

ние предполагать, что K_{Ic} и соответственно 2γ вдаль от предела хладноломкости металлов существенно завышены.

3. Определенные методами МР запасы прочности крупногабаритных объектов могут оказаться существенно завышенными в сравнении с их фактическими значениями, что может быть причиной непрогнозируемых катастрофических разрушений таких объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойд Дж. Мурей. Практические примеры проектирования конструкций судов // Разрушение.— М.: Машиностроение, 1977.— Т. 5.
2. Адачи Хиро. Методы проектирования артиллерийского оружия // Там же.
3. Юкава С., Тимо Д. П., Рубио А. К расчету на хрупкую прочность вращающихся деталей машин // Там же.
4. Друккер Д. Макроскопические основы теории хрупкого разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1973.— Т. 1.
5. Авербах Б. Л. Некоторые физические аспекты разрушения // Там же.
6. Блом Джозеф И. Хрупкое разрушение и его предотвращение // Разрушение.— М.: Машиностроение, 1977.— Т. 5.
7. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабном критерии при хрупком разрушении конструкций // ДАН СССР.— 1975.— Т. 220, № 3.
8. Иванов А. Г., Минеев В. И. О масштабных эффектах при разрушении // ФГВ.— 1979.— № 5.
9. Вейс В., Юкава С. Критическая оценка механики разрушения // Прикладные вопросы вязкости разрушения.— М.: Мир, 1968.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.
11. Черепанов Г. П. О разрушении трубопроводов // ДАН СССР.— 1983.— Т. 272, № 3.
12. Иванов А. Г. О природе катастрофических разрушений трубопроводов // ДАН СССР.— 1985.— Т. 285, № 2.
13. Браун У., Сроули Дж. Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации.— М.: Мир, 1972.
14. Вессел Э., Кларк У., Прайл У. Расчеты конструкций с крупными сечениями методами механики разрушения // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению.— М.: Мир, 1972.
15. Мюнзе У. Х. Хрупкие разрушения в сварных соединениях // Разрушение.— М.: Машиностроение, 1977.— Т. 4.
16. Уайэтт О., Дью-Хьюз Д. Металлы, керамики, полимеры.— М.: Атомиздат, 1979.
17. Иванов А. Г. Феноменология разрушения и откол // ФГВ.— 1985.— № 2.
18. Степанов Г. В. Корреляция между энергетическими характеристиками разрушения — распространением трещины и отколом // Пробл. прочности.— 1983.— № 3.
19. Канель Г. И. О работе откольного разрушения // ФГВ.— 1982.— № 4.
20. Иванов М. А. Температурная зависимость удельной работы отрыва при отколе для Ст. 3 и меди // ФГВ.— 1979.— № 4.
21. Новиков С. А. Прочность при квазистатическом и ударно-волновом нагружении // ФГВ.— 1985.— № 6.
22. Молодец А. М., Дремин А. И. Непрерывная регистрация скорости свободной поверхности при откольном разрушении железа в области криогенных температур // ФГВ.— 1986.— № 2.
23. Иванов М. А. Температурная зависимость прочности глицерина при отколе // ПМТФ.— 1981.— № 1.
24. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев: Наук. думка, 1977.
25. Тернер К., Радон Дж. Измерение сопротивления развитию трещины на малопрочных конструкционных сталях // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению.— М.: Мир, 1972.

Поступила 22/1 1987 г.

УДК 550.344.43:550.344.56:550.347.34

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ. ЛИНЕЙНЫЙ ИСТОЧНИК

С. З. Дунин, Г. А. Максимов

(Москва)

Поверхностные акустические волны и, в частности, волны Рэлея привлекают внимание исследователей ряда областей науки и техники: сейсмологов, создателей микроэлектронной техники. Это обусловлено специфическими чертами, которыми об-

ладают поверхностные волны. Так, в сейсмологии при измерении волнового поля на больших расстояниях от источника часто наиболее четко регистрируемой его составляющей является поверхностная волна, что обусловлено ее более слабым, чем у объемных волн, затуханием. В микроэлектронике используется то, что поверхностные волны, обладая малой скоростью по сравнению со скоростью распространения электромагнитных волн, а также локализацией в приповерхностном слое, позволяют создавать очень компактные электронные устройства. И в сейсмологии, и микроэлектронике важно знать, как меняются профиль и амплитуда волны по мере ее распространения в среде. Такие изменения могут быть следствием дисперсионно-диссипативных свойств среды. Необходимость принимать эти свойства во внимание становится ясной, если учесть, что в сейсмологии имеют дело с распространением волн на очень большие расстояния, а в микроэлектронике используются очень короткие импульсы. То и другое обуславливает возможность сильного влияния дисперсионно-диссипативных свойств среды на распространение поверхностных волн.

Имеется ряд работ, посвященных изучению влияния неидеальных свойств среды на распространение волн Рэлея [1—4]. Например, в [2] найдено соотношение, связывающее малые поправки к волновому вектору монохроматической волны Рэлея с аналогичными поправками к волновым векторам продольной и поперечной объемных волн. В [3] проведен численный расчет профиля волны Рэлея, возбуждаемой ударом о поверхность. Дисперсионно-диссипативные свойства среды учитывались линейной зависимостью от частоты мнимой части волновых векторов продольной и поперечной волн. В [4] отмечалось, что при попытках учесть влияние дисперсионно-диссипативных свойств среды на эволюцию волнового поля в полупространстве с использованием математического аппарата, разработанного для упругой среды, возникают значительные трудности. Последовательный метод расчета волновых полей в дисперсионно-диссипативных средах впервые предложен в [1]. Он позволяет обойти указанные трудности и дать ответ на ряд практически интересных вопросов: при каких условиях дисперсионно-диссипативные свойства среды оказывают существенное влияние на распространение волны Рэлея? Как при этом меняются ее профиль и амплитуда? Какова роль таких параметров монохроматического источника, как его заглубление и время излучения, а также свойств среды, как дисперсия и время релаксации?

Постановка задачи и основные соотношения. В однородном изотропном полупространстве, занимаемом линейной неупругой средой с уравнением состояния наследственного типа общего вида

$$(1) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t M(t-t') \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t') dt' + \delta_{ij} \int_0^t L(t-t') \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t') dt',$$

на глубине h параллельно поверхности расположен линейный источник, излучающий продольные волны с функцией источника $Q_u(t)$. Поверхность S полупространства считалась свободной, т. е. $\sigma_{ij}n_j/S = 0$ (\mathbf{n} — вектор нормали к поверхности), и при $t < 0$ полупространство покоилось. Уравнение (1) совместно с уравнением движения и соотношением между тензором деформации ε_{ij} и смещениями u_i в линейном приближении $\rho_0 \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$, $\varepsilon_{ik} = \partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i$ образуют замкнутую систему для определения поля смещений в полупространстве.

Введем скалярный A^0 и векторный \mathbf{A} потенциалы $\text{grad } A^0 = \mathbf{u}_1$, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{u}_2$ ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$). Для лапласовских по времени образов $A^0(\mathbf{r}, p)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, p)$ получим систему

$$(2) \quad [\Delta - K_1^2(p)] A^0(\mathbf{r}, p) = -Q_u(p) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{r})),$$

$$K_1^2(p) = \rho_0 p^2 / [2(M(p) + L(p))],$$

$$[\Delta - K_2^2(p)] \mathbf{A}(\mathbf{r}, p) = 0, \quad \sigma_{ij}(A^0, \mathbf{A}) n_j | S = 0,$$

$$A^0(\mathbf{r} \rightarrow \infty, p) = \mathbf{A}(\mathbf{r} \rightarrow \infty, p) = 0, \quad K_2^2(p) = \rho_0 p^2 / M(p).$$

Здесь начальные условия нулевые; $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ — координаты линейного источника. Обозначим через A_0^α решение системы при $Q_u(p)$. Заметим, что в силу однородности граничных условий по $M(p)$ и $L(p)$ решение A_0^α будет зависеть только от параметров $K_1(p)$ и $K_2(p)$: $A_0^\alpha(\mathbf{r}, p) = A_0^\alpha(\mathbf{r}, K_1(p), K_2(p))$. В частном случае упругой среды, для которой $K_1(p) = p/c_l$, $K_2(p) = p/c_s$ (c_l и c_s — скорость продольной и поперечной волн), решение A_0^α имеет вид $A_{00}^\alpha = A_0^\alpha(\mathbf{r}, p/c_l, p/c_s)$. Решение системы (2) при $Q_u(p) \neq 1$ отличается от A_0^α на множитель $Q_u(p)$: $A^\alpha(\mathbf{r}, p) = Q_u(p) A_0^\alpha(\mathbf{r}, K_1(p), K_2(p))$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Поле смещений теперь может быть найдено дифференциро-

ванием по пространственным координатам $u_i = \partial A^0 / \partial x_i + \varepsilon_{ijk} \partial A^k / \partial x_j$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, p) = Q_u(p) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, K_1(p), K_2(p))$ ($\tilde{\mathbf{G}}$ — функция Грина поля смещений). Пространственно-временное представление волнового поля смещений дается интегралом Меллина

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp e^{pt} Q_u(p) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, K_1(p), K_2(p)), \quad \gamma = (-i\infty; +i\infty).$$

Если имеется пропорциональность между изображениями ядер $M(p)$ и $L(p)$, так что $K_1(p)/K_2(p) = \text{const}$, то можно преобразовать этот интеграл, используя теорему Эфроса об обобщенной свертке [1, 5]:

$$(3) \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' Q_u(t') \int_0^{\infty} d\zeta \mathbf{G}(\mathbf{r}, \zeta) I(t-t', c_s \zeta),$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp e^{pt} \mathbf{G}\left(\mathbf{r}, \frac{p}{c_l}, \frac{p}{c_s}\right)$ — пространственно-временное представление функции Грина поля смещений в упругой среде;

$$(4) \quad I(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \exp\{pt - xK_2(p)\}$$

— фактор, учитывающий дисперсионно-диссипативные свойства среды.

Волны Рэлея в упругой среде. Для упругой среды функция Грина рассматриваемой задачи известна [3, 6]. Будем интересоваться только смещением поверхности. В этом случае функция Грина смещения поверхности G может быть представлена в виде

$$(5) \quad \mathbf{G}(x, h, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dp e^{pt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikh} \mathbf{G}(k, h, p).$$

Здесь $\mathbf{G}(k, h, p) = \{G_z(k, h, p); G_x(k, h, p)\}$; $G_z(k, h, p) = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{p^2}{c_s^2} \left(\frac{p^2}{c_s^2} + 2k^2 \right)}{D\left(\frac{p^2}{c_l^2}, \frac{p^2}{c_s^2}, k^2\right)} \times$

$\times \exp\left\{-h \sqrt{k^2 + \frac{p^2}{c_l^2}}\right\}$; $G_x(k, h, p) = \frac{1}{4\pi} \frac{2k \frac{p^2}{c_s^2} \sqrt{k^2 + \frac{p^2}{c_s^2}}}{D\left(\frac{p^2}{c_l^2}, \frac{p^2}{c_s^2}, k^2\right)} \exp\left\{-h \sqrt{k^2 + \frac{p^2}{c_l^2}}\right\}$;

$$D\left(\frac{p^2}{c_l^2}, \frac{p^2}{c_s^2}, k^2\right) = \left(\frac{p^2}{c_s^2} + 2k^2\right)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 + \frac{p^2}{c_l^2}} \sqrt{k^2 + \frac{p^2}{c_s^2}}.$$

Интересуясь той частью смещения поверхности, которая обусловлена волной Рэлея и определяется корнями дисперсионного уравнения $D(p^2/c_l^2, p^2/c_s^2, k^2) = 0$, учтем, что это уравнение имеет два корня: $k = \pm ip/c_R$ (c_R — скорость распространения волны Рэлея, $c_R < c_s$). Вклад в (5) от полюсов, соответствующих указанным корням, приводит к следующему представлению части смещения поверхности $\hat{\mathbf{G}}^R$, соответствующей волне Рэлея:

$$(6) \quad G_z^R(x, h, t) = A_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1}{(t-x/c_R)^2 + h_1^2} + \frac{h_1}{(t+x/c_R)^2 + h_1^2} \right),$$

где $G_x^R(x, h, t) = A_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(t-x/c_R)}{(t-x/c_R)^2 + h_1^2} - \frac{(t+x/c_R)}{(t+x/c_R)^2 + h_1^2} \right)$;

$$A_z = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{c_R^2}{c_s^2} \frac{1}{D^R} \left[\frac{2}{c_R^2} - \frac{1}{c_s^2} \right]; \quad A_x = \frac{1}{8\pi^2} \frac{c_R^2}{c_s^2} \frac{1}{D^R} \left[\frac{2}{c_R} \left(\frac{1}{c_l^2} - \frac{1}{c_s^2} \right)^{1/2} \right];$$

$$h_1 = h \sqrt{\frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{c_l^2}}; \quad D^R = \left(\frac{\partial}{\partial k^2} D \left(\frac{p^2}{c_l^2}, \frac{p^2}{c_s^2}, k^2 \right) \right) \Big|_{\substack{p^2=1, \\ k^2=-1/c_R^2}}.$$

Выражения (6) не являются причинными, в то время как полное волновое поле, определяемое (5), причинно и распространяется со скоростью c_l . Объяснение этого факта имеется в [7] и связано с тем, что в области расстояний $R = \sqrt{x^2 + h^2} > c_l t$ вклад от рэлеевских полюсов в полное поле смещений полностью компенсируется вкладами от других особенностей подынтегрального выражения в (5). Для обеспечения причинности выражений умножим их на обрезающий фактор $\theta(t - (\sqrt{x^2 + h^2})/c_l)$, где $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$ Такое уточнение дает возможность просто проанализировать процесс формирования волны Рэля. В частности, волну Рэля можно считать сформированной, если выполняется условие $x/c_R - mh_1 \geq (\sqrt{x^2 + h^2})/c_l$, которое означает, что временной интервал между фронтом волны и ее центром, движущимся со скоростью c_R , не меньше, чем m характерных временных масштабов волны h_1 . Это условие приводится к виду

$$(7) \quad x \geq \frac{c_R h}{\sqrt{c_l^2 - c_R^2}} \left[\sqrt{1 + m^2} + m \frac{c_l}{c_R} \right],$$

из которого при $m = 0$ получается известное условие Накано [3], последнее можно интерпретировать как расстояния, на которых формируется половина волны Рэля. Эта оценка необходима для ограничения области, где будут справедливы результаты, получаемые ниже для сформированных волн Рэля, определяемых выражениями (6). Выражения (6) показывают, что в идеально упругой среде характерный период волны Рэля определяется глубиной источника h . В частности, если источник поверхностный, т. е. $h = 0$, то вертикальная компонента смещения имеет вид

$$(8) \quad G_z^R(x, h = 0, t) = \pi A_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \left(t - \frac{x}{c_R} \right) + \delta \left(t + \frac{x}{c_R} \right) \right),$$

так что ее период и длина формирования равны нулю. На расстояниях, превышающих длину формирования, волны Рэля, движущиеся вправо и влево, хорошо разделены, так что в дальнейшем можно рассматривать только волну, распространяющуюся вправо, которая определяется выражениями

$$(9) \quad G_z^R(x, h, t) = A_z \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_1}{(t - x/c_R)^2 + h_1^2},$$

$$G_x^R(x, h, t) = A_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{(t - x/c_R)}{(t - x/c_R)^2 + h_1^2}.$$

Волны Рэля в дисперсионно-диссипативной среде. Выражение (3) связывает волну Рэля в неупругой среде с волной Рэля в упругой среде через ее свертку с ядром $I(t, x)$, поэтому требуется знание явного вида фактора $I(t, x)$. В приложении показано, что он имеет асимптотическое представление

$$(10) \quad I_1^R(t, x) = l \sqrt{\frac{f}{x}} \exp \left\{ -\frac{f}{x} \left(t - \frac{x}{gc_{s\infty}} \right)^2 \right\},$$

справедливое в области значений $x \gg c_{s\infty} \tau$, где $c_{s\infty}$ — скорость звука поперечных волн в дисперсионно-диссипативной среде в высокочастотном пределе $\omega \rightarrow \infty$, а τ — характерное время релаксации среды.

После подстановки в (3) выражений (9) и (10) его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{G}_z^R \\ \tilde{G}_x^R \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} A_z \\ A_x \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty d\zeta l \sqrt{\frac{f}{\zeta c_{s\infty}}} \exp \left\{ \frac{f}{\zeta c_{s\infty}} \left(t - \frac{\zeta}{g} \right)^2 \right\} * \frac{1}{2} \left[\left(\zeta - \frac{x}{c_R} - ih_1 \right)^{-1} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \left(\zeta - \frac{x}{c_R} + ih_1 \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл [8], получим

$$\begin{aligned} (11) \quad \begin{Bmatrix} \tilde{G}_z^R \\ \tilde{G}_x^R \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} A_z \\ A_x \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi l}{2} \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} \left[\left(\frac{x}{c_R} + ih_1 \right) \exp \left\{ -\frac{f}{c_{s\infty}} \frac{\left(t - \frac{x}{gc_R} + i \frac{h_1}{g} \right)^2}{\left(x/c_R + ih_1 \right)} \right\} * \right. \\ &\quad \left. * \operatorname{erf} c \left\{ i \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty} (x/c_R + ih_1)}} \left(t - \frac{x/c_R + ih_1}{g} \right) \right\} \pm \text{к. с.} \right] \\ &\quad \left(\operatorname{erf} c(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt \exp(-t^2) \right). \end{aligned}$$

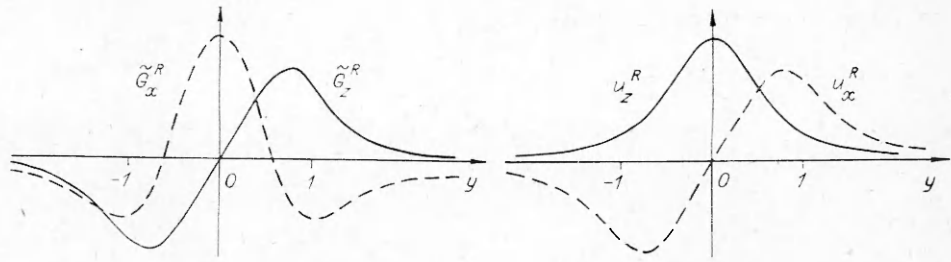
Если выполняется условие $x \ll \frac{fc_R}{c_{s\infty}} \left[\left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right]$, то можно воспользоваться асимптотическим представлением при больших z интеграла вероятности $\operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \exp(-z^2)$, что приводит с точностью до $l\sqrt{\pi}$ к (9). Таким образом, при выполнении указанного условия фактор $I(t, x)$ эффективно представляет собой дельта-функцию по отношению к G^R . Если же выполняется условие $x \gg \frac{fc_R}{c_{s\infty}} \left[\left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right]$, то в (11) функцию $\operatorname{erf} c(z)$ можно разложить при малых значениях аргумента $\operatorname{erf} c(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z + \dots$. Отметим, что для вычисления \tilde{G}_z^R достаточно первого члена разложения, а для \tilde{G}_x^R необходимо учесть и второй член разложения. Далее, в соответствии с (7), пренебрегая, где это возможно, $h_1 c_R$ по сравнению с x , находим окончательное выражение

$$(12) \quad \begin{Bmatrix} \tilde{G}_z^R \\ \tilde{G}_x^R \end{Bmatrix} = \frac{\pi l}{2} \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} A_z \frac{2}{\sqrt{x}} \\ A_x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{s\infty}}{f} \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} \exp \left\{ -\frac{fc_R}{xc_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\},$$

из которого следует, что на расстояниях $x \gg g^2 c_{s\infty} c_R / f$ компоненты вектора \tilde{G}^R имеют достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} (13) \quad \tilde{G}_z^R &= \sqrt{\pi} l \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} A_z \frac{2fc_R}{x^{3/2} c_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right) \exp \left\{ -\frac{fc_R}{xc_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\}, \\ \tilde{G}_x^R &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} A_x \frac{2}{gc_R x} \left[1 - \frac{2fc_R}{gxc_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{fc_R}{xc_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Графики функций \tilde{G}_z^R и \tilde{G}_x^R показаны на рис. 1 в зависимости от параметра $y = -\sqrt{\frac{fc_R}{xc_{s\infty}}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)$, что соответствует переходу в сопровождающую систему координат, движущуюся со скоростью gc_R . Из (13) также вытекает, что амплитуда \tilde{G}^R затухает с расстоянием по закону x^{-1} , а ее характерная ширина растет пропорционально $x^{1/2}$.



Р и с. 1

Р и с. 2

Выражение для вертикальной компоненты \tilde{G}_z^R можно получить более простым способом, учитывая, что при $x \gg \frac{c_R}{c_{s\infty}} \frac{h_1^2}{g^2} f$ источник можно рассматривать как поверхностный с функцией Грина (8), что сразу приводит к выражению $\tilde{G}_z^R = \pi A_z \frac{\partial}{\partial x} \left[I\left(t, x \frac{c_{s\infty}}{c_R}\right) + I\left(t, -x \frac{c_{s\infty}}{c_R}\right) \right]$, откуда для волны, распространяющейся вправо, при учете (10) следует представление (12).

Асимптотики скорости и смещения в волне Рэля. Смещение поверхности в волне Рэля выражается через ее функцию Грина \tilde{G}^R согласно (3), а скорость — в виде

$$(14) \quad \mathbf{v}^R(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' Q_v(t') \tilde{\mathbf{G}}^R(\mathbf{r}, t - t'),$$

где $Q_v(t)$ — функция источника для скорости: $Q_v(t) = \frac{d}{dt} Q_u(t)$. Функция линейного источника $Q_u(t)$ связана со смещением $u(r_0, t) = U_0 F(t)$, задаваемым на поверхности соответствующего цилиндрического источника радиуса r_0 , предельным переходом $r_0 \rightarrow 0$, $U_0 \rightarrow \infty$, $r_0 U_0 = \text{const}$, так что $Q_u(t) = 2\pi r_0 U_0 F(t)$.

Рассмотрим случай, часто встречающийся на практике, когда $Q_v(t)$ имеет вид одиночного импульса с характерным временем излучения T_0 . Тогда при $x \gg \frac{c_R}{c_{s\infty}} f \left(T_0^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right)$ функцию $\tilde{\mathbf{G}}^R(\mathbf{r}, t)$ можно в выражении (14) вынести за знак интеграла в точке максимума функции $Q_v(t)$, которую для простоты примем равной нулю:

$$(15) \quad \mathbf{v}^R(x, t) = \tilde{\mathbf{G}}^R(x, t) \int_0^t dt' Q_v(t').$$

Выражение (15) показывает, что в области далеких расстояний

$$(16) \quad x \gg \max \left\{ \frac{c_R h}{\sqrt{c_l^2 - c_R^2}}; c_{s\infty} \tau; \frac{c_R}{c_{s\infty}} f \left(T_0^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right) \right\},$$

которые с учетом всех использованных ограничений определяются диссипативными свойствами среды и такими параметрами источника, как время излучения и глубина заложения, профиль массовой скорости в волне Рэля имеет универсальную для данной геометрии задачи структуру (см. рис. 1), не зависящую от конкретного вида $Q_v(t)$. При этом амплитуда скорости убывает с расстоянием по закону x^{-1} , а характерная ширина импульса равна $\sqrt{c_{s\infty} x / c_R f}$.

Заметим, что при условии $x \gg g^2 c_{s\infty} c_R / f$ имеет место приближенное соотношение $\frac{\partial}{\partial x} I(t, x) = \frac{-1}{g c_R} \frac{\partial}{\partial t} I(t, x)$, используя которое, выражения

для скорости и смещения представим как

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^R(x, t) \\ \mathbf{v}^R(x, t) \end{cases} = \mathbf{B} \int_0^\infty dt' \begin{cases} Q_v(t') \\ \dot{Q}_v(t') \end{cases} \exp \left\{ -\frac{fc_R}{xc_{s\infty}} \left(t - t' - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\},$$

$$\mathbf{B} = \pi l \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} \begin{cases} \frac{A_z}{gc_R} \omega^{-1/2} \\ -\frac{A_x c_{s\infty}}{\sqrt{\pi} f} \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}.$$

Из (17) следует, что на далеких расстояниях (16) профили компонент смещения имеют вид, показанный на рис. 2, а их амплитуда затухает с расстоянием по закону $x^{-1/2}$. Из (17) также вытекает, что если у Q_v характерное время нарастания сигнала T_1 (оно определяет ширину $\dot{Q}_v(t)$) мало по сравнению с временем излучения T_0 , то в области промежуточных расстояний $\max \left\{ \frac{c_R h}{\sqrt{c_l^2 - c_R^2}}; c_{s\infty} \tau; \frac{c_{\tilde{n}}}{c_{s\infty}} f \left(T_1^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right) \right\} \ll x \ll \frac{c_R}{c_{s\infty}} f T_0^2$ компоненты скорости и смещения даются выражениями

$$\begin{cases} v_z^R(x, t) \\ v_x^R(x, t) \end{cases} = \pi l \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} Q_v(t) \begin{cases} \frac{A_z}{gc_R} \omega^{-1/2} \\ -\frac{A_x c_{s\infty}}{\sqrt{\pi} f x} 2 \left(t - \frac{x}{gc_R} \right) \end{cases} * \exp \left\{ -\frac{f c_R}{x c_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\},$$

$$\begin{cases} u_z^R(x, t) \\ u_x^R(x, t) \end{cases} = \pi l \sqrt{\frac{f}{c_{s\infty}}} Q_v(t) \begin{cases} \frac{A_z}{gc_R} \operatorname{erf} \left\{ -\sqrt{\frac{fc_R}{xc_{s\infty}}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right) \right\} \\ -\frac{A_x c_{s\infty}}{\sqrt{\pi} f} \exp \left\{ -\frac{fc_R}{xc_{s\infty}} \left(t - \frac{x}{gc_R} \right)^2 \right\} \end{cases}.$$

Здесь $Q_v(t)$ задает только амплитуду, и поэтому, в частности, профили компонент скорости имеют вид, показанный на рис. 2, а их амплитуда затухает по закону $x^{-1/2}$.

Оценки области асимптотического поведения волны Рэлея. Соотношение (16) определяет область далеких расстояний, удовлетворяющих условиям: волну Рэлея можно считать сформированной (7); диссипативный фактор $I(t, x)$ имеет вид (10) ($x \gg c_{s\infty} \tau$); профиль волны Рэлея под действием диссипативных свойств среды приобрел универсальный вид (15) ($x \gg f \frac{c_R}{c_{s\infty}} \left(T_0^2 + \frac{h_1^2}{g^2} \right)$).

Приведем некоторые оценки, показывающие роль различных параметров источника и среды. В сейсмологии встречаются источники с $T_0 \sim 0,1$ с. Полагая, что такой источник находится в среде из влажного суглинка карбонатного, для которого по данным [9] ($\tau \sim 10^{-5}$ с, $c_s \sim 0,26$ км/с, $a = c_{s0}^2/c_{s\infty}^2 \sim 0,92$) найдем, используя выражение (П.6) для обобщенной релаксационной среды (стандартного тела), что $f \sim 10^7$ км/с². При этом условии (16) сведется к $x \gg 2 \cdot 10^4 h^2 + 2 \cdot 10^2$, где x и h выражены в километрах. Видно, что область асимптотического поведения волны Рэлея определяется при $h > 100$ м заглублением источника h , а при $h < 100$ м — временем излучения T_0 . В последнем случае асимптотическое поведение наступает при $x \gg 200$ км. В микроэлектронике широко используется LiNbO₃. Для него по данным [10] ($\tau \sim 10^{-11}$ с — время тепловой релаксации, $c_s \sim 4$ км/с, $a \sim 0,94$) по формуле (П.6) найдем $f \sim 10^{13}$ км/с. Откуда для поверхностного источника с $T_0 \sim 5 \cdot 10^9$ с асимптотическое поведение волны Рэлея будет наблюдаться на расстояниях $x \gg 0,4$ мм, что сопоставимо с размерами микроэлектронных устройств и поэтому должно учитываться.

Приведенные примеры показывают, что для правильной интерпретации информации, переносимой немонахроматической волной Рэлея в дисперсионно-диссипативной среде, важно знать, вышла или нет волна Рэлея на свою асимптотику, что определяется параметрами источника и среды.

Итак, используя подход, основанный на представлении решения в форме (3), когда разделены факторы, ответственные за геометрию задачи и за дисперсионно-диссипативные свойства среды, удалось последовательно проанализировать распространение волны Рэлея в неидеальной среде и ответить на вопросы, поставленные в начале статьи.

Приложение: свойства фактора $I(t, x)$. Из представления (4) следует, что свойства $I(t, x)$ определяются видом зависимости $K_2(p)$. Введем обозначение $K_2^2(p) = \rho_0 p^2 / M(p) \equiv p^2 / \kappa(p)$.

Все разнообразие дисперсионно-диссипативных свойств геосред, определяемых ядром релаксации $M(p)$ или $\kappa(p)$, может быть описано феноменологически в терминах спектра времен экспоненциальной релаксации. Общий вид ядра релаксации в этом случае

$$(П.1) \quad \kappa(t) = c_\infty^2 \delta(t) - \Lambda \int_0^\infty g(\tau) \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} d\tau,$$

где первое слагаемое отвечает упругой части ядра релаксации, второе — неупругой. Функция $g(\tau)$ — спектр времен релаксации со свойствами: $\int_0^\infty g(\tau) d\tau = 1$, $g(\tau) \geq 0$, $g(\tau = 0) = 0$, последнее вытекает из того, что вклад от $\tau = 0$, соответствующий идеальной упругости, уже выделен; Λ — нормировочная константа. Спектр времен релаксации может быть найден экспериментально или из физических соображений. Из (П.1) следует

$$(П.2) \quad \kappa(p) = c_\infty^2 - \Lambda \int_0^\infty \frac{g(\tau)}{p + 1/\tau} d\tau.$$

Отметим некоторые свойства изображения $\kappa(p)$, не зависящие от конкретного вида спектра $g(\tau)$. Из принципа причинности вытекает, что $K_2(p)$ — аналитическая функция в области $\text{Re } p \geq 0$, а из (П.2), что $\kappa(p)$ монотонно возрастает при действительных $p > 0$. Это приводит к тому, что $I(t, x) = 0$ для $x > c_\infty t$. Отметим, что фактор $I(t, x)$ в сущности есть функция Грина одномерной плоской задачи для безграничной дисперсионно-диссипативной среды, так что можно говорить о скорости распространения возмущения. Минимальная скорость находится из выражения

$$c_0^2 = \lim_{p \rightarrow 0} \kappa(p) = c_\infty^2 - \Lambda \int_0^\infty g(\tau) \tau d\tau.$$

При $p \rightarrow \infty$ получим максимально возможную скорость распространения возмущения $c_\infty^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \kappa(p)$. В окрестности фронта $x = c_\infty t$ структура $I(t, x)$ определяется разложением (при $p \rightarrow \infty$) $K_2(p) = p/c_\infty + b_0 - b_1/p + \dots$ и имеет вид [11]

$$(П.3) \quad I(t, x) = \exp\{-b_0 x\} \left[\delta\left(t - \frac{x}{c_\infty}\right) - \left(\frac{b_1 x}{t - x/c_\infty}\right)^{1/2} * \right. \\ \left. * I_1\left(2\sqrt{b_1 x(t - x/c_\infty)}\right) \theta(t - x/c_\infty)\right],$$

где $I_1(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Разложение (при $p \rightarrow 0$) $K_2(p) = p/c_0 - a_0 p^2 + \dots$ определяет структуру $I(t, x)$ в окрестности точки, движущейся со скоростью c_0 :

$$(П.4) \quad I(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a_0 x}} \exp\left\{-\frac{(t - x/c_0)^2}{2a_0 x}\right\}.$$

Из (П.3) и (П.4) следует, что в окрестности фронта $x = c_\infty t$ имеется экспоненциально затухающий с расстоянием упругий предвестник, за которым распространяется часть импульса, затухающая слабее и асимптотически описываемая выражением (П.4). Для определения поведения $I(t, x)$ за фронтом он был вычислен методом перевала для некоторых конкретных спектров времен релаксации $g(\tau)$ [12]. Так, $g(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$ соответствует обобщенной релаксационной среде (стандартному телу). Среда Фойгта получается из предыдущей предельным переходом $\tau_1 \rightarrow 0$, $c_\infty \rightarrow \infty$, $\tau_1 c_\infty^2 / c_0^2 \rightarrow \tau'$. Была рассмотрена и среда Гуревича. Для первых двух случаев показана единственность перевальной точки, для среды Гуревича аналогичный результат получен при действительных p . Во всех случаях перевальная точка лежит на действительной оси и перевальный контур проходит перпендикулярно последней. Применимость метода перевала определяется условием $x/(c_\infty \tau) \gg 1$ (τ — характерное для выбранной модели время релаксации). Это же условие позволяет представить $I(t, x)$ в виде

$$(П.5) \quad I(t, x) = l \sqrt{\frac{f}{x}} \exp\left\{-\frac{f}{x} \left(t - \frac{x}{g c_\infty}\right)^2\right\},$$

где $l = 1/(2\sqrt{\pi})$, а параметры f и g следующие:

для среды Фойгта $f = 2c_0/\tau'$, $g = 1$;

для обобщенной релаксационной среды

$$(П.6) \quad f = 2 \frac{c_\infty}{\tau_1} \frac{a^{3/2}}{1-a}, \quad g = a^{1/2}, \quad a = \frac{c_0^2}{c_\infty^2};$$

для среды Гуревича

$$f = 2 \frac{c_\infty}{\tau} \frac{1}{A} \frac{a'}{1-a'} (1 - A \ln a')^{1/2}, \quad g = (1 - A \ln a')^{-1/2}.$$

Здесь A — отношение упругого модуля сдвига к релаксационному; a' — отношение минимального времени релаксации к максимальному.

Сравнение (П.5) с (П.4) показывает, что на расстояниях $x \gg c_\infty \tau$ максимум $I(t, x)$ перемещается со скоростью c_0 и определяется разложением $K_2(p)$ в окрестности точки $p = 0$. Отметим, что при $\tau \rightarrow 0$ для представления (П.5) существует предельный переход к случаю идеально упругой среды $I(t, x) = \delta(t - x/c_\infty)$, поскольку $f \sim \tau^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шемякин Е. И. Задачи Ламба для среды с упругим последствием // ДАН СССР.— 1955.— Т. 104, вып. 2.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.— М.: Наука, 1981.
3. Tsai Y. N., Kolsky H. Surface wave propagation for linear viscoelastic // J. Mech. Phys. Solids.— 1968.— V. 16, N 2.
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: теория и методы.— М.: Мир, 1983.— Т. 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
6. Онисько Н. И., Шемякин Е. И. Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве // ПМТФ.— 1961.— № 4.
7. Phinney R. A. Leaking modes in crustal waveguide. Part 1. The oceanic PL wave // J. Geophys. Res.— 1961.— V. 66.— P. 1445.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.— М.: Наука, 1981.
9. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Г., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред.— М.: Недра, 1970.
10. Поверхностные акустические волны. Проблемы прикладной физики/Под ред. А. Олинера.— М.: Мир, 1981.
11. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // УФН.— 1976.— Т. 118, вып. 2.
12. Дуний С. З., Максимов Г. А. Акустические волны в диссипативных средах.— М., 1985.— (Препринт/МИФИ; 039—85).

Поступила 16 /III 1987 г.