

УДК 532.59

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ КОНТУРА ПОД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКИХ СРЕД

С. И. Горлов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск

В рамках нелинейной теории разработан и численно реализован метод решения начально-краевой задачи о горизонтальном движении кругового цилиндра под границей раздела двух жидкостей. Для задачи о разгоне кругового цилиндра под свободной поверхностью весоной жидкости представлены результаты расчета профилей генерируемых волн и гидродинамических нагрузок. Подробно рассмотрено явление обрушения волн.

Нестационарные нелинейные задачи генерации поверхностных и внутренних волн движущимся в жидкости телом являются предметом интенсивного исследования. Этот интерес вызван возможностью моделирования сложных волновых течений и решения ряда практических задач. В частности, решение задачи о разгонном движении контура вблизи границы раздела сред в полной нелинейной постановке позволяет исследовать обрушение волн за телом. Успехи в этой области связаны с развитием численных методов, наиболее полный обзор которых представлен в [1, 2]. В этих работах дана классификация существующих методик решения волновых задач, особенности их использования, представлены оценки эффективности соответствующих алгоритмов, приведены некоторые результаты расчетов волновых течений. В обзоре [3] представлены результаты расчетов плоских гравитационных волн, вызванных различными возмущениями, в том числе движущимся телом. В [4] решены задачи о движении кругового цилиндра над и под границей раздела водной и воздушной сред (решения строились в лагранжевых координатах с использованием теории потенциала), а также приведены результаты расчетов волновых профилей, возникающих при движении цилиндра из состояния покоя. Нелинейная нестационарная задача о горизонтальном движении несущего профиля под свободной поверхностью рассмотрена в [5]. Решение строилось на основе метода граничных элементов в спектральной формулировке. Приведены обширные результаты по расчету формы свободной поверхности и гидродинамических характеристик профиля.

В настоящей работе предложен численный метод решения задачи о горизонтальном движении контура вблизи границы раздела сред. Проведен численный эксперимент по оценке влияния параметров задачи на характер течения. Подробно исследован процесс обрушения волн. Приведены расчеты гидродинамических реакций, действующих на контур.

1. Рассмотрим задачу о горизонтальном движении из состояния покоя контура  $L_0(t)$  под границей раздела сред  $L_1(t)$ . В нижнем  $D_1$  и верхнем  $D_2$  слоях жидкость идеальная, несжимаемая и однородная. Система координат вводится таким образом, чтобы ось  $x$  совпадала с невозмущенной границей раздела  $L_1(0)$ . В начальный момент времени центр

цилиндра находится в точке с координатами  $(0, -h)$ . В выбранной системе координат вектор скорости движения цилиндра  $\mathbf{V}_{L_0}(t) = (V_{L_0x}, V_{L_0y})$  имеет вид

$$\mathbf{V}_{L_0}(t) = \begin{cases} (-U_0 t/T, 0), & 0 \leq t \leq T, \\ (-U_0, 0), & t > T, \end{cases}$$

что соответствует разгонному движению из состояния покоя до некоторой постоянной скорости по линейному закону.

Потенциал скорости  $\varphi_k(x, y, t)$ , описывающий движение жидкости в области  $D_k$ , удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_k(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in D_k(t) \setminus L_0(t), \quad k = 1, 2. \quad (1.1)$$

На границе раздела выполняются кинематическое и динамическое условия, записанные в точках  $L_1(t)$ , перемещающихся с некоторой скоростью  $\nabla \varphi_0(x, y, t)$ :

$$\nabla \varphi_1(x, y, t) \cdot \mathbf{n}_1 = \nabla \varphi_2(x, y, t) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_1, \quad (x, y) \in L_1(t); \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1(x, y, t)}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2(x, y, t)}{\partial t} + \rho_1 \frac{(\nabla \varphi_1(x, y, t))^2}{2} - \rho_2 \frac{(\nabla \varphi_2(x, y, t))^2}{2} - \\ - \rho_1 \nabla \varphi_0(x, y, t) \nabla \varphi_1(x, y, t) + \rho_2 \nabla \varphi_0(x, y, t) \nabla \varphi_2(x, y, t) + (\rho_1 - \rho_2) g y(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$(x, y) \in L_1(t);$$

на поверхности контура  $L_0(t)$  выполняется условие непротекания

$$(\nabla \varphi_1(x, y, t) - \mathbf{V}_{L_0}(t)) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad (x, y) \in L_0(t). \quad (1.4)$$

В (1.2)–(1.4)  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор точки  $(x, y) \in L_1(t)$ ;  $\mathbf{n}_j$  — нормаль к  $L_j(t)$  в точке  $(x, y) \in L_j(t)$  ( $j = 0, 1$ );  $\rho_k$  — плотность жидкости в  $k$ -м слое;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\partial / \partial t$  — производная, вычисляемая в подвижной системе координат.

В бесконечно удаленных точках  $D_1, D_2$  выполняются условия отсутствия возмущений скоростей и границы раздела сред

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \pm\infty} \nabla \varphi_k(x, y, t) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \quad (x, y) \in L_1(t). \quad (1.6)$$

Начальные условия для границы раздела и потенциала имеют вид

$$L_1(0): \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \nabla \varphi_k(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D_k(0) \setminus L_0(0). \quad (1.7)$$

**2.** Сведем начально-краевую задачу (1.1)–(1.7) относительно потенциалов скоростей  $\varphi_k(x, y, t)$  к системе интегродифференциальных уравнений относительно интенсивностей особенностей, моделирующих жидкие и твердые границы. Для этого расположим вдоль контура  $L_1(t)$  вихревой слой с интенсивностью  $\gamma_1(s_1, t)$  ( $\gamma_1(\pm\infty, t) = 0$ ), а вдоль  $L_0(t)$  — слой источников  $q(s_0, t)$ . Тогда комплексная скорость возмущенного движения жидкости в областях  $D_k$  ( $k = 1, 2$ ) будет иметь вид

$$\bar{V}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1(t)} \frac{\gamma_1(s_1, t) ds_1}{z - \zeta(s_1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0(t)} \frac{q(s_0, t) ds_0}{z - \zeta(s_0)}; \quad (2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{V}(z, t) = 0. \quad (2.2)$$

Примем следующее предположение относительно скорости  $\nabla\varphi_0(x, y, t)$  ( $(x, y) \in L_1(t)$ ):

$$\frac{\partial\varphi_0(x, y, t)}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_0(x, y, t)}{\partial y} = \bar{V}_1(z(s_1), t), \quad \bar{V}_j(z(s_1), t) = \bar{V}(z(s_j), t), \quad j = 0, 1. \quad (2.3)$$

Отметим, что при  $z(s_j) \in L_j(t)$  ( $j = 0, 1$ ) несобственные интегралы, входящие в выражение (2.1), следует понимать в смысле главного значения по Коши.

С учетом (2.3) запишем граничные условия (1.2)–(1.4) в виде

$$\frac{\partial z(s_1)}{\partial t} = V_1(z(s_1), t), \quad z(s_1) \in L_1(t); \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial G(s_1, t)}{\partial t} = \rho_* \left( \frac{V_1(z(s_1), t)V_1(z(s_1), t)}{2} - g \operatorname{Im} z(s_1) - \frac{\gamma_1^2(s_1, t)}{8} \right), \quad z(s_1) \in L_1(t),$$

$$G(s_1, t) = \int_{-\infty}^{s_1} \left( \frac{\gamma_1(\sigma_1, t)}{2} + \rho_* V_{1s}(\sigma_1, t) \right) d\sigma_1, \quad (2.5)$$

$$V_{js}(s_j, t) = \operatorname{Re} (V_j(z(s_j), t) \exp(i\theta_j(s_j, t))), \quad z(s_j) \in L_j(t), \quad j = 0, 1;$$

$$\frac{q(s_0, t)}{2} = \operatorname{Im} ((\bar{V}_0(z(s_0), t) - V_{L_0}(t)) \exp(i\theta_0(s_0, t))), \quad (2.6)$$

$$z(s_0) \in L_0(t), \quad V_{L_0}(t) = V_{L_0x} + iV_{L_0y},$$

где  $\theta_j(s_j, t)$  — угол между касательной в точке  $z(s_j) \in L_j(t)$  ( $j = 0, 1$ ) и осью  $x$ ;  $\rho_* = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ .

Таким образом, начально-краевая задача (1.1)–(1.7) свелась к определению функций  $\gamma_1(s_1, t)$ ,  $q(s_0, t)$  и границы раздела  $L_1(t)$  из интегродифференциальных соотношений (2.4)–(2.6) с учетом (2.1), (2.2) и начальных условий, которые имеют вид

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad z \in L_1(0), \quad \gamma_1(s_1, 0) = q(s_0, 0) = 0.$$

Распределение давления по контуру  $p(s_0, t)$ , суммарные гидродинамические нагрузки  $R_x$ ,  $R_y$  и момент  $M$  относительно точки  $z_M = x_M + iy_M$  определяются формулами

$$p(s_0, t) - f(t) = -\rho_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{s_0} V_{js}(\tau_0, t) d\sigma_0 - \operatorname{Re} (\bar{V}_L(t)V_0(z(s_0), t)) + \frac{\bar{V}_0(z(s_0), t)V_0(z(s_0), t)}{2} \right],$$

$$R_x - iR_y = i \int_{L_0(t)} (p(s_0, t) - f(t)) \exp(-i\theta_0(s_0, t)) ds_0, \quad (2.7)$$

$$M = - \int_{L_0(t)} (p(s_0, t) - f(t)) [(\xi(s_0, t) - x_M) \cos \theta_0(s_0, t) + (\eta(s_0, t) - y_M) \sin \theta_0(s_0, t)] ds_0,$$

где  $f(t)$  — некоторая функция, зависящая только от времени.

3. Полученная система интегродифференциальных уравнений (2.4)–(2.6) нелинейна. Это вызвано двумя факторами: неизвестные функции  $\gamma_1(s_1, t)$ ,  $q(s_0, t)$  входят в граничное условие (2.5) нелинейным образом и неизвестна форма границы раздела сред  $L_1(t)$ . В связи с этим существуют определенные сложности при решении полученной системы.

Будем решать систему уравнений (2.4)–(2.6) методом коллокаций. На каждом шаге по времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) рассмотрим границу раздела  $L_1^n$  на конечном интервале (верхний индекс служит для обозначения функции, определяемой на  $n$ -м шаге по времени). Введем разбиение контуров  $L_1^n$  на интервалы  $[s_{1i-1}^n, s_{1i}^n]$  ( $i = 1, \dots, I$ ) и  $L_0^n$  на  $[s_{0j-1}, s_{0j}]$  ( $j = 1, \dots, J$ ). Выберем на этих интервалах точки коллокации  $z^n(s_{1i}^{n*}) \in L_1^n$

( $s_{1i}^{n*} \in [s_{1i-1}^r, s_{1i}^n]$ ) и  $z^n(s_{0j}^*) \in L_0^n$  ( $s_{0j}^* \in [s_{0j-1}, s_{0j}]$ ). Потребуем выполнения (2.4) и (2.5) в точках  $z^n(s_{1i}^{n*})$  ( $i = 1, \dots, I$ ), а условия непротекания на контуре (2.6) — в точках  $z^n(s_{0j}^*)$  ( $j = 1, \dots, J$ ). Дальнейшее решение полученной системы строится с использованием двух итерационных процессов. Один из них связан с интегрированием по времени уравнений (2.4) и (2.5) при помощи явной схемы. При этом на каждом шаге по времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) получаем значение функции  $G^n(s_{1i}^{n*})$  и форму границы раздела  $z^n(s_{1i}^{n*}) \in L_1^n$ . Другая итерационная процедура применяется для решения на каждом шаге по времени системы линейных алгебраических уравнений, полученных дискретизацией соотношений

$$\frac{\gamma_1^n(s_{1i}^{n*})}{2} + \rho_* V_{1s}^n(s_{1i}^{n*}) = \frac{\partial G^n(s_{1i}^{n*})}{\partial s_1^n}, \quad z^n(s_{1i}^{n*}) \in L_1^n, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\frac{q^n(s_{0j}^*)}{2} = \text{Im}((\bar{V}_0^n(z^n(s_{0j}^*)) - \bar{V}_{L_0}^n) \exp(i\theta_0^n(s_{0j}^*))), \quad z^n(s_{0j}^*) \in L_0^n, \quad j = 1, \dots, J.$$

Дискретизация выполняется при помощи метода панелей высокого порядка [6]. Для этого будем аппроксимировать границу раздела  $L_1^n$  на  $i$ -м интервале  $[s_{1i-1}^r, s_{1i}^n]$  ( $i = 1, \dots, I$ ) и контур  $L_0^n$  на  $j$ -м интервале  $[s_{0j-1}, s_{0j}]$  ( $j = 1, \dots, J$ ) параболой, а  $\gamma_1^n(s_1^n)$  и  $q^n(s_0)$  на этих же интервалах — линейной функцией. Решив систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функций  $\gamma_1^n(s_1^n)$  и  $q^n(s_0)$  на концах интервалов, из (2.1) находим значения  $V^n(z)$  в точках  $z^n(s_{0j}^*) \in L_0^n$ , а затем из (2.7) распределенные и суммарные гидродинамические характеристики.

4. На основе разработанного метода проведено решение задачи о разгонном движении кругового цилиндра радиуса  $R$  под свободной поверхностью тяжелой жидкости ( $\rho_* = 1$ ). Безразмерными параметрами задачи являются: число Фруда  $\text{Fr} = U_0/\sqrt{gR}$ , время  $\tau = tU_0/R$  (время, до которого цилиндр совершает разгон  $T_1 = TU_0/R$ ), отстояние центра цилиндра от невозмущенной свободной поверхности  $h/R$ . Выбирались следующие значения параметров:  $h/R = 2$ ,  $\text{Fr} = 0,5; 1; 1,4142$ ,  $T_1 = 0,05; 1$ .

Вычислительная область рассматривалась на отрезках  $[-25, 25]$  при  $\text{Fr} = 0,5$ ,  $[-30, 30]$  при  $\text{Fr} = 1$  и  $[-35, 35]$  при  $\text{Fr} = 1,4142$ . Число узлов на свободной поверхности выбиралось соответственно равным 500, 600 и 700, на контуре — 60. Исключение волн, отраженных от границ вычислительной области, выполнялось введением демфирующего слоя на отрезках длиной  $5R$ , расположенных на концах расчетного интервала, по технологии, описанной в [7]. Интегрирование системы уравнений (2.4), (2.5) по времени проводилось методом Рунге — Кутты — Фельберга пятого порядка точности [8]. Шаг по времени менялся динамически от  $\Delta\tau = 0,05$  до  $\Delta\tau = 0,01$ . Значение производной  $\partial G(s_1, t)/\partial s_1$ , угол наклона границы раздела сред  $\theta_1(s_1, t)$  к оси  $x$ , а также интегралы, входящие в выражения для гидродинамических нагрузок (2.7), вычислялись при помощи кубических сплайнов. Коротковолновая неустойчивость, возникающая на свободной поверхности, устранялась фильтрационной процедурой, разработанной в [9]. Решение системы линейных алгебраических уравнений проводилось методом верхней релаксации. Для повышения точности расчета с момента появления вертикального участка на свободной поверхности до времени полного обрушения волн  $\tau_*$  применялось переразбиение, основанное на использовании параметрических сплайнов.

Процесс решения задачи контролировался при помощи интегрального закона сохранения энергии. При всех указанных выше предположениях относительно числа узлов и величины шага  $\Delta\tau$  изменение энергии во время счета не превышало 1%.

В таблице приведены значения  $\tau_*$ , при которых происходит обрушение волн, вызванных разгонным движением кругового цилиндра из состояния покоя ( $h/R = 2$ ), и отражено влияние величины  $T_1$  на время  $\tau_*$  для различных значений числа Фруда. Получен

естественный результат: уменьшение времени разгона приводит к более сильным возмущениям и более раннему времени обрушения. С ростом числа Фруда  $Fr$  наблюдается увеличение  $\tau_*$ .

$T_1$	$\tau_*$		
	$Fr = 0,5$	$Fr = 1$	$Fr = 1,4142$
0,05	4,68	10,27	21,92
1,0	5,37	11,81	23,78

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчета формы свободной поверхности, на рис. 3 — коэффициенты:  $a$  — волнового сопротивления  $C_x = 2R_x/\rho_1 R U_0^2$ ;  $b$  — подъемной силы  $C_y = 2R_y/\rho_1 R U_0^2$  для  $T_1 = 1$ ,  $Fr = 0,5$ ; 1. Свободная поверхность ведет себя следующим образом: сначала образуется возвышение перед контуром, вызванное разгоном, затем оно начинает уменьшаться и одновременно с этим формируется всплеск из впадины за цилиндром, далее наступает момент образования вертикального участка на свободной поверхности, после чего происходит обрушение волны. При этом энергия обрушающейся волны подпитывается за счет убывания свободной поверхности в сформированной впадине. Такая картина обрушения обнаружена для всех указанных выше значений числа

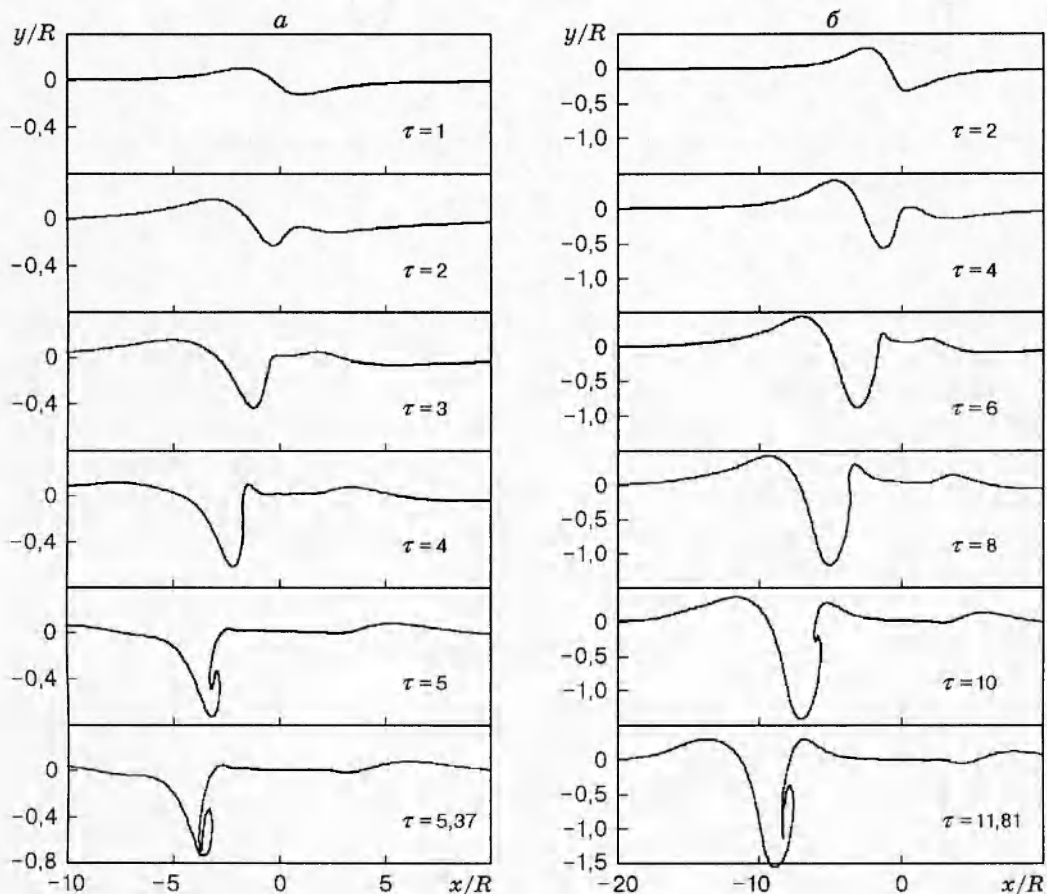


Рис. 1. Форма свободной поверхности:  
 $a$  —  $Fr = 0,5$ ;  $b$  —  $Fr = 1$

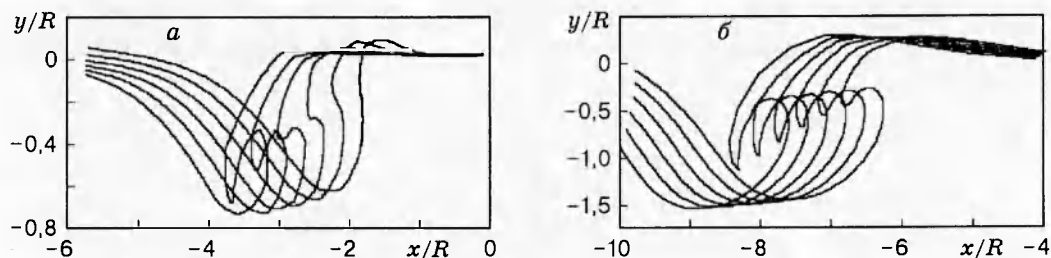


Рис. 2. Обрушение волн в последовательные моменты времени:  
 а —  $\tau = 4,1; 4,35; 4,6; 4,85; 5,1; 5,37$  при  $Fr = 0,5$ ; б —  $\tau = 10,55; 10,8; 11,05; 11,3; 11,55; 11,81$  при  $Fr = 1$

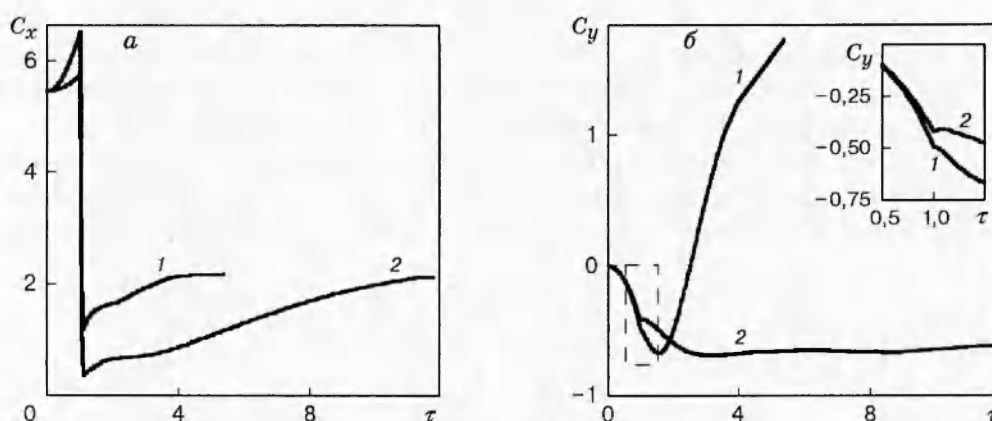


Рис. 3. Коэффициенты волнового сопротивления (а) и подъемной силы (б) кругового цилиндра:  
 1 —  $Fr = 0,5$ ; 2 —  $Fr = 1$

Фруда. Волновое сопротивление с течением времени возрастает, что является типичным признаком нестационарности течения, вызванного движением тела [10]. Подъемная сила отрицательна на всем интервале движения и немонотонна. Следует отметить, что при  $Fr = 0,5$  обнаружен участок положительной подъемной силы, что соответствует выталкивающей силе, действующей на цилиндр. Другая интересная особенность в поведении гидродинамических нагрузок связана с отсутствием монотонности в малой окрестности  $\tau = 1$ , что объясняется разрывностью ускорения. Существует ряд явных аналитических формул, подтверждающих этот факт (см., например, [11]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yeung R. W. Numerical methods in free-surface flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 395-442.
2. Romate J. E. The numerical simulation of nonlinear gravity waves // Eng. Anal. 1990. V. 7, N 4. P. 152-166.
3. Стурова И. В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн. Красноярск, 1990. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 5).
4. Chen L., Vorus W. S. Application of a vortex method to free surface flows // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1992. V. 14, N 11. P. 1289-1310.

5. Kim Y. J., Hwang J. H. Time-domain calculation of nonlinear free-surface flows around two-dimensional lifting foils // Proc. Intern. Conf. Hydrodyn. Wuxi, 1994. P. 436–442.
6. Hess J. L. Higher-order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1973. V. 2, N 1. P. 1–15.
7. Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A. Application of a generalized vortex method to nonlinear free-surface flows // Proc. 3rd Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodyn. Paris, 1981. P. 179–191.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
9. Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computations // Proc. Roy. Soc. London. 1976. V. A350. P. 1–26.
10. Афанасьев К. Е. Решение нелинейных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами методами конечных и граничных элементов: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Кемерово, 1997.
11. Горелов Д. Н. Теория крыла в нестационарном потоке. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1975.

*Поступила в редакцию 18/VIII 1997 г.,  
в окончательном варианте — 2/III 1998 г.*

---