.9) с учетом выражения для β , найдем

$$(2.10) \quad \Theta_l = \Delta \Theta - \beta(1 - k)NY.$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию двух линейных дифференциальных уравнений

$$(2.11) \quad \Theta_j'' - \text{Pe} \Theta_j' - \text{Bi}_j \Theta_j = -\kappa \text{Pe} NY' - \text{Bi}_j \Delta \Theta_{cj};$$

$$(2.12) \quad Y' = (\text{Pe}_{\text{к1}}/\text{Pe})(\Delta \Theta - \Theta_2 - \beta N(1 - k)Y), \\ Y = 0 \text{ при } \Theta \geq \Theta_{\text{н}}, \quad Y = 1 \text{ при } \Theta < \Theta_{\text{к}}$$

с граничными условиями (2.6)–(2.8). Уравнение (2.12) следует из (2.1) с учетом (2.10). Решение системы (2.11), (2.12) может быть записано в виде аналитических выражений. Представляет интерес зависимость скорости кристаллизации от переохлаждения расплава на бесконечности

$$(2.13) \quad \Delta \Theta = \frac{\text{Pe} A (\gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - A)}{\text{Pe}_{\text{к0}} (A\gamma + \gamma_1\gamma_2)},$$

где $A = N \text{Pe}_{\text{K1}} \beta (1 - k) / \text{Pe}$; γ_1 и γ_2 — отрицательные корни уравнения

$$\gamma^3 - p\gamma^2 - q\gamma - A \text{Bi}_2 = 0,$$

где $p = \text{Pe} - A$; $q = \text{Bi}_2 + \kappa \text{Pe}_{\text{K1}} N + A$.

В случае слабого теплоотовода ($\text{Bi}_2 \rightarrow 0$) это соотношение может быть записано в явном виде

$$(2.14) \quad \Delta\Theta = \frac{\text{Pe}}{\text{Pe}_{\text{K0}}} \frac{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\text{Bi}_1} + \sqrt{(\text{Pe} - A)^2 + 4Ag\text{Pe} - A}}{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\text{Bi}_1}},$$

где $g = 1 + \kappa/\beta(1 - k)$. При этом форма дендритов и распределения температур в 1-й и 2-й областях соответственно определяются формулами

$$(2.15) \quad \begin{aligned} Y &= (\text{Pe}_{\text{K1}}/\lambda \text{Pe}_{\text{K0}}) (e^{\lambda z} - 1), \quad \Theta_1 = \Theta_{\text{H}} e^{\gamma z}, \\ \Theta_2 &= \Delta\Theta + (\text{Pe}/\lambda \text{Pe}_{\text{K0}}) [A - (A + \lambda)e^{\lambda z}], \end{aligned}$$

где $\Theta_{\text{H}} = \Delta\Theta - \text{Pe}/\text{Pe}_{\text{K0}}$; $\gamma = \text{Pe}/2 + (\text{Pe}^2/4 + \text{Bi}_1)^{1/2}$; $\lambda = (\text{Pe} - A)/2 - \sqrt{(\text{Pe} - A)^2/4 + Ag\text{Pe}}$, $\Delta\Theta$ определяется из (2.14). К этим выражениям следует добавить соотношение, устанавливающее связь числа дендритов в сечении слитка $N = 2r_0 n$, где n определяется формулой (1.16) с параметрами кристаллизации. Опуская промежуточные выкладки, запишем это соотношение при $s = 1/2$ в виде

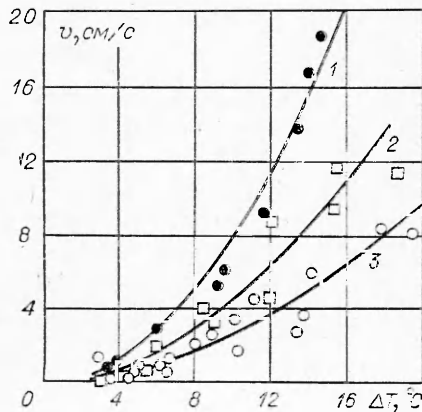
$$(2.16) \quad N = (\sqrt{2} \text{Pe}/b \text{Pe}_{\text{K0}}^{1/2}) (\sqrt{(\text{Pe} - A)^2 + 4Ag\text{Pe} - A - \text{Pe}})^{1/2},$$

где $b = b_1 \sqrt{aT_{l0}/r_0^2}$. Выражение (2.16) характеризует зависимость плотности дендритов от скорости кристаллизации. При достаточно больших значениях величины Pe (скорости кристаллизации) эта зависимость близка к линейной.

В соотношении (2.15) первая формула при $z \rightarrow \infty$ определяет относительный размер дендритного зерна Y_{K} в конце двухфазной зоны как функцию безразмерной скорости кристаллизации Pe . Из этого соотношения следует, что Y_{K} убывает с увеличением Pe . Это соответствует известным экспериментальным данным об измельчении структуры слитка при увеличении скорости кристаллизации [9]. Как показывает анализ уравнений (2.13), (2.14), при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ связь скорости кристаллизации с переохлаждением расплава на бесконечности становится линейной ($v = K_0(T_{l0} - T_{c1})$), что может быть использовано в эксперименте для определения кинетического коэффициента

K_0 по наклону кривой зависимости $v = f(\Delta T)$ при больших значениях ΔT .

На фиг. 2 представлено сравнение теории с известными экспериментальными результатами, полученными на бинарных сплавах Sn + 0,5 вес. % Bi [10] (кривая 1), Sn + 0,5 вес. % Pb и Sn + 1 вес. % Pb [11] (кривая 2 и 3 соответственно). Поскольку при достаточно больших скоростях кристаллизации ($\text{Pe} \gg 1$) влияние внешнего теплоотвода несущественно ($\text{Bi}_j \ll 1$), расчеты проводились по формуле (2.14) при $\text{Bi}_1 = 0$. Кроме того, исходя из установленной зависимости N от Pe , величина A считалась не зависящей от



Ф и г. 2

Re, а ее значение определялось по одной из точек соответствующей экспериментальной кривой при заданном значении $Re_{к0}$. При расчетах использовались следующие значения физических параметров: для первого сплава — $T_A = 505$, $T_{l0} = 504, 225$, $a = 0,288$, $\kappa/c = 219,6$, $r_0 = 0,2$, $g = 404,75$, $Re_{к0} = 6542$, $A = 7,38$, для второго и третьего сплавов соответственно — $T_A = 505$, $T_{l0} = 504,25; 503,5$, $a = 0,236$, $\kappa/c = 249,57$, $r_0 = 0,2$, $g = 386; 194,4$, $Re_{к0} = 4361; 3840$, $A = 5,2; 9,27$, где T, K ; $a, \text{см}^2/\text{с}$; $\kappa/c, K$; $r_0, \text{см}$. Теоретические кривые (сплошные линии) достаточно хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову и В. Т. Борису за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 9 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. К статистической теории кристаллизации металлов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 3.
2. Борисов В. Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости. — Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 3.
3. Борисов В. Т., Матвеев Ю. Е. Кинетический режим развития двухфазной зоны в двойном металлическом сплаве. — Изв. АН СССР. Металлы, 1977, № 3.
4. Максимов Л. Н., Черепанов А. Н. Аналитическое исследование процесса затвердевания жидкого металла в установках непрерывного литья. — ПМТФ, 1977, № 3.
5. Флемингс М. Процессы затвердевания. М., «Мир», 1977.
6. Швед Р. И., Сосков Д. А. Влияние условий затвердевания и состава сплавов на характер и дисперсность ориентированной кристаллической структуры. — В кн.: Проблемы стального слитка. Труды V конференции по слитку. М., «Металлургия», 1974.
7. Jackson K. A., Chalmers V. Kinetics of solidification. — Can. J. Phys., 1956, vol. 34, N 5.
8. Хиллинг У., Тарибалл Д. Элементарные процессы роста кристаллов. М., ИЛ, 1959.
9. Добаткин В. И. Непрерывное литье и литейные свойства сплавов. М., Оборонгиз, 1948.
10. Никонова В. В., Темкин Д. Е. Изучение кинетики роста дендритов в некоторых бинарных сплавах. — В кн.: Рост и несовершенства металлических кристаллов. Киев, «Наукова думка», 1966.
11. Чалмерс Б. Теория затвердевания. М., «Металлургия», 1968.

УДК 532.62

ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

С. В. Алексеевко, В. Е. Накоряков, В. Г. Покусаев

(Новосибирск)

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что ламинарное вертикальное течение пленки жидкости неустойчиво, начиная с самых малых чисел Рейнольдса Re . Неустойчивость приводит к возникновению периодических волн, которые быстро растут по амплитуде с расстоянием и выходят при определенных амплитудах на стационарный режим. Линейная устойчивость гладкой пленки исследовалась во многих работах [1—5]. Наибольшие успехи достигнуты на основе численных методов счета уравнения Орра — Зоммерфельда. В результате расчетов получены зависимости для инкремента амплитуды волн, для фазовой скорости и волнового числа нейтральных возмущений и волн максимального роста.