

УДК 519, 537.533.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ШИРОКОАПЕРТУРНОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ С СЕТЧАТЫМ ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ И ВЫВОДОМ ПУЧКА В АТМОСФЕРУ

В. Т. Астрелин^{*,**}, М. С. Воробьев^{***},
А. Н. Козырев^{****}, В. М. Свешников^{**,**}

* Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

*** Институт сильноточной электроники СО РАН, 634055 Томск, Россия

**** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия

E-mails: V.T.Astrelin@inp.nsk.su, Vorobyovms@yandex.ru, Kozyrev_A@inbox.ru,
Victor@lapasrv.sccc.ru

С использованием кода ЭРА-DD выполнено численное моделирование физических процессов, происходящих в электронно-оптической системе ускорителя “Дуэт”. Расчеты проводились на адаптивных квазиструктурированных сетках. Предложена математическая модель поверхности эмиссионной плазмы, деформируемой при решении задачи. Согласно этой модели задача рассматривается в двумерном осесимметричном приближении и фронт входа электронов в расчетную область представляется в виде совокупности дуг окружностей, соединяемых перешейками. Для повышения точности расчетов разномасштабную протяженную область предложено разбить на две подобласти, а решение находить с помощью альтернирующего метода Шварца, поочередно решая самогласованные задачи в подобластях. Пучки моделируются с помощью метода трубок тока, потенциал электрического поля рассчитывается методом конечных объемов. Проведено сравнение полученных характеристик пучка с данными эксперимента. Показано, что при рабочих значениях параметров пучка его потери на элементах ускорителя минимальны и могут быть обусловлены, прежде всего, неидеальностью юстировки отверстий в маске и опорной решетке, а также отклонениями электронных пучков из структур, локализованных на периферии эмиссионного электрода.

Ключевые слова: ускоритель электронов, плазменный катод, сеточная (слоевая) стабилизация, численное моделирование, декомпозиция областей, квазиструктурированные сетки.

DOI: 10.15372/PMTF20190501

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования и Президиума СО РАН в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 10. Экспериментальные исследования вывода электронного пучка в атмосферу выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00627).

© Астрелин В. Т., Воробьев М. С., Козырев А. Н., Свешников В. М., 2019

Введение. В Институте сильноточной электроники СО РАН для облучения электронными потоками больших поверхностей и газовых объемов разработан широкоапертурный ускоритель электронов “Дуэт” с сетчатым плазменным катодом, генерирующий пучок большого сечения, который выводится в атмосферу через тонкую металлическую фольгу, удерживаемую опорной решеткой [1]. Для снижения потерь электронного пучка на опорной решетке на эмиссионную сетку, стабилизирующую границу эмиссионной (катодной) плазмы, укладывалась маска с отверстиями, конфигурация которых повторяет конфигурацию отверстий в опорной решетке и которые имеют меньший диаметр. В экспериментах при ускоряющем напряжении $U_a = 160$ кВ и силе тока эмиссии $I_a = 50$ А максимальный коэффициент вывода тока в атмосферу достигал приблизительно 60 % силы тока на ускоряющем участке. В этом случае потери пучка могут быть обусловлены поглощением электронов в фольге и опорной решетке, а также отражением электронов от фольги и коллектора. Для оценки неоднородности распределения плотности тока по сечению пучка проводилась регистрация его следа на полимерной пленке (винипрозе) — расположенной за фольгой мишени, оптическая плотность которой изменяется пропорционально поглощенной дозе излучения электронного пучка. Интегральная неоднородность плотности тока по сечению пучка составляла ± 20 %. Кроме того, следы пучка на пленке свидетельствовали о неоднородности тока в каждом пучке электронов, а именно о его фокусировке в центре каждого отверстия опорной решетки.

Для оптимизации работы ускорителя и увеличения эффективности вывода пучка электронов в атмосферу необходимо его численное моделирование. Эта задача характеризуется сильной разномасштабностью и сложностью расчета формы поверхности эмиссионной катодной плазмы, которая влияет на пространственно-угловые характеристики пучка. Результаты приближенных расчетов [2] свидетельствуют о возможности использования упрощенной модели плазменного эмиттера и необходимости увеличения точности расчетов за счет применения более мелких пространственных сеток, оптимальных методов их использования и разработки новых алгоритмов [3, 4].

Целью настоящей работы является реализация данной возможности и проведение численного моделирования для расчета потерь пучка на элементах ускорителя. Для этого используется программный код ЭРА-DD, расчеты в котором проводятся на квазиструктурированных сетках, адаптирующихся к пучкам и к границе расчетной области, с декомпозицией областей и применением альтернирующего метода Шварца.

1. Источник и его математическая модель. Схема ускорителя электронов “Дуэт” [1] показана на рис. 1. В вакуумной камере на проходном изоляторе закреплен сетчатый плазменный эмиттер, работа которого основана на использовании плазмы дугового разряда низкого давления и который представляет собой полый полуцилиндр из нержавеющей стали с двумя закрепленными на его торцах катодными узлами. Внутренняя поверхность полуцилиндра выполняет функцию общего полого анода для двух катодных узлов. На боковой поверхности плазменного эмиттера имеется эмиссионное окно размером 150×750 мм, перекрытое стабилизирующей границу эмиссионной плазмы эмиссионной сеткой, выполненной из проволоки диаметром $d_r = 0,2$ мм из нержавеющей стали. Квадратные ячейки сетки имеют размеры $0,4 \times 0,4$ мм и располагаются с шагом $0,6 \times 0,6$ мм. Геометрическая прозрачность сетки равна $\alpha \approx 0,4$. Электроны извлекаются из плазмы через ячейки сетки под действием постоянного высокого напряжения (до 200 кВ), обеспечиваемого источником высокого напряжения. Далее электроны ускоряются в промежутке между эмиссионной сеткой плазменного эмиттера и выпускным фольговым окном с размерами 150×750 мм, перекрытым алюминиево-магниевого фольгой толщиной 30 мкм. Проходя через фольгу, электроны выводятся из вакуума в атмосферу. Для уменьшения потерь тока пучка на опорной решетке поверх сетки уложена маска из нержавеющей стали толщиной 200 мкм. В маске

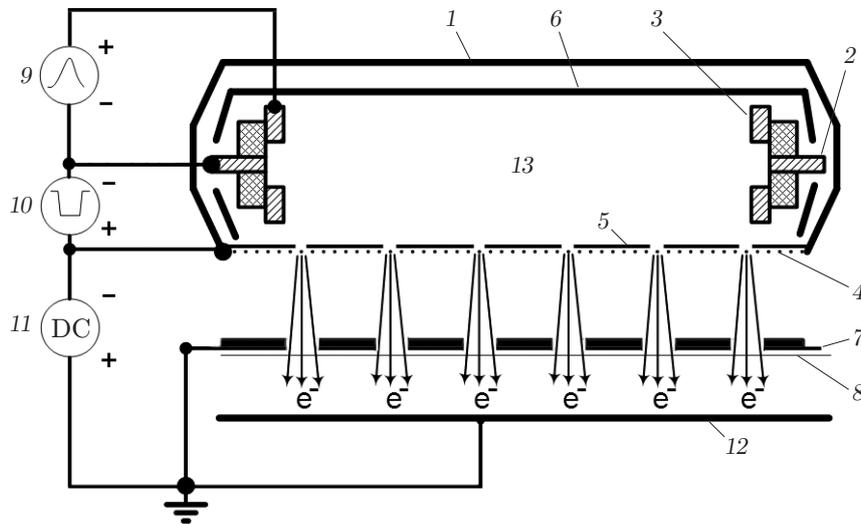


Рис. 1. Схема ускорителя электронов “Дуэт”:

1 — плазменный эмиттер, 2 — катод, 3 — поджигающий электрод, 4 — эмиссионная сетка, 5 — маска, 6 — полый анод, 7 — опорная решетка выпускного фольгового окна, 8 — выводная фольга, 9 — источник питания поджига, 10 — источник питания разряда, 11 — источник высокого напряжения, 12 — коллектор, 13 — плазма дугового разряда

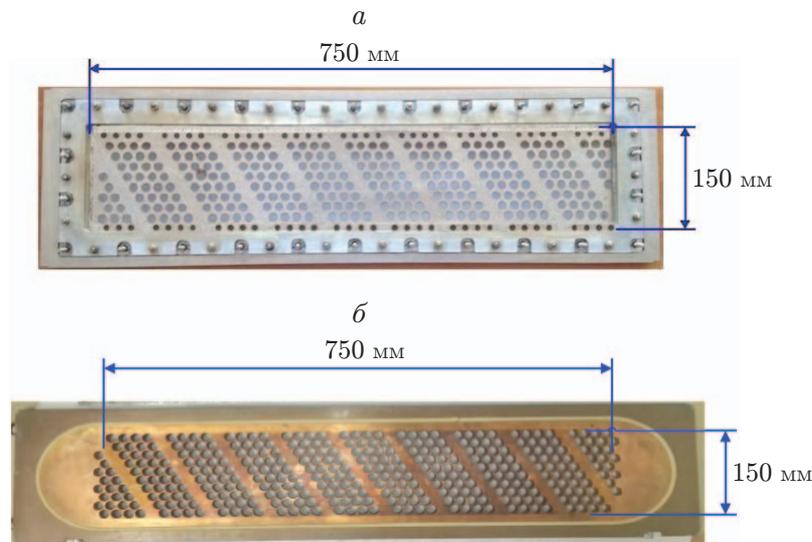


Рис. 2. Катодная маска (а) и опорная решетка (б)

выполнено $N_{op} = 344$ отверстия диаметром $d_c = 12$ мм, которые задают диаметр каждого элементарного пучка. Анод, состоящий из выводной фольги и опорной решетки толщиной 20 мм, находится на расстоянии от катода $d \approx 120 \div 140$ мм и также содержит $N_{op} = 344$ отверстия диаметром $d_a = 15$ мм в решетке, расположенные соосно отверстиям в маске. Таким образом, в диодном зазоре имеются 344 эмиссионные структуры, формирующие элементарные электронные пучки с силой тока $I_1 = I_a/N_{op} \approx 0,145$ А, выпускаемые через фольгу в атмосферу.

Расположение отверстий на маске плазменного катода и опорной анодной решетке показано на рис. 2. Такая конструкция ускорительного узла позволяет приближенно при моделировании рассматривать его в качестве набора периодически расположенных неза-

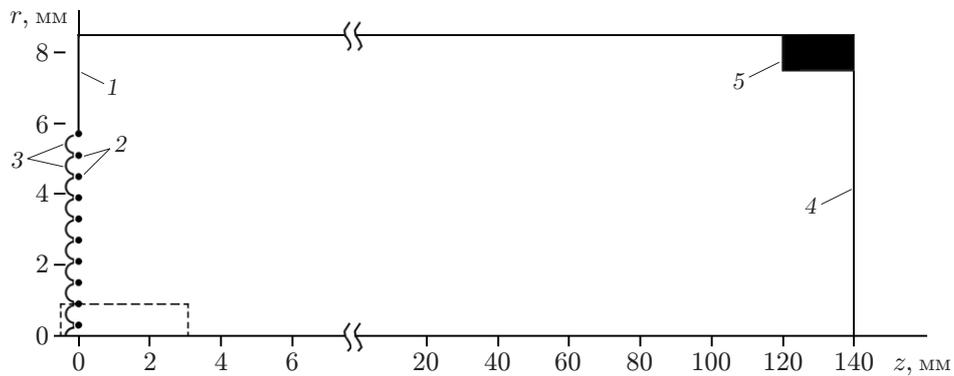


Рис. 3. Геометрия отдельной структуры:

1 — катодная маска, 2 — сетка, 3 — эмиссионная плазма, 4 — анодная фольга, 5 — опорная решетка; штриховая линия — граница приосевой области

висимых структур. Геометрия структуры, используемая далее при моделировании, приведена на рис. 3.

Как указывалось выше, основной проблемой при численном решении самосогласованной задачи для рассматриваемой электронно-оптической системы является существенное различие размеров ее элементов. Даже для отдельной эмиссионной структуры отношение длины ускоряющего промежутка к диаметру проволоки сетки равно $2d/d_r = 1400$. В каждой ячейке сетки необходимо находить форму эмитирующей поверхности плазмы, для каждого элемента которой требуется вычислять плотность эмиссионного тока с выделением особенности пространственного заряда на малом расстоянии от поверхности эмиттера. Наличие этих факторов значительно ухудшает сходимость решения и требует использования очень подробной расчетной сетки в области эмиттера для получения необходимой точности. Поэтому решение полной задачи с использованием доступных кодов для эмиссионной структуры оказывается невозможным вследствие отсутствия адекватных алгоритмов. Сложность проблемы усугубляется трехмерностью геометрии задачи.

Рассматриваемая модель отдельной структуры заключается в следующем. Задача решается в осесимметричном приближении. Центральная ячейка катодной сетки представляет собой круглое отверстие диаметром 0,4 мм, ограниченное проволокой в форме тора. Прилегающие к ней отверстия моделируются кольцевыми щелями, расположенными с шагом 0,6 мм и разделенными проволоками диаметром 0,2 мм. При моделировании их роль второстепенна: они заполняют расчетную область объемным зарядом с “правильным” распределением его в пространстве. Диаметр отверстия в маске равен 12 мм, диаметр моделируемой структуры 17 мм определяется периодичностью размещения отверстий в маске. Потенциал катодных электродов и поверхности плазмы принимается равным нулю: $U = 0$. На боковой цилиндрической поверхности структуры задается граничное условие Неймана для нормальной производной потенциала $dU/dr = 0$. Анод с потенциалом $U_a = 160$ кВ (выбор данного напряжения обусловлен использованием его при работе ускорителя электронов) состоит из выпускной фольги и опорной решетки толщиной 20 мм с отверстием диаметром 15 мм. Из плазмы, созданной генераторами внутри катода (см. рис. 3), эмитируется электронный поток, ускоряемый в диодном промежутке длиной 140 мм.

Равновесная форма поверхности катодной плазмы устанавливается таким образом, чтобы на ней выполнялось условие неразрывности потока электронов, проходящего из плазмы в ускоряющий зазор с начальными скоростями, определяемыми параметрами плазмы. При малых температурах компонентов плазмы $T_e \ll eU_a$, $T_i \ll eU_a$ (e — элементарный заряд) эмиссия электронов определяется законом “трех вторых”, предполагаю-

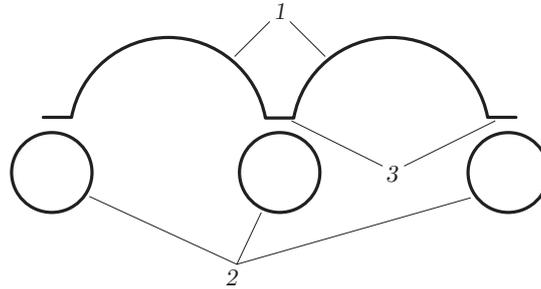


Рис. 4. Граница области плазмы за эмиссионной сеткой:
 1 — поверхность плазмы, 2 — проволоки, 3 — перемычки

шим равенство нулю электрического поля и скорости электронов на поверхности плазмы. В условиях эксперимента сила тока структуры значительно меньше силы тока, определяемой законом “трех вторых” для плоского диода. Это означает, что поверхность плазмы имеет вогнутую форму (см. рис. 3). Предполагается, что в этом случае угловые скорости электронов определяются в основном поперечными электрическими полями на проволоках ячеек сетки и объемным зарядом эмитируемого тока.

Таким образом, в предлагаемой модели для одной эмиссионной структуры (часть эмиссионной сетки, ограниченная отверстием в маске) граница плазмы представляется в виде совокупности катодов, расположенных внутри ячеек мелкоструктурной сетки, перекрывающей эмиссионное окно. В соответствии с [5] границу каждого плазменного катода предлагается искать в виде дуги окружности. Результаты моделирования, выполненного в [2] в приосевом фрагменте структуры (см. рис. 3), подтверждают, что при рассматриваемых условиях равновесная поверхность плазмы достаточно точно описывается дугой окружности в координатах r, z . Для того чтобы выполнялся закон “трех вторых” для эмиссионного тока, определяемого характеристиками плазмы, достаточно найти радиус и положение центра этой окружности. В модели ставится ограничение: дуга должна подходить к проволоке эмиссионной сетки под прямым углом. Параметры катодов находятся из условия, что суммарная расчетная сила тока пучка на выходе из системы равна заданной силе тока.

В процессе решения задачи может возникнуть ситуация, что моделируемая граница плазмы расположена на каком-либо расстоянии от эмиссионной сетки (при высоком ускоряющем напряжении и (или) низкой плотности эмиссионного тока). Тогда отдельные катоды сопрягаются друг с другом через перешеек размером $S < d_r$ (рис. 4). В этом случае эмиссией с перешейка можно пренебречь.

Преимущество предложенной модели состоит в том, что в ней число степеней свободы мало по сравнению с поэлементным представлением свободной плазменной границы, предложенным в [6]. Это позволяет проводить эффективный расчет потерь пучка на элементах ускорителя.

2. Численные алгоритмы. Согласно [7] задача расчета интенсивных пучков заряженных частиц сводится к решению нелинейной самосогласованной задачи, включающей интегрирование уравнений движения заряженных частиц, вычислению распределения объемного заряда и расчету потенциала электрического поля. В настоящей работе исходная задача рассматривается в осесимметричном двумерном приближении в цилиндрических координатах (r, z) . Расчеты проводятся на адаптивной квазиструктурированной сетке, которая строится следующим образом.

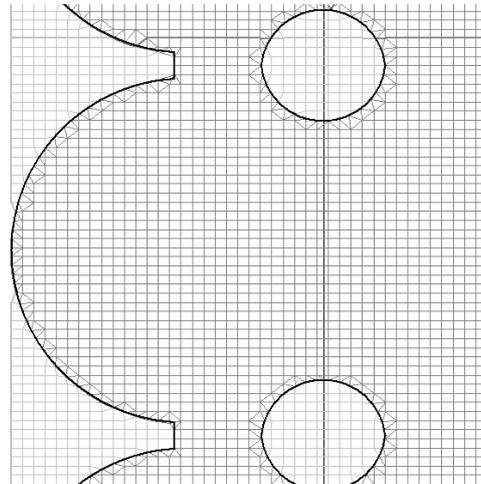


Рис. 5. Фрагмент квазиструктурированной сетки

Опишем вокруг исследуемой области G с границей Γ прямоугольник $Q = D_r \times D_z$ (D_r, D_z заданы). Построим в Q равномерную прямоугольную макросетку Ω_H в виде

$$\Omega_H = \{R_I = IH_r, Z_J = JH_z, I = 0, 1, \dots, N_r, J = 0, 1, \dots, N_z\},$$

где $H_r = D_r/N_r$; $H_z = D_z/N_z$; N_r, N_z — заданные параметры. Таким образом проводится декомпозиция области G на непересекающиеся подобласти $G_{I,J}$, среди которых могут оказаться внешние подобласти, не содержащие точек G . Такие подобласти исключаются из расчетов, во всех остальных подобластях проводятся расчеты. В каждой подобласти $G_{I,J}$ строится своя равномерная прямоугольная подсетка ω_h в виде

$$\omega_h = \{r_i = R_{I-1} + ih_r, z_j = Z_{J-1} + jh_z, i = 0, 1, \dots, n_r, j = 0, 1, \dots, n_z\},$$

где $h_r = (R_I - R_{I-1})/n_r$; $h_z = (Z_J - Z_{J-1})/n_z$; n_r, n_z — заданные параметры. Заметим, что подсетки могут быть несогласованными, т. е. смежные подсетки могут иметь различное число узлов на границе сопряжения подобластей. При объединении данных подсеток образуется результирующая квазиструктурированная сетка Ω_h , на которой ищется решение исходной задачи.

Для того чтобы отследить поведение пучка, вблизи плазменного эмиттера и в области прохождения пучка строятся мелкие подсетки, которые разрежаются к периферии. Регулировка плотности узлов подсеток обеспечивает адаптацию квазиструктурированной сетки Ω_h к пучку.

Подсетки, расположенные вблизи границы (в первую очередь, вблизи проволок, составляющих эмиссионную мелкоструктурную сетку, и вблизи плазменного катода), подвергаются локальной модификации, которая заключается в сдвиге на границу приграничных узлов, расстояние от которых до границы составляет менее половины шага подсетки [8]. Вследствие этого исключается появление некачественных сеточных шаблонов с сильно неравномерными шагами, на которых аппроксимация исходной задачи дает большую погрешность. Локальная модификация обеспечивает адаптацию квазиструктурированной сетки Ω_h к границе области. На рис. 5 показан фрагмент сетки с локальной модификацией узлов вблизи проволоки.

На построенной сетке рассчитываются потенциал электрического поля, траектории движения электронов и вносимый ими объемный заряд. Алгоритмы и технологии проведения данных расчетов изложены в работах [8–11]. Параметры сеток приведены в п. 3 настоящей работы.

Для ослабления влияния разномасштабности задачи расчетная область G разбивалась на подобласти G_1 и G_2 с общей границей γ . В области G_1 происходит формирование и разгон пучка, в области G_2 — его дальнейшее ускорение. Разбиение проводится сечением $z = z_\gamma$, где значение z_γ задается значительно меньшим длины всей системы. Задача решается с помощью итерационного альтернирующего метода Шварца с наложением под областей [12], суть которого состоит в следующем. На границе γ задается потенциал φ_γ , вид которого определяется законом “трех вторых” [13]:

$$\varphi_\gamma = U_a(z_\gamma/L)^{4/3}$$

(U_a — потенциал на аноде; $L = d$ — длина всей системы) и который служит начальным приближением для итерационного процесса. Решается самосогласованная задача в области G_1 , из ее решения рассчитывается потенциал на границе γ' , образованной сечением $z'_\gamma = z_\gamma - \delta z$ ($\delta z \ll z_\gamma$), а также координаты и скорости электронов. С использованием полученных краевых и начальных условий в подобласти $G'_2 = \delta G \cup G_{2/\gamma}$ (δG — подобласть области G , заключенная между границами γ' и γ) решается самосогласованная задача, из решения которой находятся потенциал φ_γ^1 , координаты и скорости электронов на γ . Затем вновь решается самосогласованная задача в области G_1 . Итерации повторяются до достижения сходимости потенциала φ_γ^n на границе γ (n — номер итерации), означающей, что решение задачи получено.

Форма границы плазменной области находится из условия, что расчетная полная сила тока I_Σ со всех катодов должна быть равна заданной силе тока I_e , полученной из физического эксперимента:

$$I_\Sigma - I_e = 0. \quad (1)$$

При этом положение центра плазменных катодов Z_c и длина перешейка S варьируются. Радиус катодов R_c определяется из условия ортогональности катода проволоке. Уравнение (1) решается с помощью метода локальных вариаций: сначала варьируется Z_c , затем — S . Как показывают результаты численных экспериментов, для получения решения уравнения (1) достаточно пяти вариаций.

3. Численные эксперименты. Расчеты в подобластях G_1 , G'_2 проводились на квазиструктурированной сетке со следующими параметрами. Макросетка в G_1 : $N_r = N_z = 9$, макросетка в G'_2 : $N_r = 9$, $N_z = 139$. В обеих подобластях подсетки согласованны по r и несогласованны по z . Распределение подсеток в подобластях в направлении оси z следующее (отсчет проводится снизу вверх и слева направо): в G_1 — 27 подсеток размером 64×64 , 36 — 32×32 , 18 — 16×16 ; в G'_2 — 207 подсеток размером 16×16 , 1044 — 8×8 .

При использовании метода Шварца задавались следующие параметры: $z_\gamma = L/14$, $\delta z = 0,117z_\gamma$.

Плазменный эмиттер моделировался 10 катодами. Приосевой катод разбивался на 10 трубок тока, остальные — на 20 трубок каждый. На каждой вариации плазменного эмиттера проводилось 10 итераций методом Шварца. В качестве начального приближения для вариаций выбиралось такое положение эмиттера, при котором каждый катод моделировался отрезком прямой. Выполнялось пять вариаций. В результате эмиттер был сдвинут влево с образованием перешейка длиной $S = 10^{-3}L$. Результаты расчетов в подобласти G_1 приведены на рис. 6.

Полученные данные о траекториях и электрических полях на правой границе G_1 использовались для решения полной задачи формирования пучка в отдельной структуре плазменного эмиттера. Распределение плотности тока и фазовая плоскость элементарного пучка структуры на анодной фольге показаны на рис. 7. Из рис. 6, 7 следует, что при формировании струй пучка происходят их перефокусировка и частичное перекрытие

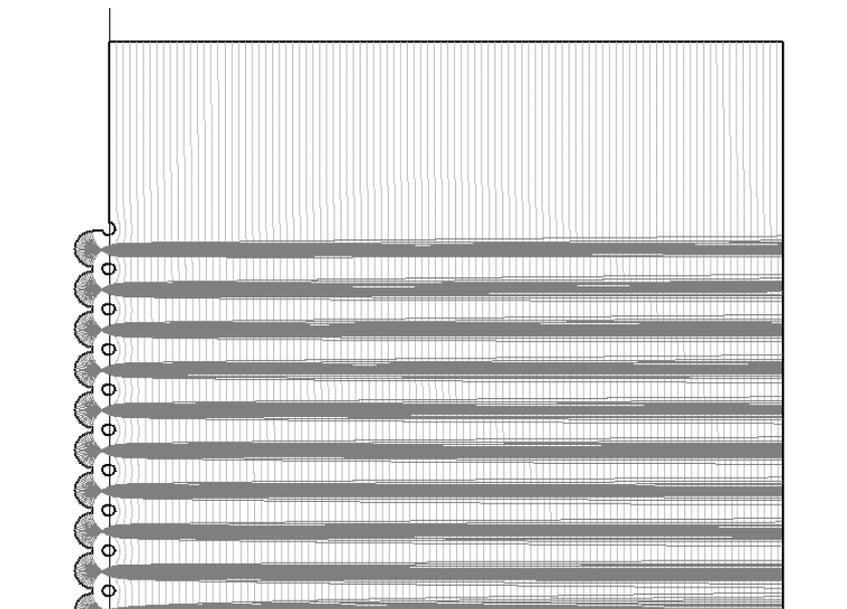


Рис. 6. Электронные пучки и эквипотенциальные линии в подобласти G_1

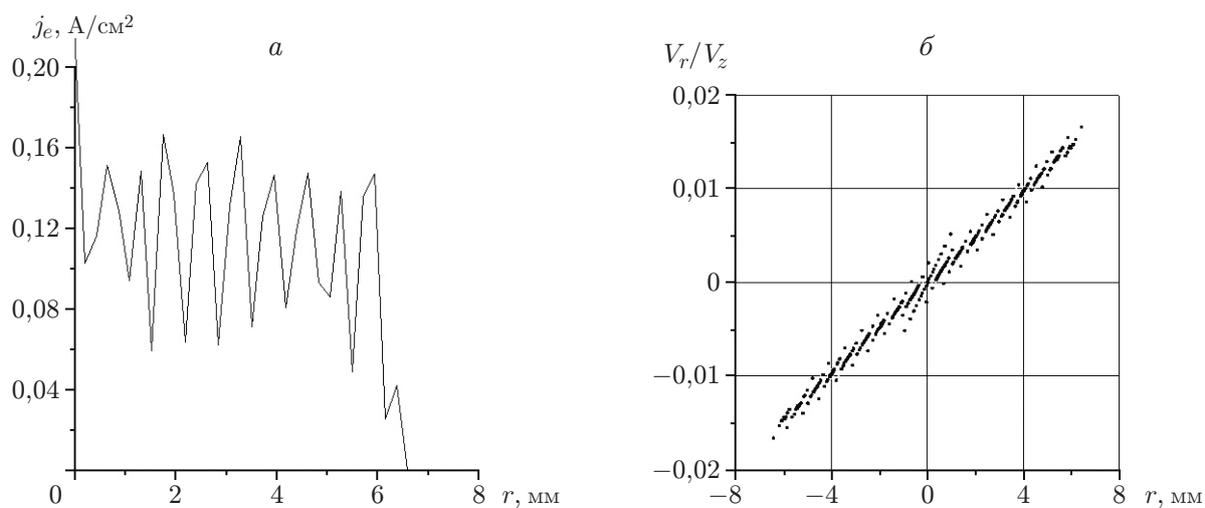


Рис. 7. Распределение плотности электронного тока (*a*) и фазовый портрет пучка (*б*) на фольге

струй из отдельных ячеек за счет угловой расходимости скоростей электронов, возникшей в неоднородных полях вблизи прикатодной сетки. Также наблюдается расширение пучка как целого в поперечном электрическом поле суммарного объемного заряда. Вид фазовой плоскости свидетельствует о том, что основной причиной угловой расходимости и расширения электронного потока структуры являются не прикатодные поля, а поперечное поле объемного заряда пучка. Тем не менее наблюдаемое расширение пучка приблизительно до 13 мм вблизи фольги позволяет ему проходить через отверстия опорной решетки диаметром 15 мм без потерь на ней.

Основным результатом эксперимента для сравнения с результатами моделирования являются потери силы тока пучка при его выводе в атмосферу через фольгу. Для используемой в эксперименте алюминиевой фольги толщиной 30 мкм зависимость наблюдаемых

потерь силы тока пучка от ускоряющего напряжения в диоде в диапазоне $130 \div 200$ кВ соответствует табличным данным и обусловлена поглощением электронов в фольге ($\approx 16\%$ при 150 кВ) и их отражением от поверхности алюминиевого коллектора ($\approx 12\%$). При этом коэффициент отражения не зависит от величины ускоряющего напряжения. Это свидетельствует о том, что в условиях эксперимента потери силы тока на стенках опорной решетки минимальны и обусловлены, вероятно, неидеальностью юстировки отверстий в маске плазменного эмиттера и опорной решетке выводного фольгового окна. При моделировании получено, что потери тока на опорной решетке отсутствуют. Этот результат удовлетворительно согласуется с данными эксперимента и подтверждает возможность использовать код и численную модель для моделирования рассматриваемого источника пучка.

Кроме того, следует учитывать, что моделирование проводилось для регулярных структур, окруженных такими же структурами. Соответственно, влияние искривления эквипотенциальных линий электрического поля и отклонения электронного пучка для периферийных эмиссионных структур также не учитывались.

Заключение. Разработаны новые численные алгоритмы и проведено численное моделирование работы широкоапертурного ускорителя электронного пучка с сетчатым плазменным катодом и выводом генерируемого пучка в атмосферу. Результаты моделирования показывают, что при указанных параметрах электронного пучка при достижении удовлетворительной соосности отверстий в маске и опорной решетке потери энергии и силы тока пучка возможны только в выпускной фольге.

Из расчетов также следует, что данный способ формирования, генерации и вывода электронного пучка в атмосферу в электродной системе ускорителя электронов с сетчатым плазменным катодом эффективен до тех пор, пока граница области эмиссионной плазмы имеет форму, вогнутую в направлении плазменного катода. Вероятно, нарушение сеточной (слоевой) стабилизации приводит не только к увеличению потерь силы тока пучка на ребрах опорной решетки, но и к уменьшению электрической прочности высоковольтного ускоряющего промежутка, а следовательно, уменьшению надежности работы ускорителя в целом. Планируется провести исследование данного предположения с использованием методов численного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев М. С., Коваль Н. Н., Сулакшин С. А. Источник электронов с многоапертурным плазменным эмиттером и выводом пучка в атмосферу // Приборы и техника эксперимента. 2015. № 5. С. 112–120.
2. Astrelin V., Vorobyov M. Numerical model of EOS with large-area plasma cathode with mesh stabilization of the emission plasma boundary // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1115. 022001. DOI: 10.1088/1742-6596/1115/2/022001.
3. Astrelin V. T., Kozyrev A. N., Sveshnikov V. M., Vorobyov M. S. Numerical simulation of EOS with a large-area plasma cathode with mesh stabilization of the emission-plasma boundary // Proc. of the 6th Intern. Congr. on energy fluxes and radiation effects (EFRE2018), Tomsk, 16–22 Sept. 2018. Tomsk: Tomsk politech. univ. publ. house, 2018. P. 37.
4. Беляев Д. О., Козырев А. Н., Свешников В. М. Пакет прикладных программ ЭРА-DD для решения двумерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Информ. технологии. 2010. Т. 8, вып. 1. С. 3–11.
5. Коваль Н. Н. Эмиссионная электроника / Н. Н. Коваль, Е. М. Окс, Ю. С. Протасов, Н. Н. Семашко. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2009.

6. **Sveshnikov V. M., Petrovich O. N., Vshivkova L. V.** Simulation of a moving boundary in plasma electron sources // IEEE Trans. Plasma Sci. 2013. V. 41, iss. 8. Pt 2. P. 2166–2170.
7. **Сыровой В. А.** Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
8. **Козырев А. Н., Свешников В. М.** О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6, № 2. С. 5–21.
9. **Ильин В. П.** Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
10. **Sveshnikov V.** Increased-accuracy numerical modeling of electron-optical systems with space charge // Nuclear Instruments Methods Phys. Res. A. 2011. N 645. P. 307–309.
11. **Козырев А. Н., Свешников В. М.** Численные алгоритмы расчета объемного заряда, создаваемого интенсивными пучками заряженных частиц // Прикл. физика. 2018. № 1. С. 30–35.
12. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
13. **Алямовский И. В.** Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.

*Поступила в редакцию 14/II 2019 г.,
после доработки — 21/III 2019 г.
Принята к публикации 25/III 2019 г.*
