

## СТАЦИОНАРНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПЛАМЕНИ С КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДОЙ ЯЧЕЕК

С. С. Минаев, В. С. Бабкин  
(Новосибирск)

Изучение стационарных ячеистых пламен с конечной амплитудой ячеек представляет собой обобщение исследований устойчивости пламени в линейном приближении, получающееся при решении задачи в приближении более высокого порядка. По-видимому, большинство ячеистых структур, наблюдаемых как на плоских, так и на сферических пламенах, есть результат диффузионно-тепловой неустойчивости пламени [1—3]. Такие структуры обычно появляются в богатых смесях углеводородов с размерами ячеек порядка толщины пламени. Стимулом к проведению данной работы были экспериментальные результаты по ячеистым структурам с характерными размерами ячеек, намного превышающими толщину пламени [4—6].

Стационарное существование таких ячеистых структур можно рассматривать как результат нелинейного гидродинамического взаимодействия пламени с полем течения газа. Согласно гидродинамической теории устойчивости, наиболее быстро растут коротковолновые возмущения. Но для них искривления фронта пламени вызывают изменения структуры фронта и скорости его распространения по горючей смеси. Этот эффект, связанный с процессами переноса (диффузией и теплопроводностью), оказывает стабилизирующее действие при развитии гидродинамической неустойчивости. В данной работе учитывалось влияние диссипативных процессов в предположении, что скорость распространения пламени по горючей смеси, согласно результатам линейной тепло-диффузионной теории устойчивости [1], зависит от формы поверхности пламени. Кроме того, предполагалось, что длинноволновые возмущения стабилизируются из-за наличия в системе постоянного ускорения, обусловленного действием силы тяжести или движением газа с ускорением.

Действие постоянного ускорения, диссипативных процессов и вихревого движения в области продуктов горения может оказаться таким, что неустойчивыми будут возмущения с волновыми векторами, расположенными в узкой области вблизи критического волнового вектора  $k_c$ . Дальнейший рост таких возмущений ограничивается нелинейными эффектами, что и приводит к существованию стационарных ячеек на поверхности пламени. При малом превышении над порогом неустойчивости на линейной ее стадии нарастают стоячие волны, имеющие близкие по модулю волновые векторы. На нелинейной стадии за счет членов второго порядка (в разложении возмущенных величин в ряд по степеням малости амплитуды ячеек пламени к характерной длине волны возмущения) связанными оказываются три стоячие волны, углы между которыми равны  $\pi/3$ . Члены третьего порядка не приводят к столь жесткой корреляции между углами возбуждающихся волн. Поэтому следует ожидать, что при малых амплитудах возмущения стационарное состояние должно обладать гексагональной структурой [10].

Существуют решения, описывающие периодические структуры поверхности пламени, имеющие вид одномерной и квадратной решеток. Естественно, что такие решения могут быть реализованы только в том случае, если они устойчивы. Однако в данной работе проблема устойчивости полученных периодических решений не исследовалась.

### Метод теории возмущений

Считая газ невязким и несжимаемым и рассматривая фронт пламени как поверхность разрыва, опишем метод теории возмущений, позволяющий получить нелинейное интегральное уравнение для возмущенной

поверхности пламени. Введем систему координат с осью  $z$ , направленной параллельно вектору постоянного ускорения  $\vec{g}$ . Для определенности рассмотрим случай постоянного ускорения, которое приписывается влиянию силы тяжести. В этой системе координат возмущенная поверхность пламени задается уравнением  $z = \eta(x, y)$ , а нормаль к поверхности находится из выражения

$$\vec{n} = (1 + (\nabla\eta)^2)^{-1/2} (-\nabla\eta, 1).$$

Основное течение считается однородным, и невозмущенное поле скоростей в свежем газе есть  $V_{z1} = -S_0$ , а в продуктах горения  $V_{z2} = -ES_0$ . Здесь  $E = \rho_1/\rho_2$  — отношение плотностей свежего газа и продуктов горения;  $S_0$  — невозмущенная скорость распространения пламени по горячему газу.

Набегающий на пламя поток газа предполагается безвихревым, и возмущенная скорость свежего газа  $\vec{v}_1$  выражается через потенциал скорости  $\Phi_1$ , который удовлетворяет уравнениям:

$$\vec{v}_1 = (\nabla_{\perp}\Phi_1, \partial\Phi_1/\partial z), \quad \Delta_{\perp}\Phi_1 + \partial^2\Phi_1/\partial z^2 = 0, \quad (1)$$

$$\partial\Phi_1/\partial t + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp}\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\Phi_1/\partial z)^2 - S_0 \cdot \partial\Phi_1/\partial z + p_1/\rho_1 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $p_1$  — возмущение давления.

Поле течения за пламенем вихревое, и возмущенную скорость продуктов горения можно представить в виде

$$\vec{v}_2 = (\nabla_{\perp}\Phi_2 + \lambda\nabla_{\perp}\mu, \partial\Phi_2/\partial z + \lambda\partial\mu/\partial z), \quad (3)$$

где  $\Phi_2$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — скалярные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\partial\Phi_2/\partial t + (\vec{v}_{2\perp}, \nabla_{\perp}\Phi_2) + v_{2z} \cdot \partial\Phi_2/\partial z - v_2^2/2 - ES_0 \cdot \partial\Phi_2/\partial z + p_2/\rho_2 = 0, \quad (4)$$

$$\partial\mu/\partial t = ES_0 \cdot \partial\mu/\partial z - (\vec{v}_{2\perp}, \nabla_{\perp}\mu) - v_{2z} \cdot \partial\mu/\partial z + \text{const}, \quad (5)$$

$$\partial\lambda/\partial t = ES_0 \cdot \partial\lambda/\partial z - (\vec{v}_{2\perp}, \nabla_{\perp}\lambda) - v_{2z} \cdot \partial\lambda/\partial z. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — переменные Клебша. Непосредственно подставляя  $\vec{v}_2$ , выраженную в переменных  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\Phi_2$ , в уравнения Эйлера, убеждаемся, что они удовлетворяются, если  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\Phi_2$  подчиняются выражениям (4) — (6). Поэтому можно говорить, что система уравнений гидродинамики эквивалентна системе (4) — (6). Подробную информацию о переменных Клебша можно найти в работах [7, 8].

Уравнение неразрывности позволяет выразить  $\Phi_2$  через  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\partial^2\Phi_2/\partial z^2 + \Delta_{\perp}\Phi_2 = -\text{div}_{\perp}(\lambda\nabla_{\perp}\mu) - \partial(\lambda \cdot \partial\mu/\partial z)/\partial z. \quad (7)$$

Важно отметить, что выбор  $\lambda$  и  $\mu$  по данному значению  $\Phi_2$  неоднозначен. Эту неоднозначность можно устранить, если определить  $\Phi_2$  на фронте пламени следующим образом:

$$\Phi_2|_{z=\eta(x, y, t)} = \Phi_1|_{z=\eta(x, y, t)} = \psi(x, y, t).$$

Воспользовавшись формулой

$$\partial\psi/\partial t = \partial\Phi_2/\partial t + \partial\eta/\partial t \cdot \partial\Phi_2/\partial z|_{z=\eta}$$

и уравнениями (2) и (4), получим

$$\begin{aligned} (E-1)\frac{\partial\psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2}(E-1)(\nabla_{\perp}\psi)^2 + ES_0\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)^2 - E\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{2}(\lambda\nabla_{\perp}\mu)^2 - \\ & - \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial\eta}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - E\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

На фронте пламени разность возмущенных давлений записывается в виде [9]

$$p_1 - p_2 = \rho_2 [E(E-1)(S^2 - S_0^2) + (E-1)g\eta]. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что скорость распространения пламени  $S$  по горючей смеси зависит от формы поверхности пламени. Ускорение  $g$  в областях с постоянной плотностью газа не оказывает влияния на возмущения давления и не входит в динамические уравнения для возмущенных величин. Однако на фронт пламени  $g$  влияет, так как при отрицательном отклонении пламени  $\eta$  продукты горения на участке  $\eta$  заменяются холодным газом, а при положительном — наоборот. Поэтому действие постоянного ускорения приводит к изменению на фронте пламени возмущений давления первого порядка малости  $\rho_2(E-1)g\eta$ . На фронте сохраняется поток массы, и учитывая, что нормальная составляющая скорости свежего газа к фронту должна быть равна нормальной скорости пламени, получим:

$$\partial\eta/\partial t - v_{z1} + (\nabla\eta, \vec{v}_{\perp 1}) = S\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - S_0, \quad (10)$$

$$\partial\eta/\partial t - v_{z2} + (\nabla\eta, \vec{v}_{\perp 2}) = E(S\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - S_0). \quad (11)$$

Из закона сохранения на фронте касательной составляющей потока импульса и уравнений (10), (11) можно найти значения потенциалов  $\lambda$  и  $\mu$  на фронте пламени

$$\lambda\nabla_{\perp}\mu = (E-1)S\nabla\eta\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2}. \quad (12)$$

Выражения (1)–(7) вместе с граничными условиями (8)–(12) эквивалентны полной системе гидродинамических уравнений с граничными условиями, описывающими распространение пламени.

Остановимся теперь на вопросе учета процессов переноса в рассматриваемом гидродинамическом приближении. Известно, что длинноволновые возмущения фронта пламени создаются гидродинамическими возмущениями, простирающимися по обе стороны от фронта на расстояние того же порядка, что и длина волны возмущения ( $2\pi/k_c$ ). Таким образом, структура возмущенного пламени имеет, по крайней мере, две характерные области с размерами порядка тепловой толщины пламени  $l$  и  $2\pi/k_c$ . Интересуясь возмущениями с характерными длинами волн  $2\pi/k_c \gg l$ , можно рассматривать в пределе  $k_c l \rightarrow 0$  область переходной зоны, в которой существенны процессы переноса, как поверхность разрыва в идеальном не реагирующем газе. Однако действие процессов переноса можно учесть интегрально, изменив соответствующим образом граничные условия на поверхности разрыва. Так, при большой энергии активации  $A/RT_b \gg 1$  скорость распространения пламени по горючей смеси зависит, согласно линейной тепло-диффузионной теории устойчивости, от кривизны поверхности пламени [1]:

$$S = S_0 \left( 1 + \frac{\kappa A (T_b - T_u) (Le - 1) \Delta\eta}{2S_0 R T_b^2} \right) = S_0 (1 + \sigma_1 \Delta\eta), \quad (13)$$

где  $A$  — энергия активации;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T_u$  — температура свежей смеси;  $T_b$  — температура продуктов горения;  $Le = \kappa/D$  — число Льюиса;  $\kappa$ ,  $D$  — коэффициенты температуропроводности и диффузии смеси. Такая зависимость нормальной скорости от кривизны поверхности пламени обеспечивает стабилизацию коротковолновых возмущений, если  $Le > 1$ . Поскольку  $\sigma_1 \approx l$  и, согласно принятым предположениям,  $\sigma_1 k_c \ll 1$ , то в разложении возмущенных величин в ряд по степеням  $\eta$  учтем зависимость (13) только в линейном приближении.

Для нахождения поля течения газа перед фронтом пламени необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\Delta_{\perp}\Phi_1 + \partial^2\Phi_1/\partial z^2 = 0 \text{ и } \Phi_1|_{z=0} = \psi, \Phi_1|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Решим задачу в виде ряда по степеням  $\eta$ . Этот ряд удобнее писать, сделав преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\eta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(\vec{r}_\perp) \exp[-i\vec{k}\vec{r}_\perp] d\vec{r}_\perp,$$

$$\psi(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\vec{r}_\perp) \exp[-i\vec{k}\vec{r}_\perp] d\vec{r}_\perp.$$

Здесь  $r_\perp = (x, y)$ ;  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ . Не останавливаясь на подробностях, приведем сразу результат разложения (до третьего порядка):

$$\Phi_1(\vec{k}, z) = e^{-|\vec{k}|z} \left\{ \psi(\vec{k}) + \int |\vec{k}_1| \psi(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \int \psi(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \eta(\vec{k}_3) [|\vec{k}_1| (|\vec{k} - \vec{k}_2| +$$

$$+ |\vec{k} - \vec{k}_3| - |\vec{k}_1|) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \left. \right\}$$

(символ  $\delta$  означает дельта-функцию).

Зная распределение потенциала  $\Phi_1(\vec{k}, z)$ , легко найти значения скорости свежего газа в области и на фронте пламени. В стационарном случае определенной форме поверхности  $\eta(\vec{k})$  соответствует определенное распределение потенциала  $\psi(\vec{k})$ . Иными словами, можно представить  $\psi$  в виде ряда по степеням  $\eta$ . Для этого надо воспользоваться равенством (10). В случае, когда  $S$  зависит от кривизны поверхности, согласно (13), имеем:

$$\psi(\vec{k}) = -\sigma_1 |\vec{k}| \eta(\vec{k}) - \frac{1}{2!} \int \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{|\vec{k}|} \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} -$$

$$- \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 - \frac{1}{3!} \int \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^3 \frac{1}{2} \left[ \frac{(\vec{k}_i, \vec{k}_j) (\vec{k}, \vec{k}_i + \vec{k}_j)}{|\vec{k}_i| |\vec{k}_j|} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - |\vec{k}| (\vec{k}_i, \vec{k}_j) \right] \right] \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \eta(\vec{k}_3) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3.$$

При пересечении газом фронта пламени в продуктах горения возникает завихренность, которую поток газа несет вдоль линий тока, так что вся область, заполненная продуктами, является вихревой [9]. В продуктах горения необходимо решить уравнения (5)–(7) с граничными условиями (8), (11), (12). Так же, как и в свежем газе, для всех возмущенных величин выполним преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ .

Сделаем теперь преобразование к переменным  $u_z$  и  $\vec{u}_\perp = (u_x, u_y)$ :

$$u_z(\vec{k}) = \int \lambda(\vec{k}_1) \partial \mu(\vec{k}_2) / \partial z \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2,$$

$$\vec{u}_\perp(\vec{k}) = i \int \vec{k}_2 \lambda(\vec{k}_1) \mu(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2.$$

Тогда  $u_z$  и  $\vec{u}_\perp$  удовлетворяют выражениям

$$\partial u_z(\vec{k}) / \partial z = \frac{1}{ES_0} \int \{ u_z(\vec{k}_2) (\vec{k}_2, \vec{v}_{2\perp}(\vec{k}_1)) +$$

$$+ (\vec{u}_\perp(\vec{k}_2), \partial \vec{v}_{2\perp}(\vec{k}_1) / \partial z) + \partial (u_z(\vec{k}_2) v_{2z}(\vec{k}_1)) / \partial z \} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2, \quad (14)$$

$$\partial \vec{u}_\perp(\vec{k}) / \partial z = \frac{1}{ES_0} \int \{ i \vec{u}_\perp(\vec{k}_2) (\vec{k}_2, \vec{v}_{2\perp}(\vec{k}_1)) + v_{2z}(\vec{k}_1) \partial \vec{u}_\perp(\vec{k}_2) / \partial z +$$

$$+ i \vec{k}_1 [v_{2z}(\vec{k}_1) u_z(\vec{k}_2) + (\vec{u}_\perp(\vec{k}_2), \vec{v}_{2\perp}(\vec{k}_1))] \} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2. \quad (15)$$

Уравнение неразрывности дает связь  $\Phi_2$  с  $u_z$  и  $\vec{u}_\perp$

$$-k^2\Phi_2 + \partial^2\Phi_2/\partial z^2 = -i(\vec{k}, \vec{u}_\perp) - \partial u_z/\partial z. \quad (16)$$

Найдем распределение  $\Phi_2$ ,  $u_z$  и  $\vec{u}_\perp$  в виде ряда по степеням  $\eta$ . Это можно сделать следующим образом. Из (15) с граничными условиями (12) находим методом последовательных приближений распределение  $\vec{u}_\perp(k, z)$ . Затем, решая уравнение неразрывности (16) относительно  $\Phi_2$  с граничными условиями  $\Phi_2|_{z=\eta} = \psi$  и  $\partial^2\Phi_2/\partial z^2 \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ , получим распределение  $\Phi_2$  в области продуктов горения и  $\partial\Phi_2/\partial z$  — на фронте пламени. После этого из граничного условия (11) можно найти  $u_z$  на фронте пламени, а из (14) — распределение  $u_z$  по всей области продуктов горения. Решение первого порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)} &= S_0 \left[ (E - 1 - \sigma_1 |\vec{k}|) e^{|\vec{k}|z} - E + 1 \right] \eta(\vec{k}), \\ \vec{u}_\perp^{(1)} &= i\vec{k} (E - 1) S_0 \eta(\vec{k}), \\ u_z^{(1)} &= -S_0 (E - 1 - |\vec{k}| \sigma_1 (E + 1)) |\vec{k}| \eta(\vec{k}). \end{aligned}$$

В приближении второго порядка в нелинейных частях уравнений для переменных  $u_z$  и  $\vec{u}_\perp$  при подстановке величин первого порядка появляются члены второго порядка. Неопределенные коэффициенты, получающиеся при решении дифференциальных уравнений (14) — (16), определяются из граничных условий. При этом в приближениях второго и третьего порядков уже нельзя брать граничные условия для  $z = 0$ ; их нужно определять при  $z = \eta$ . Окончательный результат последовательного вычисления возмущенных величин второго порядка можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_z^{(2)}(\vec{k}) &= \int \left( Q + B e^{|\vec{k}_1|z} \right) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2, \\ \vec{u}_\perp^{(2)}(\vec{k}) &= i \int \left( \vec{C} \left( 1 - e^{|\vec{k}_1|z} \right) + \vec{k}_2 L \right) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2, \\ v_z^{(2)}(\vec{k}) &= \int \left( Q - L + |\vec{k}| \varphi e^{|\vec{k}|z} + F e^{|\vec{k}_1|z} \right) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2, \\ \vec{v}_\perp^{(2)}(\vec{k}) &= i \int \left( \vec{N} + \vec{k} \varphi e^{|\vec{k}|z} + \vec{M} e^{|\vec{k}_1|z} \right) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{(E-1)^2 S_0}{E} \left( \frac{2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_2|}{\vec{k}_2 - \vec{k}_1^2} - \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}) |\vec{k}_2|}{\vec{k}^2} \right) - |\vec{k}_1| (E-1) S_0 - \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_2) S_0}{2|\vec{k}|}, \\ B &= \frac{(E-1)^2 S_0}{E |\vec{k}_1|} \left( (\vec{k}_1, \vec{k}_2) (|\vec{k}_2| - |\vec{k}_1|) - \vec{k}_1^2 |\vec{k}_2| \right); \\ \vec{C} &= \frac{(E-1)^2 S_0}{E |\vec{k}_1|} \left( \vec{k} (\vec{k}_1, \vec{k}_2) + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \vec{k}_1 \right); \\ Q &= -\frac{(E-1)^2 S_0}{E} \left( \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_2| (|\vec{k}| - |\vec{k}_1|)}{|\vec{k}_1| (|\vec{k}| + |\vec{k}_1|)} + \frac{(\vec{k}, \vec{k}_1) |\vec{k}_2|}{|\vec{k}|} - \frac{3}{2} |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \right) + \\ &\quad + (E-1) S_0 |\vec{k}_1| (|\vec{k}| - |\vec{k}_1|) - \frac{1}{2} S_0 (E-3) (\vec{k}_1, \vec{k}_2); \\ F &= \frac{(E-1)^2 S_0}{E} \left( \frac{2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|}{\vec{k}^2 - \vec{k}_1^2} + \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_2|}{|\vec{k}_1|} - |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \right); \end{aligned}$$

$$\vec{N} = \frac{(E-1)^2 S_0 |\vec{k}_2|}{E} \left( \vec{k}_1 - \frac{\vec{k}(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{|\vec{k}_2|} \right);$$

$$\vec{M} = \frac{(E-1)^2 S_0}{E} \left( \frac{2\vec{k}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_2|}{|\vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2} - \vec{k}_1 |\vec{k}_2| \right);$$

$$L = (E-1)^2 S_0 |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| / 2E.$$

Видно, что при переходе к приближениям высших порядков число членов в решении быстро возрастает, но принципиальных математических трудностей здесь нет: коэффициенты любого порядка определяются линейными неоднородными уравнениями, связывающими их с уже известными коэффициентами низших порядков.

### Стационарные решения

Вычислив поле скоростей в областях свежего газа и продуктах горения в виде ряда по степеням  $\eta$  (до третьего порядка), можно получить из (8) нелинейное уравнение для поверхности пламени

$$\omega(\vec{k}) \eta(\vec{k}) + \frac{1}{2!} \int U(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \int T(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \eta(\vec{k}_1) \eta(\vec{k}_2) \eta(\vec{k}_3) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 = 0. \quad (17)$$

Функции  $U(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$  и  $T(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$  подчиняются соотношениям

$$U(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = U(\vec{k}, \vec{k}_2, \vec{k}_1) = U(-\vec{k}, -\vec{k}_2, -\vec{k}_1),$$

$$T(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = T(\vec{k}, \vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{k}_3) =$$

$$= T(\vec{k}, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_1) = T(-\vec{k}, -\vec{k}_1, -\vec{k}_2, -\vec{k}_3).$$

Поскольку в работе [10] подробно обсуждались свойства уравнения (17) применительно к задаче о стационарной структуре на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле, кратко опишем метод решения выражения (17). Прежде всего, еще раз рассмотрим линейную стадию неустойчивости плоского пламени. В этом случае амплитуда возмущения на пламени растет по экспоненциальному закону  $\eta(\vec{k}) = a(\vec{k}) \exp[\Omega(\vec{k})t]$  с инкрементом нарастания возмущений  $\Omega(\vec{k})$ . Зависимость инкремента от волнового числа задается выражением [9]

$$-\frac{(E+1)\Omega^2}{|\vec{k}| S_0^2} - \frac{2\Omega(1 + \sigma_1 |\vec{k}|/E)}{S_0} + E|\vec{k}|(E-1 - 2E\sigma_1 |\vec{k}|) - \frac{(E-1)g}{S_0^2} = 0.$$

Один из корней этого уравнения  $\Omega_-$  всегда отрицательный и не определяет возникновения неустойчивости. Корень  $\Omega_+$  имеет положительную действительную часть, если выполняется условие

$$\Omega_+ = -\frac{|\vec{k}| S_0 (1 + \sigma_1 |\vec{k}|/E)}{E+1} + \left( \left( \frac{|\vec{k}| S_0 (1 + \sigma_1 |\vec{k}|/E)}{E+1} \right)^2 + \frac{|\vec{k}| S_0^2 \omega(\vec{k})}{E+1} \right)^{1/2};$$

$\text{Re } \Omega_+ > 0$ , если  $\omega(\vec{k}) > 0$ . Видно, что при  $\omega(\vec{k}) > 0$  мнимая часть  $\Omega_+$  равняется пулю. Записывая

$$\omega(\vec{k}) = 2E^2 \sigma_1 [ (|\vec{k}| - k_c)^2 - k_c^2 (1 - \text{Fr}^{-1}) ],$$

где  $k_c = (E-1)/4E\sigma_1$ , и  $\text{Fr} = S_0^2 (E-1)/8\sigma_1 g$  — число Фруда, убежда-

емя, что при  $\text{Fr}^{-1} < 1$  существуют возмущения пламени, для которых инкремент положительный. Волновые векторы таких возмущений расположены в области

$$[1 - (1 - \text{Fr}^{-1})^{1/2}] k_c < |\vec{k}| < k_c [1 + (1 - \text{Fr}^{-1})^{1/2}].$$

Если  $\text{Fr} \simeq 1$ , то неустойчивы стоячие волны в узком слое  $k_c(1 - \text{Fr}^{-1})^{1/2}$  вблизи  $|\vec{k}| = k_c$ . Нелинейная стадия развития неустойчивости, ограничивающая рост таких возмущений, определяется нелинейными членами в (17). Члены второго порядка в (17) в силу сохранения импульса  $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  приводят к жесткой корреляции между углами возбуждающихся волн. При этом вблизи порога  $|\vec{k}| = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| \simeq k_c$  и волновые векторы  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}$  образуют с хорошей точностью равносторонний треугольник. Это означает, что связанными оказываются три стоячие волны, волновые векторы которых повернуты друг относительно друга на угол  $\pi/3$ . Поэтому следует ожидать, что стационарное состояние при слабой надкритичности  $(1 - \text{Fr}^{-1}) \ll 1$  должно обладать гексагональной структурой. Перейдем в (17) к безразмерным переменным

$$\vec{k}/k_c \rightarrow \vec{k}, k_c^2 \eta(\vec{k}) \rightarrow \eta(\vec{k}),$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega(\vec{k}) &= \frac{1}{2} E (E - 1) [(1 - \text{Fr}^{-1}) - (|\vec{k}| - 1)^2], \\ U(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= (\vec{k}_1, \vec{k}_2) (E^2 + 1) - (E - \\ &- 1)^2 \left[ \frac{2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) (|\vec{k}_1| |\vec{k}_2| + 2(\vec{k}_1, \vec{k}_2))}{(|\vec{k}| + |\vec{k}_1|) (|\vec{k}| + |\vec{k}_2|)} - |\vec{k}_2| |\vec{k}_1| + \right. \\ &+ \left. \frac{(|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|) (|\vec{k}_1| |\vec{k}_2| + (\vec{k}_1, \vec{k}_2))}{|\vec{k}|} \right] + E (E - 1) [|\vec{k}| (|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|) - k_1^2 - k_2^2]. \end{aligned}$$

Обозначив через  $\theta$  угол между  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}$  и предполагая, что  $|\vec{k}| = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}_3| = 1$ , получим выражения для коэффициентов  $U$  и  $T$  вблизи порога:

$$\begin{aligned} U(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= U = -\frac{1}{2} (E^2 + 1), \\ T(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) &= T(\theta) = \frac{6(E-1)^3}{E} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1 + (1 + \cos \theta) \sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{(1 + \sqrt{2(1 - \cos \theta)})^2} \right] + \\ &+ (E - 1) \left\{ 6E \sqrt{2(1 - \cos \theta)} [1 - \sqrt{2(1 - \cos \theta)}] - 3(E + 1) \cos^2 \theta - \right. \\ &- 8E + 9 - \frac{(E - 1)(9(1 + 2 \cos \theta) \sqrt{2(1 - \cos \theta)} - 12(1 - \cos \theta))}{1 + \sqrt{2(1 - \cos \theta)}} + \\ &+ \left. \frac{3 \cos \theta \sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{1 + \sqrt{2(1 - \cos \theta)}} \right\} - 3E \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \right) + 2E. \end{aligned}$$

Для решения, обладающего гексагональной структурой, векторы обратной решетки  $q_1, q_2, q_3$  должны быть выбраны равными по модулю единице, что с хорошей точностью соответствует максимуму инкремента плоской границы. Этому состоянию отвечает рельеф:

$$\begin{aligned} \eta(\vec{r}_\perp) &= a_0 + 2a_1 \sum_{i=1}^3 \cos(q_i r_\perp) + 2a_2 \sum_{i=1}^3 \cos(2q_i r_\perp) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_3 \cos(q_i - q_j, \vec{r}_\perp) + 0(a_1^3), \quad \sum_{i=1}^3 q_i = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Амплитуды  $a_0, a_2, a_3$  имеют порядок малости  $O(a_1^2)$ . Совершая Фурье-преобразование от (18), из уравнения (17) получим зависимость амплитуды  $a_1$  от надкритичности  $h$ :

$$a_1 = \frac{1}{T_3} \{-3U \pm [(3U)^2 - 3E(E-1)hT_3]^{1/2}\}, \quad h = (1 - Fr^{-1}),$$

$$T_3 = 6T(0) + T(\pi) + 4T(\pi/3) + 4T(2\pi/3) - \\ - 12U(\vec{q}_1, \vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{q}_2)U(\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{q}_1, -\vec{q}_2)/\omega(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) - \\ - 3U(2\vec{q}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_1)U(\vec{q}_1, 2\vec{q}_1, -\vec{q}_1)/\omega(2\vec{q}_1).$$

Первое решение (со знаком минус перед радикалом) характеризуется жестким режимом возбуждения с величиной скачка параметра порядка  $a_c = 6U/T_3$ , откуда непосредственно следует критерий применимости  $a_c \ll 1$ . Например, для  $E = 5$   $a_c = 0,013$ . Что касается второго решения, то амплитуда ячеек для него вблизи порога пропорциональна  $h$ .

Кроме рассмотренной периодической структуры возможны еще две, одна имеет вид одномерной решетки

$$\eta(\vec{r}_\perp) = b_0 + 2b_1 \cos(\vec{q}_1, \vec{r}_\perp) + 2b_2 \cos(2\vec{q}_1, \vec{r}_\perp) + O(b_1^3),$$

а другая — квадратной

$$\eta(\vec{r}_\perp) = c_0 + 2c_1 [\cos(\vec{q}_1, \vec{r}_\perp) + \cos(\vec{q}_2, \vec{r}_\perp)] + \\ + 2c_2 [\cos(2\vec{q}_1, \vec{r}_\perp) + \cos(2\vec{q}_2, \vec{r}_\perp)] + 2c_3 [\cos(\vec{q}_1 + \vec{q}_2, \vec{r}_\perp) + \\ + \cos(\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{r}_\perp)] + O(c_1^3),$$

где  $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$ . Оба решения характеризуются мягким режимом возбуждения. Амплитуда ячеек вблизи порога пропорциональна  $h^{1/2}$ . Для первого из них амплитуда

$$b_1 = (-3E(E-1)h/T_1)^{1/2},$$

для второго

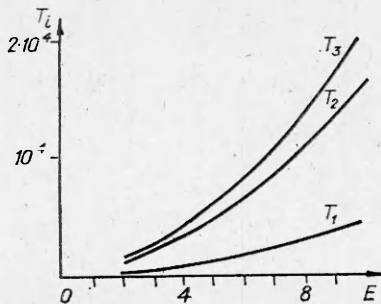
$$c_1 = (-3E(E-1)h/T_2)^{1/2}.$$

Здесь

$$T_1 = 2T(0) + T(\pi) - 3U(\vec{q}_1, 2\vec{q}_1, -\vec{q}_1)U(2\vec{q}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_1)/\omega(2\vec{q}_1);$$

$$T_2 = 2T(0) + T(\pi) + 6T(\pi/2) - 12U(\vec{q}_1 + \\ + \vec{q}_2, \vec{q}_2, \vec{q}_1)U(\vec{q}_1, \vec{q}_1 + \vec{q}_2, -\vec{q}_2)/\omega(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) - \\ - 3U(\vec{q}_1, 2\vec{q}_1, -\vec{q}_1)U(2\vec{q}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_1)/\omega(2\vec{q}_1).$$

На рисунке приведена зависимость коэффициентов  $|T_1|, |T_2|, |T_3|$  от коэффициента расширения  $E$ ;  $T_1$  и  $T_2$  отрицательны для всех  $E > 1$ .



Таким образом, главный вывод настоящей работы состоит в том, что стационарные ячейки, появляющиеся на первоначально плоском пламени вблизи порога возникновения неустойчивости, образуют периодическую структуру, которая может иметь вид одномерной, квадратной или гексагональной решетки.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4.
2. T. Mitani, F. A. Williams. Comb. Flame, 1980, 39, 2, 169.
3. A. Palm-Leis, R. A. Strehlow. Comb. Flame, 1969, 13, 2, 111.
4. E. G. Groff. Comb. Flame, 1982, 48, 1.
5. R. E. Petersen, H. W. Emmons. Phys. Fluids, 1961, 4, 456.
6. Нестационарное распространение пламени/Под ред. Д. Г. Маркштейна. М.: Мир, 1968.
7. Г. Ламб. Гидродинамика. М.: ОНТИ, 1947.
8. Б. И. Давыдов. Докл. АН СССР, 1949, 89, 165.
9. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт и др. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
10. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор. ЖЭТФ, 1976, 71, 1.

Поступила в редакцию 4/XII 1985  
после доработки — 10/IV 1986

## ОБ ЭФФЕКТАХ СИНЕРГИЗМА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ИНЕРТНОГО РАЗБАВИТЕЛЯ НА ГАЗОФАЗНЫЕ ПЛАМЕНА

Г. А. Гуляев, Г. А. Попков, Ю. Н. Шебеко

(Балашиха)

Традиционный способ тушения газофазных пламен состоит в подаче инертных и обладающих химическим действием разбавителей [1]. В [2] показана возможность тушения путем наложения на пламена электрических полей. В то же время совместное действие огнетушащего вещества и электрического поля практически не изучено, хотя такое исследование представляет как теоретический интерес в связи с необходимостью выяснения роли ионизационных явлений при горении, так и практический в связи с поиском новых, более эффективных способов тушения пламен.

В настоящей работе проведено исследование совместного действия инертных разбавителей (азот, аргон) и электрического поля на газофазные пламена предварительно перемешанных смесей пропан-бутана с воздухом. Пламя было стабилизировано на круглой горелке с внутренним диаметром 13 мм. Расход газозооудной смеси находился вблизи предела стабилизации пламени. Горелка была окружена цилиндрической металлической сеткой (с размером ячейки  $1 \times 1$  мм) диаметром 9,5 и высотой 20 см, коаксиальной с горелкой. Нижний край сетки находился на 1,5 см ниже среза горелки. Горелка была заземлена, на сетку подавался отрицательный потенциал. Полярность потенциала выбрана исходя из того, что в опытах ставилась цель исследовать гашение пламен. Как показано в [3], это происходит лишь при отрицательной полярности потенциала. Инертный газ подавали в горелку вместе с горючей смесью, расходы компонентов смеси контролировали по ротаметрам.

Как показано в [3], при наложении электрического поля изменялась геометрия пламени, которое приобретало характерную «цветкообразную» форму и при дальнейшем увеличении абсолютной величины подаваемого потенциала гасло. Данное явление в [3] интерпретировано в рамках теории «ионного ветра». В качестве показателя стабильности пламени в настоящей работе выбрано предельное значение расхода топливозооудной смеси  $Q_{\Sigma}$  вблизи нижнего предела стабилизации. На рисунке показана зависимость  $Q_{\Sigma}$  от расхода инертного разбавителя ( $Q_{N_2}$  или  $Q_{Ar}$ ) при различных значениях потенциала, подаваемого на сетку (0 или 10 кВ).

Как видно из рисунка, с повышением расхода инертного компонента возрастает и нижнепредельный расход топливозооудной смеси. Од-