УДК 519.24

Об управляемости одного нового непараметрического статистического критерия, альтернативного критерию Вилкоксона–Манна–Уитни*

Г.И. Салов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Салов Г.И. Об управляемости одного нового непараметрического статистического критерия, альтернативного критерию Вилкоксона–Манна–Уитни // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 315–323.

Вводится понятие управляемости непараметрического статистического критерия. Сравниваются мощности одного нового управляемого непараметрического статистического критерия и критерия Вилкоксона–Манна–Уитни в случаях с экспоненциальным распределением.

DOI: 10.15372/SJNM20190305

Ключевые слова: *две выборки, непараметрический критерий, управляемый непараметрический критерий.*

Salov G.I. On the controllability of one new non-parametric statistical criterion, alternative to the Wilcoxon–Mann–Whitney criterion // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 315–323.

In this paper, we introduce the notion of controllability of a non-parametric statistical test and compare the powers of one new controllable non-parametric statistical test and the Wilcoxon–Mann–Whitney test for the cases with samples from exponential distribution.

Keywords: *two-sample problem, controllable non-parametric statistical test.*

1. Ведение. Постановка задачи

Пусть результаты $N + m$ независимых измерений (наблюдений) образуют две выборки: $\xi_1, \dots, \xi_N$, $N \geq 4$, и $\eta_1, \dots, \eta_m$, $m \geq 2$, из неизвестных распределений с непрерывными функциями распределения F и G соответственно. Задача состоит в том, чтобы проверить гипотезу об однородности выборок H_0: $F = G$ против односторонней альтернативной гипотезы (альтернативы) H_1: величины η_i имеют тенденцию быть стохастически больше величин ξ_j, т. е.

$$G(x) \leq F(x) \quad \text{для всех} \quad x, \quad G(x) \not\equiv F(x).$$

Эта альтернатива является более общей, чем альтернатива $G(x) = F(x - \Delta)$, $\Delta > 0$ [1].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00066).

Стандартными тестами (критериями), применяемыми в подобной задаче, являются двухвыборочный непараметрический статистический критерий Вилкоксона [2] и эквивалентный ему критерий Манна и Уитни [3] (см. также, например, [1, 4]).

Критерий Манна–Уитни основан на (считающей) статистике U и имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{I}\{\zeta_i > \xi_j\} > C, \tag{1}$$

здесь и далее $\boldsymbol{I}\{A\}$ — функция-индикатор события A, равная 1, если событие A произошло, и 0 в противном случае. Число (константа) C выбирается так, чтобы уровень (значимости) критерия (вероятность отклонить гипотезу H_0, когда она на самом деле верна) имел приемлемое значение.

В [5–10] был введен и рассматривался в качестве альтернативного по отношению к критерию Вилкоксона–Манна–Уитни (*WMW*-критерию) новый непараметрический статистический критерий, обозначенный там, для краткости, через S_E.

S_E-критерий. Пусть число $N = 2n$ — четное. Разобьем множество $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ на два подмножества: $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n}$ равных объемов и введем в рассмотрение следующие события:

$$E_{ij}^{+} = \{\eta_i > \max(\xi_j, \xi_{j+n})\}, \quad E_{ij}^{-} = \{\eta_i < \min(\xi_j, \xi_{j+n})\}, \quad E_{ij}^{0} = \bar{E}_{ij}^{+} \cap \bar{E}_{ij}^{-}.$$

При нулевой гипотезе H_0 вероятность p^+ события E_{ij}^{+} в точности равна вероятности p^- события E_{ij}^{-}: $p^+ = p^- = 1/3$. Действительно, в силу предположения независимости наблюдаемых величин, например, для вероятности p^+:

$$\begin{aligned} p^+ &= \mathbf{P}\{\eta_i > \max(\xi_j, \xi_{j+n}) \mid H_0\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta_i > \max(\xi_j, \xi_{j+n}) | \eta_i = x, H_0\}\, dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)\, dF(x) = 1/3. \end{aligned}$$

Это же получается и для вероятности p^-.

При альтернативной же гипотезе H_1 в силу предположений вероятность p^+ будет больше $1/3$ и больше вероятности p^-, которая будет меньше $1/3$. Поэтому представляется естественным рассматривать критерии, основанные на статистиках

$$S_E^{+} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{I}\{E_{ij}^{+}\}, \quad S_E^{-} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{I}\{E_{ij}^{-}\}, \quad S_E^{0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{I}\{E_{ij}^{0}\}, \tag{2}$$

принимающих значения от 0 до mn с суммой $S_E^{+} + S_E^{-} + S_E^{0} = mn$.

Лемма 1. *Критерий Вилкоксона–Манна–Уитни* (*WMW-критерий*) *эквивалентен критерию*

$$S_E^{+} > (C - S_E^{0})/2, \tag{3}$$

где число C то же, что и в (1).

Доказательство. Это следует из равенств (эквивалентности) событий

$$\{S_E^{+} > (C - S_E^{0})/2\} = \{2S_E^{+} + S_E^{0} > C\} = \{U > C\}. \qquad \square$$

Важно также следующее утверждение.

Лемма 2. *WMW-критерий эквивалентен еще и критерию*

$$S_E^+ - S_E^- > C - mn, \tag{4}$$

где число C то же, что и в (1).

Доказательство. Критерий (4) эквивалентен критерию (3), поскольку

$$\begin{aligned}\{S_E^+ > (C - S_E^0)/2\} &= \{S_E^+ - (mn - S_E^0)/2 > (C - S_E^0)/2 - (mn - S_E^0)/2\} \\ &= \{2S_E^+ - (S_E^+ + S_E^-) > (C - S_E^0) + S_E^0 - mn\} = \{S_E^+ - S_E^- > C - mn\}.\end{aligned}$$

Последнее означает, что *WMW*-критерий равнозначен критерию, основанному лишь на разности двух статистик S_E^+ и S_E^- без учета статистики S^0, содержащей дополнительную информацию.

Это побудило нас изучить более общий критерий вида

$$S_E^+ > h_S(S_E^0), \tag{5}$$

или, что эквивалентно,

$$S_E^+ - S_E^- > 2h_S(S_E^0) + S_E^0 - mn,$$

в котором, в отличие от критерия (3), функция h_S может быть нелинейной, при этом новый критерий, очевидно, уже не будет эквивалентен *WMW*-критерию.

Рассмотрим два случая: 1) неизвестные непрерывные функции распределения F и G могут быть произвольными и изменяться, будем называть этот случай общим, и 2) F и G принадлежат заранее заданному однопараметрическому семейству непрерывных функций $\{F_\theta\}$. Было бы, конечно, желательно, чтобы в случае 2) была возможность "вводить" в критерий информацию о заданном семействе $\{F_\theta\}$.

Определение. Непараметрический статистический критерий назовем управляемым, если в его конструкцию входит переменная или функция, управляя которой, наблюдатель-статистик, располагая информацией о семействе неизвестных распределений наблюдаемых величин, может получить вариант критерия по возможности наибольшей (или близкой к ней) мощности при том же заранее заданном уровне критерия α (или достаточно близком к нему).

Большинство известных непараметрических статистических критериев являются неуправляемыми.

Одной из целей настоящей работы — показать, что в новом критерии (5) роль управляемой функцией играет функция h_S.

Запишем распределение статистик (2) при гипотезе H_0. Нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $\mathfrak{P}(u, v)$ — множество всех упорядоченных представлений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n)$ числа n в виде суммы $(m+1)^2$ целых неотрицательных (≥ 0) чисел, обозначенных

$$n_{00}, n_{01}, \ldots, n_{0m}, n_{10}, n_{11}, \ldots, n_{1m}, \ldots, n_{m0}, n_{m1}, \ldots, n_{mm},$$

и таких, что

$$\sum_{h=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}(m-\max(h,k))n_{hk}=u, \quad \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\min(h,k)n_{hk}=v$$

(представления считаются упорядоченными, если равенство двух представлений $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ означает, что $n_{ij}=n'_{ij}$).

Удобно положить $0!=1$.

Предложение 1 [5]. *Пусть при гипотезе H_0 случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_{2n}$ и $\eta_1,\ldots,\eta_m$ стохастически независимы в совокупности и все имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения F. Тогда при $m\geq 1$, $n\geq 2$*

$$\mathbf{P}\{S_E^+=u, S_E^-=v|H_0\}=\frac{m!n!}{(m+n)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)}\left(\prod_{i=0}^{m}s_i!\right)\left(\prod_{h,k=0}^{m}n_{hk}!\right)^{-1},$$

здесь и далее

$$s_i=\sum_{h=0}^{m}(n_{hi}+n_{ih}), \quad i=0,1,\ldots,m. \tag{6}$$

Нам будет несколько удобнее иметь дело с S_E-критерием в виде (5). Пусть $p_0(u,z)$ — совместное распределение статистик S_E^+ и S_E^0 при гипотезе H_0:

$$p_0(u,z)=\mathbf{P}\{S_E^+=u, S_E^0=z \mid H_0\}=\mathbf{P}\{S_E^+=u, S_E^-=mn-u-z \,|H_0\}.$$

Тогда уровень (значимости) S_E-критерия (5) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{S_E^+>h_S(S_E^0)\mid H_0\}=\sum_{z=0}^{mn}\sum_{u=h_S(z)+1}^{mn-z}p_0(u,z). \tag{7}$$

В теории проверки статистических гипотез, когда истинные распределения неизвестны, для построения критерия привлекают альтернативную гипотезу, близкую (в некотором смысле) к H_0, в надежде, что критерий, построенный против этой альтернативы, будет так же хорош и для далеких альтернатив.

В случае 1), согласно нашему прошлому опыту, для построения критерия достаточно малого уровня $\alpha=\alpha(m,n)$, в качестве подходящей “близкой” альтернативной гипотезы может быть взята гипотеза $\mathcal{H}_1^*$: $G=F^2$ [9]. Альтернатива $G=F^2$ является и одной из известных лемановских непараметрических альтернатив, введенных Леманом в [11], чтобы сравнивать мощности ранговых (непараметрических) статистических критериев.

Предложение 2. *Пусть при “близкой” альтернативной гипотезе $\mathcal{H}_1^*$ каждая из величин η_i имеет функцию распределения $G=F^2$. Тогда вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+=u, S_E^-=v|\mathcal{H}_1^*\}$ при $m\geq 1$ и $n\geq 2$ допускает представление*

$$\frac{2^m n!m!}{(2n+2m)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)}\left(\prod_{i=0}^{m}s_i!\right)\left(\prod_{h,k=0}^{m}n_{hk}!\right)^{-1}A_{m,m},$$

где s_i, $i=0,1,\ldots,m$, как и прежде, определяются формулой (6), $A_{1,1}=s_0+1$, *а число $A_{m,m}$ может быть получено повторным применением рекуррентных соотношений* $(j=2,3,\ldots,m)$:

$$A_{j,j}=A_{j-1,j-1}(T_{j-1}+j-1), \quad T_i=T_{i-1}+s_i+1, \quad T_1=s_0+s_1+2.$$

Это следует из предложения 2 в [6].

Искомое распределение автоматически получилось не зависящим от неизвестного произвольного распределения F, т. е. гипотезы H_0 и $\mathcal{H}_1^*$ "свелись" к простым гипотезам.

В случае 2) для построения критерия в качестве простой альтернативной можно взять подходящую отдельную гипотезу $H_1^* = H_1^*(\theta^*) = \{\theta = \theta^*\}$.

В этой ситуации естественно воспользоваться известной леммой Неймана–Пирсона (леммой НП) и построить наиболее мощные (нерандомизированные) критерии для проверок гипотезы H_0 против $\mathcal{H}_1^*$ и $H_1^*(\theta^*)$, а с ними и соответствующие подходящие функции $h_S(z)$ для критерия (5).

Следующее важное утверждение легко вытекает из леммы 1 и утверждения в лемме НП.

Теорема. *Мощность WMW-критерия при альтернативной гипотезе $\mathcal{H}_1^*$ (или $H_1^*(\theta^*)$) будет меньше или, в лучшем случае, равна мощности наиболее мощного критерия того же уровня в лемме НП.*

Обозначим через $p_1^*(u,z)$ совместное распределение статистик S_E^+ и S_E^0 при альтернативной "близкой" гипотезе $\mathcal{H}_1^*$ (или H_1^*). Все возможные элементы-пары (u,z) значений статистик S_E^+ и S_E^0 занумеруем в L-последовательность $e_1 = (u_1, z_1)$, $e_2 = (u_2, z_2)$, $\ldots$ в порядке убывания (невозрастания) отношения правдоподобия $L(u,z)$=$p_1^*(u,z)/p_0(u,z)$. Следующий шаг, соответствующий лемме НП, состоит в последовательном включении этих занумерованных элементов в критическую область W критерия в лемме НП до первого нарушения неравенства

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{s} p_0(e_i) \le \alpha, \tag{8}$$

где α — заранее заданный уровень S_E-критерия (см. также, например, [1, с. 77, 78]).

Пусть k обозначает наибольшее s, при котором выполняется условие (8). Тогда построенная таким образом область $W = W(\alpha_k)$ будет критической областью уровня α_k. Как правило, она получается нужного вида $\{(u,z) : u > g(z)\}$, где для каждого z значение $g(z)$ равно $u_m(z)-1$, $u_m(z)$ — наименьшее u, при котором (u,z) принадлежит $W(\alpha_k)$. Таким образом, эта область однозначно определяет вариант S_E-критерия с $h_S(z) = g(z)$ и уровнем, равным α_k. Если уровень α_k оказался достаточно близким к α, то отыскание подходящей функции $h_S(z)$ на этом можно закончить и полученный вариант S_E-критерия рекомендовать для приложений.

Иногда случается, что в критическую область $W(\alpha_k)$ попадает некоторый элемент $e = (u,z)$, но при этом не попадает элемент $e' = (u+1, z)$, хотя он и существует. Поскольку в подобном случае значение $L(u+1,z)$ элемента e' обычно оказывается сравнительно большим, элемент e' можно включить в критическую область $W(\alpha_k)$, если уровень, скажем, α', полученной таким путем новой критической области $W(\alpha')$, не превышает α. При этом критическая область $W(\alpha')$ будет нужного вида.

Не часто α_k оказывается достаточно близким к α, поскольку левая часть в неравенстве (8) возрастает с ростом s скачками. При α_k заметно меньшем, чем α может быть построена более мощная наилучшая критическая область (НКО) $W(\alpha')$ уровня α' ($\alpha_k < \alpha' \le \alpha$) для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}_1^*$ (или $H_1^*(\theta^*)$), которая определяется как множество, содержащее все элементы множества $W(\alpha_k)$ и некоторые из последующих элементов L-последовательности $e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots$. Наконец, можно попытаться построить более мощную критическую область $W(\alpha'')$ уровня α'' ($\alpha_k \le \alpha' \le \alpha'' \le \alpha$), включая в нее элементы из $W(\alpha_k)$, кроме некоторых из числа последних по порядку, и все или некоторые из последующих элементов L-последовательности $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots$ (см. также, например, [12, с. 392–400, 408, 409]).

К сожалению, получение в общем случае точных выражений для распределения статистики U критерия Манна и Уитни, а также для совместных распределений статистик (2) при гипотезе H_1 весьма затруднительно или просто невозможно. Поэтому рассмотрим достаточно важный частный случай с семейством экспоненциальных распределений, которые часто возникают на практике, например, при анализе сигналов и изображений.

Предположим для определенности и простоты, что

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0, \tag{9}$$

$$G(x) = 1 - e^{-(x-\theta)}, \quad \theta > 0, \quad x \geq \theta. \tag{10}$$

Предложение 3 [5]. *Пусть имеют место распределения* (9), (10), $b_0 = 1 - \exp(-\theta)$, $b_1 = 1 - b_0$. *Тогда вероятность* $\mathbf{P}\{S^+ = u, S^- = v | H_1\}$ *можно записать в виде*

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \left(\prod_{i=0}^{m} s_i! \right) \left(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}! \right)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} \frac{b_0^r b_1^{2n-r}}{(m+2n-r)!r!},$$

где s_i, $i = 0, \ldots, m$, *как и выше, определяется формулой* (6).

2. Сравнение критериев. Числовые примеры

Пусть m=10, $n = 5$ ($m + 2n = 20$). Чтобы сравнить мощности критериев, в качестве α удобно брать уровень WMW-критерия. При $C = 88$ в (1) уровень WMW-критерия приближенно равен $\alpha \approx 0.0010446$. Начнем со случая 1). Использование леммы НП в построении наиболее мощного критерия для проверки гипотезы H_0 против "близкой" альтернативы $\mathcal{H}_1^*$ (см. выше) привело сначала к критической области $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$ и определяемому ею варианту S_E-критерия с уровнем, приближенно равным $\alpha_k \approx 0.0009964$, и критическими значениями, данными в таблице 1.

Таблица 1. Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, при $m = 10$, $n = 5$, отвечающие критической области $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$ с уровнем $\alpha_k \approx 0.0009964$

z	0–1	2–3	4	5–6	7	8	9–10	11	12	13–14	15	16	17	18	...	50
h	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	...	0

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}_1^*$ равна ≈ 0.02858, что больше мощности WMW-критерия, равной ≈ 0.02851. Попытка получить еще более мощный при $\mathcal{H}_1^*$ вариант S_E-критерия, выбирая элементы из $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$, а также из следующих по порядку, комбинируя получающийся уровень с мощностью при $\mathcal{H}_1^*$, привела к включению в критическую область $W(\alpha''; \mathcal{H}_1^*)$ всех элементов $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$, за исключением элемента (46,0), 7-го с конца среди всех попавших в $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$ элементов, заменяя для этого $h_S(0) = 45$ в табл. 1 на $h_S(0) = 46$, и добавлению элемента (42,6), первого из не попавших в $W(\alpha_k; \mathcal{H}_1^*)$, заменяя для этого $h_S(6) = 42$ на $h_S(6) = 41$. Уровень критической области $W(\alpha''; \mathcal{H}_1^*)$ и варианта S_E-критерия с подправленными критическими значениями получился равным ≈ 0.0010437, что все еще меньше α, а мощность, равной ≈ 0.02961, что заметно больше предыдущего значения.

Обратимся теперь к случаю 2) с заданным однопараметрическим семейством распределений (9), (10). Использование леммы НП в построении наиболее мощного критерия для проверки гипотезы H_0 против "близкой" альтернативы $H_1^*(1{,}5)$ привело к критической области $W(\alpha_k; H_1^*(1{,}5))$ с уровнем $\alpha_k \approx 0.0009729$ и критическими значениями, приведенными в табл. 2.

Таблица 2. Значения $g(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, при $m = 10$, $n = 5$, принадлежащие критической области $W(\alpha_k; H_1^*(1{,}5))$

z	0	1	2–3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15–16	17	18	...	50
h	40	45	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	...	0

В критическую область $W(\alpha_k; H_1^*(1{,}5))$ попал элемент (44,0), но не попал элемент (45,0). Уровень критической области $W(\alpha'; H_1^*(1{,}5))$, содержащей все элементы критической области $W(\alpha_k; H_1^*(1{,}5))$ и элемент (45,0) получился равным $\alpha' \approx 0.0009792$, что меньше α, а мощность равной ≈ 0.6651, что больше мощности WMW-критерия, равной ≈ 0.5758. Попытка получить более мощную при $H_1^*(1{,}5)$ критическую область привела к критической области $W(\alpha''; H_1^*(1{,}5))$, в которую были включены все элементы критической области $W(\alpha'; H_1^*(1{,}5))$ и добавлены следующие элементы: (46,2), (46,3), (45,4), (45,1), (44,5), заменяя для этого в табл. 2 $h_S(2) = 46$ на $h_S(2) = 45$, $h_S(3) = 46$ на $h_S(3) = 45$ и т. д. соответственно. Уровень критической области $W(\alpha''; H_1^*(1{,}5))$ и определяемого ею варианта S_E-критерия получился равным $\alpha'' \approx 0.0010417$, что все еще меньше α, а мощность при $H_1^*(1{,}5)$ оказалась равной ≈ 0.6708, что больше предыдущего значения мощности.

В табл. 3 для различных значений параметра θ в (10) приведены с достаточной и необходимой для сравнений точностью значения мощности WMW-критерия (в 1-й строке таблицы), значения мощности варианта S_E-критерия, полученного выше для случая 1), и, наконец, значения мощности варианта S_E-критерия, полученного для случая 2). Уровни значимости вариантов критериев даны в вертикальной колонке с заголовком $\theta = 0.0$.

Таблица 3. Мощности критериев для случая с распределениями (9), (10) при $m = 10$, $n = 5$, $C = 88$

θ										
0.0	0.5	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	3.0	4.0
0.0010446	0.048	0.274	0.429	0.575	0.698	0.793	0.862	0.910	0.963	0.9945
0.0010437	0.057	0.316	0.479	0.626	0.743	0.829	0.888	0.929	0.972	0.9959
0.0010417	0.064	0.352	0.524	0.670	0.782	0.860	0.912	0.945	0.979	0.9972

Для полноты и сравнения в табл. 4 даны результаты, полученные аналогичным образом при $C = 86$ в (1).

Таблица 4. Мощности критериев для случая с распределениями (9), (10) при $m = 10$, $n = 5$, $C = 86$

θ										
0.0	0.5	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	3.0	4.0
0.001943	0.074	0.348	0.510	0.652	0.763	0.843	0.899	0.936	0.975	0.9964
0.001940	0.091	0.410	0.580	0.718	0.819	0.887	0.930	0.957	0.984	0.9980
0.001933	0.104	0.462	0.638	0.771	0.862	0.919	0.953	0.973	0.991	0.9990

3. Заключительные замечания

Сравнение строк как в табл. 3, так и в табл. 4 показывает, что наиболее мощным среди трех вариантов критериев получился, как этого и следовало ожидать, вариант S_E-критерия, построенный для заранее заданного однопараметрического семейства непрерывных распределений наблюдаемых величин (ему отведена в таблице последняя строка). Затем идут вариант S_E-критерия, построенный для общего случая с неизвестными произвольными непрерывными распределениями (2-я строка) и, наконец, критерий Вилкоксона–Манна–Уитни (1-я строка), который оказался гораздо слабее. При этом вариант S_E-критерия для общего случая уступает варианту S_E-критерия для заданного однопараметрического семейства распределений относительно немного. Таким образом, в обоих случаях 1) и 2) новый критерий имеет решительное преимущество с точки зрения мощности и управляемости по сравнению с критерием Вилкоксона–Манна–Уитни.

Благодарности. Автор благодарит рецензентов за замечания, которые помогли улучшить изложение статьи.

Литература

1. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. — М.: Наука, 1979.
2. **Wilcoxon F.** Individual comparisons by ranking methods // Biometrics Bull. — 1945. — Vol. 1. — P. 80–83.
3. **Mann H.B. and Whitney D.R.** On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Stat. — 1947. — Vol. 1. — P. 50–60.
4. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
5. **Салов Г.И.** Новый статистический критерий для задач с двумя и тремя выборками, более мощный, чем критерии Вилкоксона и Уитни // Автометрия. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 58–70.
6. **Салов Г.И.** О мощности одного нового статистического критерия и двухвыборочного критерия Вилкоксона // Автометрия. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 44–59.
7. **Салов Г.И.** Новый непараметрический статистический критерий для задач с тремя выборками, частный случай которого эквивалентен критерию Уитни // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 389–397.
8. **Салов Г.И.** Новый непараметрический статистический критерий для задач с тремя выборками, более эффективный, чем критерий Уитни // Автометрия. — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 11–22.
9. **Салов Г.И.** Обнаружение малоразмерных объектов на зашумленных изображениях при неизвестных вероятностных распределениях // Автометрия. — 2018. — Т. 54, № 5. — С. 12–24.
10. **Салов Г.И.** Управляемый непараметрический статистический критерий для проверки гипотезы об однородности двух выборок // Международная конференция “Математика в современном мире”, посвященная 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева. Новосибирск, Россия, 14–19 августа 2017 г. — (Тезисы докладов, с. 362).
11. **Lehmann E.L.** The power of rank tests // Ann. Math. Stat. — 1953. — Vol. 24. — P. 28–43.
12. **Нейман Ю.** Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 22 октября 2018 г.,
После доработки 25 декабря 2018 г.
Принята к публикации 7 мая 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Leman E.** Proverka statisticheskih gipotez. — M.: Nauka, 1979.
2. **Wilcoxon F.** Individual comparisons by ranking methods // Biometrics Bull. — 1945. — Vol. 1. — P. 80–83.
3. **Mann H.B. and Whitney D.R.** On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Stat. — 1947. — Vol. 1. — P. 50–60.
4. **Kendall M., St'yuart A.** Statisticheskie vyvody i svyazi. — M.: Nauka, 1973.
5. **Salov G.I.** Novyi statisticheskii kriterii dlya zadach s dvumya i tremya vyborkami, bolee moschnyi, chem kriterii Vilkoksona i Uitni // Avtometriya. — 2011. — T. 47, № 4. — S. 58–70.
6. **Salov G.I.** O moschnosti odnogo novogo statisticheskogo kriteriya i dvuhvyborochnogo kriteriya Vilkoksona // Avtometriya. — 2014. — T. 50, № 1. — S. 44–59.
7. **Salov G.I.** Novyi neparametricheskij statisticheskii kriterii dlya zadach s tremya vyborkami, chastnyi sluchai kotorogo ekvivalenten kriteriyu Uitni // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2014. — T. 17, № 4. — S. 389–397.
8. **Salov G.I.** Novyi neparametricheskii statisticheskii kriterii dlya zadach s tremya vyborkami, bolee effektivnyi, chem kriterii Uitni // Avtometriya. — 2015. — T. 51, № 2. — S. 11–22.
9. **Salov G.I.** Obnaruzhenie malorazmernyh ob"ektov na zashumlennyh izobrazheniyah pri neizvestnyh veroyatnostnyh raspredeleniyah // Avtometriya. — 2018. — T. 54, № 5. — S. 12–24.
10. **Salov G.I.** Upravlyaemyi neparametricheskii statisticheskii kriterii dlya proverki gipotezy ob odnorodnosti dvuh vyborok // Mezhdunarodnaya konferenciya "Matematika v sovremennom mire", posvyaschennaya 60-letiyu Instituta matematiki im. S.L. Soboleva. Novosibirsk, Rossiya, 14–19 avgusta 2017 g. — (Tezisy dokladov, s. 362).
11. **Lehmann E.L.** The power of rank tests // Ann. Math. Stat. — 1953. — Vol. 24. — P. 28–43.
12. **Neiman Yu.** Vvodnyi kurs teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistiki. — M.: Nauka, 1968.