Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ $t \to \infty$

УДК 532.59;534.1

В. А. Боровиков

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Рассматривается функция Грина уравнения внутренних волн в слое горизонтально однородной стратифицированной жидкости $Z_- < z < Z_+$, где Z_- и/или Z_+ могут обращаться в бесконечность. Для случая волноводного распространения внутренних волн (т. е. для $N^2(z) = g d \ln \rho_0(z)/dz \to 0$ при $|z| \to \infty$) и дополнительного условия о наличии у функции $N(z)$ единственного локального максимума строится асимптотика функции Грина при $t \to \infty$, для чего используется известное представление функции Грина в виде суммы нормальных волн. Эти волны заменяются их ВКБ-асимптотикой [1], после чего применяется формула суммирования Пуассона, и получающиеся в результате интегралы вычисляются методом стационарной фазы.

1. Постановка задачи. В области Ω ($-\infty < x,\ y < \infty,\ Z_- < z < Z_+,\ Z_-,\ Z_+$ могут обращаться соответственно в $\mp\infty$) рассматривается функция Грина $G(t, \sqrt{x^2+y^2}, z, z_0)$ уравнения внутренних волн:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(G_{xx} + G_{yy} + G_{zz}) + N^2(z)(G_{xx} + G_{yy}) = \delta(t)\delta(x,y)\delta(z - z_0). \tag{1.1}$$

Единственность решения обеспечивается условием $G = 0$ при $t < 0$ и требованием убывания G при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$. При конечных Z_+ или Z_- на соответствующей границе ставятся краевое условие Дирихле или условие Неймана. Требуется найти асимптотику G при $t \to \infty$. Рассматриваемая задача является исходной для широкого круга проблем, связанных с поведением при больших временах полей внутренних волн, возбуждаемых распределенными осциллирующими источниками.

Для уравнения (1.1) в полупространстве $z > 0$ при $N^2(z) = B^2 z$ ($B = \mathrm{const}$) асимптотика G была найдена в [2, 3] исходя из построенного в [2] приближенного и в [3] точного выражений для функции Грина. На основании этих результатов в [4] сформулирована гипотеза о том, что в общем случае асимптотика функции Грина при $t \to \infty$ имеет вид

$$G(t, r, z, z_0) \approx \sum_p \frac{A_p}{\sqrt{t\omega_p}} \sin(t\omega_p + \psi_p) + o(t^{-1/2}), \tag{1.2}$$

где A_p и ω_p — функции r, z, z_0; ψ_p — константы. Выражение (1.2) аналогично лучевому (геометро-оптическому) описанию волнового поля для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 n^2(x,y) u = 0$

$$u(t, x, y) \approx \sum_p A_p \exp iks_p$$

с той разницей, что для асимптотики функции Грина большим параметром, определяющим характерный период осцилляций, является не волновое число k, а время t. Это означает, в частности, что возбуждаемое δ-образным источником поле внутренних волн становится при фиксированных x, y, z по мере увеличения t все более коротковолновым.

В [4] были выписаны уравнение эйконала для $\omega_p = \omega_p(r, z, z_0)$ и уравнение переноса для $A_p = A_p(r, z, z_0)$ и приведено их решение, дающее искомую асимптотику G.

В настоящей работе приведено обоснование и обобщение асимптотики (1.2) для волноводного распространения внутренних волн, т. е. в предположении, что или $Z_\pm$ конечны, или (в случае бесконечных Z_- и/или Z_+) $N^2(z) \to 0$ при $z \to \infty$. При выполнении этих условий соответствующая уравнению (1.1) вертикальная спектральная задача имеет дискретный спектр, функция G строится методом разделения переменных (см., например, [5]) и представляется в виде суммы (3.1) нормальных волн.

Будем полагать также, что $N^2(z)$ имеет единственный локальный максимум. Тогда для нормальных волн можно выписать ВКБ-асимптотику. Получающийся в результате ряд преобразуется посредством формулы суммирования Пуассона в сумму интегралов. Вычисление этих интегралов методом стационарной фазы даст искомую асимптотику функции Грина.

Аналогичный подход был развит в [6] для перехода от модового к лучевому описанию полей в акустических волноводах. Однако имеется существенное различие в ситуациях для акустических и внутренних гравитационных волн. Для акустических волн лучевой метод (и его модификации в случае полей с каустиками) дает при достаточно больших k асимптотику поля в любой фиксированной окрестности источника. Поэтому в [6] устанавливается связь между двумя методами описания поля, каждый из которых имеет свое независимое обоснование. В случае внутренних волн асимптотика (1.2) справедлива лишь для достаточно больших t. В рамках развиваемого в [4] подхода мы ничего не можем сказать о функции Грина при ограниченных t. Поэтому построение асимптотики (1.2), исходящее из представления функции Грина в виде суммы нормальных волн, является единственным известным в настоящее время способом оправдания этой асимптотики.

Рассмотрим физический смысл введенных выше ограничений. Условие волноводного распространения выполняется во всех случаях распространения внутренних волн в водной среде (как в естественных условиях, так и в лабораторных экспериментах). Кроме того, по всей вероятности, отказ от этого условия не изменит ни качественного поведения функции Грина, ни излагаемого ниже алгоритма построения ее асимптотики.

Условие единственности локального максимума частоты Брента — Вяйсяля выполняется в лабораторных экспериментах, когда распределение плотности воды в бассейне близко к двухслойной среде, и в естественных условиях при распространении волн на шельфе или же в случае глубокого океана, когда отсутствует сезонный термоклин или же можно пренебречь влиянием глубинного пикноклина. Вместе с тем это условие существенно для нашей асимптотики. Если оно не выполнено, то возможен захват лучей вторым локальным максимумом. Траектория луча, выходящего из источника O, оказывается разрывной функцией параметра ω (см. ниже), и приводимый ниже алгоритм определения асимптотики нуждается в существенном обобщении.

2. Алгоритм определения асимптотики. Сформулируем алгоритм определения функций ω_p и A_p в асимптотике (1.2). Для этого введем понятие луча. Каждый луч, выходящий из источника $O(r = 0, z = z_0)$, характеризуется значением $\omega(\omega \leqslant N(z_0))$ и определяется как кривая, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dz}{dr} = \delta \frac{\omega}{\sqrt{N^2(z) - \omega^2}}, \tag{2.1}$$

где $\delta = \pm 1$. Это уравнение интегрируется при фиксированном δ от точки O до тех пор, пока точка $P = (r, z)$ не попадает на границу области Ω или на горизонт z, на котором $N(z) = \omega$, после чего изменяем знак δ и продолжаем интегрирование.

Назовем точку $P = (r, z)$, в которой изменяется направление интегрирования, т. е. изменяется δ, точкой поворота. Очевидно, в точке поворота $z = z_\pm$, где

$$z_+ = \min \begin{cases} Z_+, \\ z_+(\omega), \end{cases} \qquad z_- = \max \begin{cases} Z_-, \\ z_-(\omega). \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $z_\pm(\omega)$ $(z_-(\omega) < z_+(\omega))$ — корни уравнения $N(z) = \omega$.

Если точка поворота P лежит на границе $z = Z_\pm$ области Ω, то выходящий из этой точки луч образует с границей тот же угол, что и приходящий луч. Такую точку поворота назовем точкой отражения луча. Если же в P функция $N(z) = \omega$, то, как видно из (2.1), направление луча стремится при приближении к этой точке к вертикальному. Такую точку поворота назовем точкой возврата луча.

Если при последующем интегрировании снова попадаем в точку поворота, то опять изменяем знак δ и т. д.

Чтобы формализовать эту процедуру, положим

$$I(z_1, z_2) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{|N^2(z) - \omega^2|}}{\omega}\, dz; \tag{2.3}$$

$$I = I(z_-, z_+). \tag{2.4а}$$

Введем также зависящие от целого параметра p интегралы I_p:
при $p = 0$

$$I_0 = \left| I(z_0, z) \right|; \tag{2.4б}$$

при $p > 0$

$$I_p = \begin{cases} I(z_0, z_+) + (p-1)I + I(z_-, z) & \text{для четных} \quad p, \\ I(z_0, z_+) + (p-1)I + I(z, z_+) & \text{для нечетных} \quad p; \end{cases} \tag{2.4в}$$

при $p < 0$

$$I_p = \begin{cases} I(z_-, z_0) + (|p|-1)I + I(z, z_+) & \text{для четных} \quad p, \\ I(z_-, z_0) + (|p|-1)I + I(z_-, z) & \text{для нечетных} \quad p. \end{cases} \tag{2.4г}$$

Определим p-кратно отраженные лучи $L_p(\omega)$, $L_{-p}(\omega)$ по формуле

$$r = I_p(z, \omega). \tag{2.5}$$

Для заданных r, z_0, z функция $\omega_p = \omega_p(r, z, z_0)$ в (1.2) определяется как решение уравнения (2.5). Поскольку I_p — монотонно убывающая функция ω, это решение, если оно существует, единственно. Для любых $r > 0$ имеется лишь конечное число значений p, для которых определена функция ω_p, т. е. конечное число слагаемых в (1.2), причем это число возрастает с увеличением r. Исключение представляет лишь случай $z = z_0 = \hat{z}$, где $\hat{z}$ — значение z, при котором $N(z)$ достигает максимума. В этом случае уравнение (2.5) имеет решения при любом p, и сумма (1.2) содержит бесконечное число слагаемых.

Функция $A_p(r, z, z_0)$ в (1.2), согласно [4], имеет вид

$$A_p(r, z, z_0) = A(r, z, z_0, \omega_p), \tag{2.6а}$$

где

$$A(r,z,z_0,\omega(r,z,z_0)) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{[(N^2(z)-\omega^2)(N^2(z_0)-\omega^2)]^{1/4}} \left(\frac{-1}{r\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^{1/2}. \quad (2.6б)$$

Осталось определить фазовый сдвиг ψ_p. Положим $\psi_0 = \pi/4$ и пусть точка поворота $P = (r, z_\pm)$ соответствует приращению фазы

$$\delta_\pm = \begin{cases} -\pi, & \text{если} \quad z_\pm = Z_\pm, \quad \text{т. е. } P \text{ — точка отражения луча,} \\ -\pi/2, & \text{если} \quad z_\pm = z_\pm(\omega), \quad \text{т. е. } P \text{ — точка возврата луча.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Фазовый сдвиг ψ_p является суммой исходного фазового сдвига ψ_0 и приращений фазы во всех точках поворота луча L_p:

$$\psi_p = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{|p|}{2}(\delta_+ + \delta_-) & \text{для четных } p, \\ \dfrac{\pi}{4} + \delta_+ + \dfrac{p-1}{2}(\delta_+ + \delta_-) & \text{для нечетных } p > 0, \\ \dfrac{\pi}{4} + \delta_- + \dfrac{|p|-1}{2}(\delta_- + \delta_-) & \text{для нечетных } p < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Асимптотика (1.2) неравномерна. В частности, она неприменима в следующих случаях:

а) в окрестности горизонта источника $z = z_0$, т. е. при $\omega_0(r,z,z_0) \to 0$, когда слагаемое в (1.2) с $p = 0$ стремится к бесконечности;

б) в окрестностях точек возврата луча, т. е. при $N^2(z) - \omega_p^2 \to 0$, когда в сумме (1.2) стремятся к бесконечности два соседних слагаемых, соответствующих двум лучам — один из них подходит к точке возврата, а другой уходит от нее (аналогичная ситуация возникает при $N^2(z_0) - \omega_p^2 \to 0$);

в) в окрестностях лучей L_p, для которых точка возврата стремится к границе области Ω, т. е. для которых $z_-(\omega_p) \to Z_-$ или $z_+(\omega_p) \to Z_+$, и поэтому, согласно (2.7), приращение фазы δ_- или δ_+ терпит разрыв.

Ниже будет доказано, что равномерная асимптотика строится следующим образом:
— в случае *а* [4] в стремящемся к бесконечности в сумме (1.2) слагаемом с $p = 0$ функция $\sin(t\omega_0 + \pi/4)/\sqrt{t\omega_0}$ заменяется на $\sqrt{\pi/2}J_0(t\omega_0)$ (J_0 — функция Бесселя);
— в случае *б* [4] два стремящихся к бесконечности слагаемых

$$\frac{A(r,z,z_0,\omega_p)}{\sqrt{t\omega_p}}\sin(t\omega_p + \psi_p) + \frac{A(r,z,z_0,\omega_{p+1})}{\sqrt{t\omega_{p+1}}}\sin(t\omega_{p+1} + \psi_p - \pi/2)$$

заменяются на комбинацию функции Эйри и ее производной:

$$\sqrt{\pi}t^{-1/3}\sin(t\xi + \psi_p - \pi/4)\,\zeta^{1/4}(B_2 + B_1)\,\mathrm{Ai}(-t^{2/3}\zeta) + \\ + \sqrt{\pi}t^{-2/3}\cos(t\xi + \psi_p - \pi/4)\,\zeta^{-1/4}(B_2 - B_1)\,\mathrm{Ai}'(-t^{2/3}\zeta), \quad (2.9а)$$

где

$$\xi = \frac{\omega_p + \omega_{p+1}}{2}, \quad \zeta = \frac{3}{4}(\omega_p - \omega_{p+1})^{2/3}, \quad B_1 = \frac{A(r,z,z_0,\omega_p)}{\sqrt{t\omega_p}}, \quad B_2 = \frac{A(r,z,z_0,\omega_{p+1})}{\sqrt{t\omega_{p+1}}}; \quad (2.9б)$$

— в случае *в* приращения фазы $\delta_\pm$, терпящие разрыв при значениях $\omega = \omega_\pm$, для которых $z_\pm(\omega) = Z_\pm$, заменяются на сглаженные функции $\hat{\delta}_\pm(tq_p, \omega)$. Чтобы их определить, введем функции $Q_\pm(k,\omega,z)$:

$$Q_+(k,\omega,z) = \operatorname{sign}(z_+(\omega) - z)\left[\frac{3k}{2}\Big|I(z_+(\omega),z)\Big|\right]^{2/3},$$
$$Q_-(k,\omega,z) = \operatorname{sign}(z - z_-(\omega))\left[\frac{3k}{2}\Big|I(z,z_-(\omega))\Big|\right]^{2/3}. \tag{2.10}$$

Здесь $I(z_1,z_2)$ — интеграл (2.3). Нетрудно проверить, что если $N(z)$ — аналитическая функция в окрестности значений $z_\pm(\omega)$ с отличной от нуля производной, то $Q_\pm(z)$ аналитичны в окрестности соответственно $z_+(\omega)$ и $z_-(\omega)$.

Положим [7, формула 10.4.69]

$$\operatorname{Ai}(-x) = M(x)\cos\theta(x), \quad \operatorname{Bi}(-x) = M(x)\sin\theta(x), \tag{2.11а}$$

где $\operatorname{Ai}(x)$ и $\operatorname{Bi}(x)$ — функции Эйри, и введем функции

$$\widetilde{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta(x) & \text{при} \quad x < 0, \\ 2\theta(x) + \dfrac{4}{3}x^{3/2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2.11б}$$

Согласно [7, формула 10.4.79],

$$\lim_{|x|\to\infty} \widetilde{\theta}(x) = \begin{cases} \pi & \text{при} \quad x \to -\infty, \\ \pi/2 & \text{при} \quad x \to \infty. \end{cases}$$

Пусть

$$\widetilde{\delta}_\pm(k,\omega) = \widetilde{\theta}\,(Q_\pm(k,\omega,Z_\pm)) - 3\pi/2. \tag{2.12а}$$

Тогда сглаженные функции $\widehat{\delta_\pm}(t,\omega)$ имеют вид

$$\widehat{\delta}_\pm(t,\omega) = \widetilde{\delta}_\pm(tq_p,\omega). \tag{2.12б}$$

Здесь $q_p = |\partial I_p/\partial\omega|^{-1}$; I_p — интеграл (2.4). Если точка поворота $z_\pm$ является точкой возврата, т. е. совпадает с $z_\pm(\omega)$, то $Q_\pm(tq_p,\omega,Z_\pm) \to -\infty$ при $t \to \infty$ и $\widetilde{\delta}_\pm \to -\pi/2$. Если же $z_\pm$ — точка возврата, то $Q_\pm(tq_p,\omega,Z_\pm) \to \infty$ и $\widetilde{\delta}_\pm \to -\pi$. Поэтому определение (2.12) согласуется с (2.7).

Асимптотика (1.2) неприменима также, когда z и z_0 находятся на горизонте $\widehat{z}$, на котором $N(z)$ достигает максимума. Тогда ряд (1.2) содержит бесконечное число слагаемых, их амплитуда ограничена снизу при $p \to \infty$ и равномерная асимптотика функции Грина имеет более сложный вид. Этот случай здесь не рассматривается.

3. Разложение функции Грина по нормальным волнам. Перейдем к обоснованию сформулированного алгоритма. Согласно [5], функция Грина $G(t,r,z,z_0)$ имеет вид

$$G(t,r,z,z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \tag{3.1а}$$

где

$$S_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\sin(t\omega_n)\,\frac{\omega_n}{k}\,\varphi_n(z,k)\,\varphi_n(z_0,k)\,dk; \tag{3.1б}$$

$\omega_n = \omega_n(k)$ и $\varphi_n(z,k)$ — собственные числа и собственные функции спектральной задачи:

$$\varphi'' + \frac{k^2}{\omega^2}(N^2 - \omega^2)\varphi = 0; \tag{3.2а}$$

$$\varphi(Z_\pm, k) = 0. \tag{3.2б}$$

Здесь k — свободный параметр; ω — спектральный параметр. Функции φ_n нормированы на интервале $Z_- < z < Z_+$ с весом $N^2(z)$:

$$\int\limits_{Z_-}^{Z_+} N^2(z)\varphi_n^2(z,k)\,dz = 1.$$

При $k \to \infty$ и фиксированном n функции $\varphi_n(z,k)$ сосредоточиваются в окрестности значения $z = \hat{z}$, в котором $N(z)$ достигает максимума, и стремятся к нулю при фиксированном $z \neq z_0$, как $\exp(-\mathrm{const}\cdot k)$. Функция ω_n при $k \to \infty$ имеет асимптотику

$$\omega_n \approx N(\hat{z}) - \frac{c_n}{k} + O(k^{-2}), \tag{3.3}$$

где коэффициент c_n растет с увеличением n.

Наша цель — определить асимптотику функции G при $t \to \infty$. При любом фиксированном n и $t \to \infty$ слагаемое S_n в сумме (3.1а) стремится к нулю не медленнее, чем t^{-1}. Действительно, при $t \to \infty$ стационарная точка фазовой функции в (3.1б), определяемая (с учетом осцилляций функции $J_0(kr)$) из уравнения $-r + t\partial\omega_n/\partial k = 0$ с учетом (3.3), стремится к бесконечности при $t \to \infty$, как $\sqrt{t/r}$, и при достаточно больших t оказывается в области, где произведение $\varphi_n(z,k)\varphi_n(z_0,k)$ экспоненциально мало и оценивается величиной $\exp(-\mathrm{const}\cdot k)$. Поэтому асимптотика S_n определяется границей $k = 0$ области интегрирования в (3.1б). Так как $\omega_n \sim k$ при $k \to 0$, вклад этой точки в асимптотику S_n имеет порядок t^{-1}. При вычислении асимптотики функции G при $t \to \infty$ этой величиной можно пренебречь, т. е. проводить суммирование в (3.1а), начиная с некоторого фиксированного значения n. Далее, поскольку $k/\omega_n \to \infty$ при $n \to \infty$ равномерно по k, при этом вычислении можно для собственных значений ω_n и собственных функций φ_n использовать приводимую ниже ВКБ-асимптотику.

4. ВКБ-асимптотика собственных функций и собственных чисел. Чтобы найти асимптотику собственных чисел, выпишем асимптотики решений $u = u_\pm$ уравнения (3.2а), обращающихся в нуль соответственно при $z = Z_\pm$. Приравнивая эти две асимптотики, получим уравнение для ВКБ-асимптотики собственных чисел ω_n.

Асимптотика при $k/\omega \gg 1$ общего решения уравнения (3.2а), применимая в любом интервале, содержащем точку $z = z_-(\omega)$ и не содержащем $z_+(\omega)$, имеет (см., например, [1]) вид $u \approx (\partial Q_-(k,\omega,z)/\partial z)^{-1/2}[A_-\mathrm{Ai}(-Q_-(k,\omega,z)) + B_-\mathrm{Bi}(-Q_-(k,\omega,z))]$. Аналогично в любом интервале, содержащем точку $z_+(\omega)$ и не содержащем $z_-(\omega)$, общее решение уравнения (3.2а) имеет асимптотику $u \approx (\partial Q_+(k,\omega,z)/\partial z)^{-1/2}[A_+\mathrm{Ai}(-Q_+(k,\omega,z)) + B_+\mathrm{Bi}(-Q_+(k,\omega,z))]$. Здесь $Q_\pm$ определены формулой (2.10); $A_\pm$, $B_\pm$ — произвольные постоянные. Если функция u удовлетворяет нулевому граничному условию при $z = Z_-$, то

$$u = u_- \approx \frac{2\sqrt{\pi}A}{\sqrt{Q'_-(k,\omega,z)}}[-\sin\theta(Q_-(k,\omega,Z_-))\mathrm{Ai}(-Q_-(k,\omega,z)) + \\ + \cos\theta(Q_-(k,\omega,Z_-))\mathrm{Bi}(-Q_-(k,\omega,z))], \tag{4.1а}$$

где A — произвольная постоянная; функция $\theta(x)$ определена формулой (2.11а). Заменяя функции Эйри $\mathrm{Ai}(-Q_-(k,\omega,z))$ и $\mathrm{Bi}(-Q_-(k,\omega,z))$ на их асимптотику при $|Q_-| \gg 1$, получим неравномерную асимптотику u_-, применимую при $z < z_+(\omega)$, $z \neq z_-(\omega)$:

$$u = u_- \approx \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z < z_-(\omega), \\ \dfrac{A\sin[kI(z_-,z) + \tilde{\theta}(Q_-(k,\omega,Z_-))/2 - \pi/4]}{(N^2(z) - \omega^2)^{1/4}} & \text{при} \quad z > z_-(\omega). \end{cases} \tag{4.2а}$$

Здесь z_- определено по формуле (2.2), а функции I и $\tilde{\theta}$ — по (2.3) и (2.11).

Аналогично решение $u = u_+$, обращающееся в нуль при $z = Z_+$, имеет применимую в окрестности точки $z = z_+(\omega)$ асимптотику

$$u = u_+ \approx \frac{2\sqrt{\pi}A}{\sqrt{Q'_+(k,\omega,z)}}[-\sin\theta(Q_+(k,\omega,Z_+))\mathrm{Ai}(-Q_-(k,\omega,z)) +$$
$$+ \cos\theta(Q_+(k,\omega,Z_+))\mathrm{Bi}(-Q_+(k,\omega,z))] \tag{4.1б}$$

и неравномерную асимптотику, применимую при $z > z_-(\omega)$, $z \neq z_+(\omega)$:

$$u = u_+ \approx \begin{cases} \dfrac{A\sin[kI(z,z_+) + \tilde{\theta}(Q_+(k,\omega,Z_+))/2 - \pi/4]}{(N^2(z) - \omega^2)^{1/4}} & \text{при} \quad z < z_+(\omega), \\ 0 & \text{при} \quad z > z_+(\omega). \end{cases} \tag{4.2б}$$

Если ω является собственным числом спектральной задачи (3.2), то функции u_-, u_+ должны с точностью до знака совпадать. Отсюда, учитывая, что $I(z,z_+) = I - I(z_-,z)$, где интеграл I определен формулой (2.4а), получим уравнение для асимптотики собственных чисел $\omega = \omega_n$:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2}[\tilde{\theta}(Q_-(k,\omega,Z_-)) + \tilde{\theta}(Q_+(k,\omega,Z_+))] + kI =$$

$$= \theta(Q_-(k,\omega,Z_-)) + \theta(Q_+(k,\omega,Z_+)) + \frac{k}{\omega}\int\limits_{z_-(\omega)}^{z_+(\omega)} \sqrt{N^2(z) - \omega^2}dz = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{4.3}$$

Поскольку функции Q_+ и Q_- — монотонно возрастающие функции ω, а $\theta(x)$ — убывающая функция [7, формула 10.4.71], то функция $\Psi(\omega)$ — монотонно убывающая функция ω, стремящаяся вместе с интегралом I к бесконечности при $\omega \to 0$. Поэтому уравнение (4.3) однозначно определяет собственные числа ω_n.

Для собственных функций $\varphi_n(k,z) = \varphi(k,z,\omega_n)$ справедливы формулы (4.1) и (4.2), в которых определяемая из условия нормировки постоянная

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\left|\frac{\partial I}{\partial \omega}\right|^{-1/2}, \tag{4.2в}$$

где I — интеграл (2.4а); $\omega = \omega_n$.

Положим $\varphi(k,z,\omega_n)\varphi(k,z_0,\omega_n) = U(k,z,z_0,\omega_n)$. Тогда из (4.2) следует, что функция $U(k,z,z_0,\omega)$ имеет неравномерную асимптотику:

при $z_-(\omega) < \min(z,z_0)$ и $\max(z,z_0) < z_+(\omega)$

$$U \approx \frac{2[\mathrm{e}^{ikI(z_0,z)} + \mathrm{e}^{-ikI(z_0,z)} + \mathrm{e}^{ikI_{-1}+i\tilde{\delta}_-(k,\omega)} + \mathrm{e}^{ikI_1+i\tilde{\delta}_+(k,\omega)}]}{[(N^2(z) - \omega^2)(N^2(z_0) - \omega^2)]^{1/4}\omega^2\left|\dfrac{\partial I}{\partial\omega}\right|}; \tag{4.4}$$

при $\min(z, z_0) < z_-(\omega)$ или $z_+(\omega) < \max(z, z_0)$

$$u = 0.$$

Здесь интегралы $I(z_0, z)$, $I_\pm$ и функции $\tilde{\delta}_\pm(k, \omega)$ определены формулами (2.4) и (2.12а).

Эта асимптотика неприменима при значении ω, близком к $N(z)$ или к $N(z_0)$, т. е. при z или z_0, близких к $z_\pm(\omega)$. В этом случае для функций $\varphi(k, z, \omega)$, $\varphi(k, z_0, \omega)$ и тем самым для U надо использовать асимптотику, выражающуюся через функции Эйри. Например, при z, близком к $z_-(\omega)$, для функции $\varphi(k, z, \omega)$ используется асимптотика (4.1а).

5. Асимптотика функции Грина. В случае четной функции $f(\xi)$ формулу суммирования Пуассона можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi) \exp(2\pi i m\xi)\, d\xi.$$

Заменяя в сумме (3.1а) слагаемые S_n их ВКБ-асимптотикой, с точностью порядка $O(t^{-1})$ получим

$$G(t, r, z, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m, \tag{5.1а}$$

где

$$T_m = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} J_0(kr) \exp(2\pi i m\xi) \sin t\omega U(k, z, z_0, \omega)\, \frac{\omega}{k}\, dk. \tag{5.1б}$$

Здесь $\omega = \omega(\xi)$ определяется из уравнения $\xi = (1/2\pi)\, \Psi(\omega) = (1/2\pi)\,(\tilde{\theta}_- + \tilde{\theta}_+ + 2kI) - 1/2$ $\left(\tilde{\theta}_\pm = \tilde{\theta}(Q_\pm(k, \omega, Z_\pm))\right)$. При $\xi \to 0$ функция $\omega(\xi) \to \max N(z) = N(\hat{z}) = \widehat{N}$. Переходя в (5.1а) к переменным интегрирования $q = k/t$, ω, находим

$$T_m = -\frac{(-1)^m t}{2\pi^2} \int_0^{\widehat{N}} d\omega \int_0^{\infty} \Phi(t, q, \omega, z, z_0) \Omega(t, q, \omega, z, z_0) dq, \tag{5.2}$$

где

$$\Phi(t, q, \omega, z, z_0) = \frac{\sin t\omega}{\omega} J_0(tqr) \exp(2imtqI) U(tq, z, z_0, \omega);$$

$$\Omega(t, q, \omega, z, z_0) = \omega^2 \exp(im(\tilde{\theta}_- + \tilde{\theta}_+)) \left|\partial I/\partial\omega\right| (1 + H(tq, \omega));$$

$$H(tq, \omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{\theta}_+}{\partial\omega} + \frac{\partial\tilde{\theta}_-}{\partial\omega}\right) \Big/ \left(tq\, \frac{\partial I}{\partial\omega}\right) \quad \left(\tilde{\theta}_\pm = \tilde{\theta}(Q_\pm(tq, \omega, Z_\pm))\right).$$

Функция H стремится к нулю при $t \to \infty$, как $t^{-1/3}$. Поэтому при последующем вычислении асимптотики функции Грина положим $H = 0$. Функция Φ — быстроосциллирующая функция t, ее производные по q, ω имеют при $t \to \infty$ порядок t. Функцию Ω можно считать медленно меняющейся функцией q, ω, поскольку ее производные имеют порядок $t^{2/3}$.

При вычислении асимптотики T_m будем предполагать сначала, что для рассматриваемых r, z, z_0 значения ω в стационарных точках функции Φ отличны от $N(z)$, $N(z_0)$.

Тогда для U можно использовать неравномерную асимптотику (4.4), т. е. положить

$$T_m = -\frac{t}{4\pi^2}\int_0^\infty dq \int_0^{N_-} \frac{J_0(tqr)\mathrm{e}^{im[\tilde{\delta}_-(tq,\omega)+\tilde{\delta}_+(tq,\omega)+2tqI]}}{\big((N^2(z)-\omega^2)(N^2(z_0)-\omega^2)\big)^{1/4}} \frac{\sin t\omega}{\omega} \times$$

$$\times \big(\mathrm{e}^{itqI(z_0,z)} + \mathrm{e}^{-itqI(z_0,z)} + \mathrm{e}^{itqI_{-1}+i\tilde{\delta}_-(\omega)} + \mathrm{e}^{itqI_1+i\tilde{\delta}_+(\omega)}\big)\,d\omega,$$

где $N_- = \min(N(z_0), N(z))$.

Если подставить это выражение в (5.1б), то получающуюся сумму можно записать в форме

$$G = \sum_{p=-\infty}^{\infty} L_p.$$

Здесь

$$L_p = -\frac{t}{4\pi^2}\int_0^\infty dq \int_0^{N_-} \frac{J_0(tqr)\cos\big(tqI_p(z,z_0,\omega)+\psi_p(tq,\omega)-\pi/4\big)}{\big((N^2(z)-\omega^2)(N^2(z_0)-\omega^2)\big)^{1/4}} \frac{\sin t\omega}{\omega}\,d\omega;$$

I_p — интегралы (2.4); функции ψ_p определены формулой (2.8), в которой постоянные $\delta_\pm$ заменены на сглаженные функции $\tilde{\delta}_\pm(tq,\omega)$.

Найдем асимптотику интегралов L_p при $t \to \infty$. Начнем с вычисления L_0. Поскольку в этом случае $\psi_0 = \pi/4$, то интегрирование по q сводится к табличному интегралу [8, формула 6.672.6] и

$$L_0 = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega_0}^{N_-} \frac{\sin t\omega d\omega}{\big((N^2(z)-\omega^2)(N^2(z_0)-\omega^2)\big)^{1/4}\omega\sqrt{r^2-I_0^2}},$$

где ω_0 — корень уравнения (2.5) при $p = 0$. Вычисляя асимптотику L_0 при $t \to \infty$, получим выражение (2.6) для функции $A_0(r,z,z_0)$.

Выписанная асимптотика делается непригодной при $z \to z_0$, т. е. $\omega_0 \to 0$. Чтобы найти в данном случае асимптотику L_0, запишем эту функцию в виде

$$L_0 = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega_0}^{N_-} \frac{\sin t\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}} W(\omega)\,d\omega.$$

Здесь функция

$$W(\omega) = \frac{1}{\omega\big((N^2(z)-\omega^2)(N^2(z_0)-\omega^2)\big)^{1/4}}\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_0^2}{r^2-I_0^2(\omega)}}$$

регулярна при малых ω равномерно по $z - z_0$. Главный член асимптотики L_0 при $t \to \infty$ дается выражением

$$L_0 = -\frac{1}{2\pi^2} W(\omega_0)\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sin t\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}\,d\omega = -\frac{1}{4\pi} J_0(t\omega_0)W(\omega_0).$$

Вычисляя $W(\omega_0)$, получим приведенный в п. **2** алгоритм нахождения асимптотики функции Грина при $z \to z_0$.

Рассмотрим теперь асимптотику L_p при $p \neq 0$. После замены $J_0(tqr)$ на асимптотику этой функции при $tqr \gg 1$, имеем под знаком интеграла произведение трех тригонометрических функций. Представим их в виде суммы экспонент и воспользуемся методом стационарной фазы. Стационарные точки фазовой функции определяются из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega - qr + qI_p) = \frac{\partial}{\partial q}(\omega - qr + qI_p) = 0, \quad \text{т. е.} \quad r = I_p = I_p(z, z_0, \omega), \quad 1 + q\partial I_p/\partial\omega = 0.$$

Первое из этих уравнений совпадает с (2.5) и определяет функцию $\omega_p(r, z, z_0)$, из второго находится функция $q_p = q_p(z, z_0, \omega_p) = |\partial I_p/\partial\omega|^{-1}$. Значение фазовой функции в стационарной точке равно, очевидно, ω_p.

Вычисляя L_p методом стационарной фазы, получим выражение (1.2), в котором ω_p определяются из уравнения (2.5), A_p — из (2.6), ψ_p — из (2.8), где вместо постоянных $\delta_\pm$ берутся определенные по (2.12) сглаженные функции $\hat{\delta}_\pm(tq_p, \omega_p)$.

Метод стационарной фазы неприменим, если какое-либо из значений ω_p оказывается близким к $N(z)$ или к $N(z_0)$. В этом случае нельзя использовать для функции U в соответствующем интеграле T_m (см. (5.2)) неравномерную асимптотику функции U, а следует использовать асимптотику U, выражающуюся через функции Эйри (см. п. **4**). В результате для T_m находим выражение в форме трехкратного интеграла, фазовая функция которого имеет две близкие стационарные точки. Равномерная асимптотика таких интегралов рассмотрена, например, в [9]. Используя эти результаты, получим формулы (2.9), применимые при ω_p, близких к $N(z)$ или к $N(z_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эрдейи А.** Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Анютин А. П., Боровиков В. А.** Эволюция локализованных возмущений стратифицированной жидкости с переменной частотой Брента — Вяйсяля // ПММ. 1986. Т. 50, № 5. С. 863–867.
3. **Боровиков В. А.** Поле точечного источника внутренних волн в полупространстве с переменной частотой Брента — Вяйсяля // ПММ. 1988. Т. 52, № 4. С. 688–692.
4. **Боровиков В. А.** Асимптотика при $t \to \infty$ функции Грина уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 2. С. 313–316.
5. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
6. **Распространение** волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера, Дж. Б. Пападокиса. М.: Мир, 1980. Гл. 2.
7. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
8. **Рыжик И. М., Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 26/XII 1994 г.