Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

УДК 517.958

В. В. Шелухин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Введение. Многие течения вязкой сжимаемой жидкости можно описывать с помощью одномерных уравнений. Математические вопросы течений с плоскими волнами в случае, когда траектории частиц прямолинейны, исследовались в [1]. В данной работе рассматривается более общий класс движений с плоскими волнами без условий на характер траекторий жидких частиц. Пример такого движения — течение между двумя параллельными плоскостями, когда каждая жидкая плоскость, параллельная граничным плоскостям, движется поступательно, как твердое тело, т. е. когда все частицы жидкой плоскости имеют одинаковую скорость. Ясно, что в описанном движении траектории всех частиц одинаковы, но они могут и не быть прямолинейными.

Указанным движениям соответствуют решения трехмерных уравнений движения, инвариантные относительно группы трансляций по переменным, чьи оси параллельны граничным плоскостям. Для простоты будем считать эти плоскости горизонтальными.

Требование инвариантности приводит к тому, что в уравнениях остаются только производные по времени и по одной пространственной вертикальной переменной. Все функции, входящие в уравнения, не зависят от пространственных горизонтальных координат. При этом горизонтальные компоненты скорости удовлетворяют параболическим уравнениям, не содержащим давления. Для вертикальной же компоненты скорости получается система, в которую горизонтальные компоненты входят через уравнение энергии.

Таким образом, условие инвариантности фактически сводит исходную систему трехмерных уравнений к одномерной системе, рамки которой позволяют учитывать сдвиги жидких слоев относительно друг друга, в отличие от уравнений для прямолинейных траекторий [1].

В работе доказывается однозначная разрешимость этой задачи для случая, когда давление зависит лишь от плотности, а связь между удельной внутренней энергией и температурой такая же, как для совершенного газа. Тем самым обосновывается возможность поступательного движения жидких слоев. С другой стороны, устанавливается факт, что движение жидких слоев с дополнительной степенью свободы, т. е. когда допустимо твердотельное вращение материальных плоскостей с угловой скоростью, направленной вертикально и различной для разных плоскостей, невозможно.

В качестве примера использования инвариантных решений в данной работе рассматривается роль сдвигового течения в формировании температурного режима слоя вязкой сжимаемой жидкости. Для случая, когда слой теплоизолирован и верхняя граничная плоскость движется равномерно с постоянной скоростью на неизменном расстоянии от нижней неподвижной граничной плоскости, исследуется асимптотика температуры с увеличением времени. Доказывается, что температура растет по линейному закону.

Замечание 1. Если газ не обладает свойствами вязкости и теплопроводности, то требование инвариантности предполагает, что траектории в некоторой системе отсчета прямолинейны. Это следует из того, что горизонтальные компоненты скорости частиц постоянны во времени [2], поэтому возможен переход в другую инерциальную систему отсчета, где горизонтальное движение отсутствует.

Постановка задачи и основной результат. В декартовой прямоугольной системе координат рассматривается течение слоя вязкой сжимаемой жидкости ($0 < x < 1$) между двумя плоскостями, одна из которых (верхняя) движется поступательно на расстоянии $h = 1$ от нижней неподвижной плоскости. Поле силы тяжести направлено вниз по оси x.

Считается, что тензор напряжения $\mathbf{P}$ и тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ связаны между собой тем же реологическим соотношением, что и в модели Навье — Стокса [1]:

$$\mathbf{P} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

(λ, μ — коэффициенты вязкости, p — давление, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\mathbf{I}$ — единичный тензор). Пусть u, v, w — компоненты вектора скорости жидкости, направленные вдоль осей x, y, z соответственно, ρ — плотность, θ — температура, U — удельная внутренняя энергия. В предположении, что все перечисленные параметры течения зависят лишь от переменной x и времени t, законы сохранения импульса, массы и энергии вязкой теплопроводной жидкости имеют вид [1]

$$\rho(u_t + uu_x) = -p_x + \nu u_{xx} - \rho g; \tag{1}$$

$$\rho(v_t + uv_x) = \mu v_{xx}; \tag{2}$$

$$\rho(w_t + uw_x) = \mu w_{xx}; \tag{3}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0; \tag{4}$$

$$\rho(U_t + uU_x) = æ\theta_{xx} - pu_x + \nu u_x^2 + \mu(v_x^2 + w_x^2). \tag{5}$$

Здесь $\nu = \lambda + 2\mu$; $æ$ — коэффициент теплопроводности; g — плотность силы тяжести ($g \geqslant 0$). Эти параметры считаются положительными постоянными. Система (1)–(5) замыкается следующими уравнениями состояния:

$$p = \varphi(\tau), \qquad U = c_V\theta$$

($\tau = \rho^{-1}$ — удельный объем, c_V — положительная константа, $\varphi(\tau)$ — заданная функция на вещественной полуоси $R^+ = \{r : r > 0\}$). В частности, для плотных газов типа Тэта $\varphi(\tau) = A + B\tau^{-\gamma}$ (A и B — константы [2]). Заметим, что сформулированная модель не является локально равновесной [3]. Это означает, что какой бы ни была зависимость энтропии s от θ и τ, термодинамическое тождество $dU = \theta ds - pd\tau$ в общем случае несовместимо с системой (1)–(5) при указанных уравнениях состояния.

Предполагается, что слой теплоизолирован и проскальзывание на граничных плоскостях отсутствует. Пусть $0, V, W$ — компоненты скорости перемещения верхней плоскости. Тогда сделанным предположениям соответствуют равенства

$$\begin{aligned} &u = v = w = \theta_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ &u = \theta_x = 0, \quad v = V(t), \quad w = W(t) \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Функции u_0, v_0, w_0, ρ_0, θ_0, задающие начальные условия

$$(u, v, w, \rho, \theta) = (u_0, v_0, w_0, \rho_0, \theta_0) \qquad \text{при} \qquad t = 0, \tag{7}$$

считаются зависящими лишь от x.

Данный тип течения можно также описывать в лагранжевых переменных. Пусть $\int\limits_0^1 \rho_0(x)dx = 1$. Если ввести массовую лагранжеву переменную $x := \int\limits_0^x \rho(\xi, t)d\xi$, то в новых координатах слой будет иметь по-прежнему единичную толщину и уравнения (1)–(5) примут вид [1]

$$u_t = \nu(\rho u_x)_x - p_x - g, \quad \tau_t = u_x, \quad \tau = \rho^{-1}; \tag{8}$$

$$v_t = \mu(\rho v_x)_x, \quad w_t = \mu(\rho w_x)_x; \tag{9}$$

$$c_V \theta_t = æ(\rho\theta_x)_x - pu_x + \mu\rho(v_x^2 + w_x^2) + \nu\rho u_x^2. \tag{10}$$

Краевые условия (6) при этом не изменятся.

Движение верхней плоскости в силу внутреннего трения действует как внешний источник тепла. Основная цель данной работы — получить асимптотику температуры с ростом времени в случае, когда верхняя плоскость движется с постоянной скоростью V; точнее, основное содержание работы посвящено доказательству асимптотики $\theta \to (\lambda/c_V)V^2 t + E + \beta(x)$ при $t \to \infty$, где E — постоянная.

Корректность. Структура уравнений (8)–(10) такова, что они могут быть решены последовательно. Сначала из уравнений (8) находятся функции u, τ, затем из системы (9) — функции v, w, а после этого из уравнения (10) — функция θ.

Начально-краевая задача с условиями

$$u\Big|_{x=0, x=1} = 0, \qquad (u, \tau)\Big|_{t=0} = (u_0, \tau_0) \tag{11}$$

для системы (8) исследовалась во многих работах. Подробную библиографию можно найти в [1] . Приведем один результат из [4] (он остается в силе, несмотря на то что получен при $g = 0$). Если выполнены условия

$$\begin{gathered} p(\tau) > 0, \quad p(1) = 1, \quad p'(\tau) < 0, \quad p(\tau) \in C^1(0, \infty), \quad \int\limits_0^1 \tau_0(x)dx = 1, \\ 0 < m^{-1} \leqslant \tau_0 \leqslant m < \infty, \quad u_0(x), \tau_0(x) \in W_2^1(\Omega), \quad \Omega = \{x : 0 < x < 1\}, \end{gathered} \tag{12}$$

то существует единственное решение u, τ задачи (8),(11) на произвольном интервале времени $[0, T]$. При этом

$$\begin{gathered} u \in L_\infty\Big(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big) \bigcap L_2\Big(0, T; W_2^2(\Omega)\Big), \quad u_t, \tau_{xt} \in L_2\Big(0, T; L_2(\Omega)\Big), \\ \tau, \tau^{-1} \in L_\infty\Big(0, T; W_2^1(\Omega)\Big), \quad \tau > 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть v_0, w_0, $\theta_0 \in W_2^1(\Omega)$ и $v_0 - xV$, w_0 обращаются в нуль при $x \in \partial\Omega$. Свойства функции τ позволяют применить к параболическим уравнениям (9) известные результаты [5], гарантирующие существование функций v, w той же гладкости, что и u. При известных функциях u, τ, v, w и при той гладкости, которой они обладают, уравнение (10) можно считать линейным параболическим относительно θ. Согласно [5], это уравнение однозначно разрешимо, и θ имеет ту же гладкость, что и u. Последний факт можно также установить, применяя методику, предложенную в [1] для политропного газа.

Стабилизация. Поведение решения задачи (8), (11) при $t \to \infty$ исследовалось во многих работах. В [4, 6] доказана стабилизация в отсутствие внешних сил. При движении жидкости в поле внешних массовых сил этот вопрос рассматривался в [7, 8]. Оказалось, что предельный стационарный режим не вырожден не для всех газов. В терминах уравнения состояния и поля внешних сил были получены необходимые и достаточные условия того, что стационарный режим не вырожден, т. е. плотность не обращается в нуль. В [8] доказана стабилизация при условии, что стационарный режим не вырожден.

Существование невырожденного стационарного режима $\tau = \tau_s$, $u = 0$ эквивалентно выполнению соотношений

$$p_{sx} = -g, \qquad \int_0^1 \tau_s(x)dx = 1, \qquad \tau_s > 0. \tag{14}$$

Проведем краткий анализ плотности в стационарном состоянии для задачи (8), (11) в случае, когда $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$, $\gamma \geqslant 1$. Случай $0 < \gamma < 1$ рассматривался в [7]. Ясно, что все сводится к отысканию константы d такой, что

$$d > g, \qquad 1 = \int_0^1 (d - gx)^{-1/\gamma} dx. \tag{15}$$

При $\gamma = 1$ этим соотношениям удовлетворяет константа d, равная $g(1 - \exp(-g))^{-1}$. При $\gamma > 1$ соотношения (15) разрешимы относительно d тогда и только тогда, когда $g < (\gamma/(\gamma-1))^\gamma \equiv g^*$ (это условие получено в [8]). Действительно, если искать d в виде $d = qg$, то из (15) следует уравнение для q:

$$g^r(\chi(q) - rg^{1-r}) = 0 \qquad \left(\chi(q) = q^r - (q-1)^r, \qquad r = 1 - \frac{1}{\gamma}\right). \tag{16}$$

Поскольку $\chi(q) \leqslant 1$ при $q \geqslant 1$ и $\chi(q) \to 0$ при $q \to \infty$, то уравнение (16) неразрешимо при $g > g^*$ и однозначно разрешимо при $g < g^*$. При $g = g^*$ решением является $q = 1$, что несовместимо с неравенством из (15).

Пусть наряду с (12) функция $p(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям. Для некоторой положительной константы Π

$$\tau p(\tau) \leqslant \Pi(\Phi(\tau) + 1) \quad \text{при} \quad 0 < \tau \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to 0+} p(\tau) = \infty \quad \left(\Phi(\tau) = \int_\tau^1 p(s)ds\right). \tag{17}$$

В частности, для $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ эти условия выполнены.

В [8] показано, что стабилизация в задаче (8),(11) имеет место, если уравнение состояния $p = p(\tau)$ удовлетворяет условиям (12), (17) и задача (14) разрешима относительно τ_s. Кроме того, для решения справедливы оценки

$$\begin{gathered} ||u, u_x, \tau_x | L_\infty(R^+; L_2(\Omega))|| + ||(\tau - \tau_s), (\tau - \tau_s)_\tau, u_{\tau\tau} | L_2(R^+; L_2(\Omega))|| \leqslant c, \\ ||\tau, \tau^{-1} | L_\infty(Q)|| \leqslant c, \quad Q = \{x, t : 0 < x < 1, \quad t > 0\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь и далее c служит для обозначения, вообще говоря, различных положительных констант, не зависящих от T. Иногда такие константы будут снабжаться индексами. В той же работе показано, что сходимость $||\tau - \tau_s, u | L_2(\Omega)|| \to 0$ при $t \to \infty$ экспоненциальна.

Асимптотика температуры. Рассмотрим частный случай задачи (6)–(10), когда $V(t) = \text{const} \equiv V$, $W(t) \equiv 0$. Это означает, что верхняя плоскость движется равномерно с постоянной скоростью V вдоль оси y. Будем считать для простоты, что $w \equiv 0$. Учет движения вдоль оси z ненамного бы усложнил задачу в математическом отношении. Это объясняется тем, что дальнейшее исследование будет заключаться в получении не зависящих от времени оценок параметров течения. Функции же v, w входят в систему (8)–(10) одинаковым образом, и каждая из них может быть найдена независимо от другой.

Обозначим $\alpha = v - V\int\limits_0^x \tau(\xi,t)d\xi$. Тогда $\alpha = 0$ при $x \in \partial\Omega$, и выполняется уравнение $\alpha_t = \lambda(\rho\alpha_x)_x - uV$.

Будем в дальнейшем обозначать через $||\cdot||$ и $(\cdot,\cdot)$ норму и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Из энергетического равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\alpha||^2 + \lambda||\rho^{1/2}\alpha_x||^2 = -V(u,\alpha)$$

и неравенства $||\alpha|| \leqslant ||\rho^{1/2}\alpha_x||$ находим оценку

$$||\alpha(t)||^2 \leqslant \exp(-\lambda t)||\alpha(0)||^2 + V^2\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))||u(s)||^2 ds. \tag{19}$$

Поэтому, в силу того что $\rho \geqslant c > 0$ и $||u|L_2(Q)|| \leqslant c$, имеет место оценка

$$\int\limits_0^\infty \left|\frac{d}{dt}||\alpha(t)||^2\right| dt + ||\alpha,\alpha_x|L_2(Q)|| + ||\alpha|L_\infty(R^+;L_2(\Omega))|| \leqslant c,$$

в частности, означающая, что $||\alpha(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того, из (19) вытекает, что указанная сходимость экспоненциальна, поскольку такой тип убывания по времени справедлив для нормы $||u(t)||$.

Умножение уравнения (18) на α_{xx} и последующее интегрирование по x приводят к равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\alpha_x||^2 + \lambda||\rho^{1/2}\alpha_{xx}||^2 = V(u,\alpha_{xx}) - \lambda(\rho_x\alpha_x,\alpha_{xx}).$$

Ввиду оценок (18) отсюда следует неравенство

$$\sigma' \leqslant a(t)\sigma + b(t) \qquad (\sigma(t) = ||\alpha_x(t)||^2, \quad a(t) = c||\tau_x(t)||^2, \quad b(t) = c||u(t)||^2),$$

из которого по лемме Гронуолла [5] нетрудно заключить, что

$$||\alpha_x|L_\infty(R^+;L_2(\Omega))|| + ||\alpha_{xx}|L_2(Q)|| \leqslant c.$$

Описанные выше оценки для функций τ, u, α позволяют изучить поведение при $t \to \infty$ функции θ, являющейся решением задачи

$$c_V\theta_t = æ(\rho\theta_x)_x + F, \qquad \theta_x\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \theta\Big|_{t=0} = \theta_0(x),$$

где $F = f + \lambda V^2\tau$; $\qquad f = -pu_x + \nu\rho u_x^2 + \lambda\rho\alpha_x^2 + 2V\lambda\alpha_x$.

Рассмотрим функцию

$$\beta(x) = a\int\limits_0^1\int\limits_y^x \xi\tau_s(\xi)d\xi dy - \frac{a}{2}\Big(\int\limits_0^x \tau_s(\xi)d\xi\Big)^2 + \frac{a}{2}\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^y \tau_s(\xi)d\xi\Big)^2 dy, \quad a = \frac{\lambda V^2}{æ}.$$

Видно, что она является решением задачи

$$æ(\rho_s\beta_x)_x + \lambda V^2(\tau_s - 1) = 0, \quad \beta_x\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_0^1 \beta(x)dx = 0.$$

Введем функцию $\psi(t)$:

$$c_V\psi(t) = \lambda V^2 t + A(t) \qquad \Big(A(t) = \int_0^t\int_0^1 f dxds + c_V\int_0^1 \theta_0 dx\Big).$$

Тогда функция $\zeta = \theta - \psi - \beta$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} c_V\zeta_t = æ(\rho\zeta_x)_x + æ((\rho - \rho_s)\beta_x)_x + G, \\ \zeta_x\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_0^1 \zeta dx = 0, \quad \zeta\Big|_{t=0} = \theta_0 - \psi(0) - \beta(x). \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $G = f - \int_0^1 f dx + \lambda V^2(\tau - \tau_s)$.

Полученные ранее оценки гарантируют включение $G \in L_2(Q)$. Чтобы в этом убедиться, вполне достаточно показать, что $u_x^2 \in L_2(Q)$.

Из неравенства $J \equiv \max_x |u_x| \leqslant ||u_{xx}||$ получим

$$\int_Q u_x^4 dxdt \leqslant \int_0^\infty J(t)^2\Big(\int_\Omega u_x^2 dx\Big)dt \leqslant ||u_x|L_\infty\Big(R^+; L_2(\Omega)\Big)||^2||u_{xx}|L_2(Q)||^2,$$

что в силу оценок (18) обеспечивает требуемое включение.

Умножение уравнения (20) на ζ приводит к оценке

$$\int_0^\infty (||\zeta(t)||^2 + \Big|\frac{d}{dt}||\zeta(t)||^2\Big|)dt \leqslant c.$$

Это означает, что $||\zeta(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$.

Поскольку справедливо равенство

$$\int_0^t\int_0^1 -pu_x dxds = \int_0^1 \Phi(\tau)dx - \int_0^1 \Phi(\tau_0)dx,$$

то функция $A(t)$ является ограниченной равномерно по $t \in R^+$. Кроме того, по теореме Лебега [9] предел при $t \to \infty$ у функции A существует и ограничен.

Обозначим $E = (1/c_V)\lim\limits_{t\to\infty} A(t)$. Таким образом, доказано, что температура θ имеет асимптотику $\theta \to (\lambda/c_V)V^2 t + E + \beta(x)$ при $t \to \infty$ в норме $L_2(\Omega)$.

Следует отметить, что константа E зависит не только от начальной температуры, но и от всей истории движения, т. е. в конечном итоге от начального состояния среды.

З а м е ч а н и е 2. Поясним, почему невозможно вращение жидких плоскостей вокруг вертикальных осей. Допустимость такого движения означала бы, что уравнениям

$$\rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) = \operatorname{div}\mathbf{P} - \rho g, \quad \mathbf{P} = (-p + \lambda\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad 2\mathbf{D} = \mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}, \quad p = p(\rho)$$

удовлетворяют функции $\rho(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ вида

$$\rho = \rho(x,t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_*(x,t) + \mathbf{e} \times \mathbf{r}\omega(x,t),$$

где $\mathbf{x} = (x,y,z)$; $\mathbf{r} = (0,y,z)$; $\mathbf{e} = (1,0,0)$; $\omega(x_0,t)$ — мгновенная угловая скорость слоя $x = x_0$. Но такое выполняется лишь в случае $\omega \equiv 0$.

Замечание 3. Если систему (1)–(5) замкнуть уравнениями состояния $p = R\rho\theta$, $U = c_V\theta$, то она будет представлять собой модель совершенного политропного вязкого газа. В математическом отношении такая модель более сложная, поскольку скорость и плотность уже не могут быть найдены независимо от температуры; система становится полностью «перевязанной».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Международного научного фонда (NR 5300), а также Грантового центра Санкт-Петербургского госуниверситета (ЗН-257-94).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. **Черный Г. Г.** Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
3. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Кажихов А. В.** О стабилизации решений начально-краевых задач для уравнений баротропной вязкой жидкости // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 4. С. 662–667.
5. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. **Шелухин В. В.** Стабилизация решений одной модельной задачи о движении поршня в вязком газе // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1978. Вып. 33. С. 134–146.
7. **Beirão Da Veiga H.** The stability of one dimensional stationary flows of compressible viscous fluids // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1990. V. 7, N 4. P. 259–268.
8. **Злотник А. А.** Об уравнениях одномерного движения вязкого баротропного газа при наличии массовой силы // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 62–79.
9. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 21/II 1995 г.,
в окончательном варианте — 24/V 1995 г.