

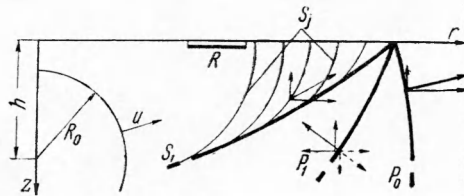
ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОГО
ГРУНТА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ВЗРЫВЕ

Н. И. Онисько, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

Рассматривается задача о распространении сейсмических волн в полубезграничной упругой среде, вызванных нестационарным сферически симметричным источником. Эта задача поставлена в связи с изучением волновых процессов, возникающих в грунтах при подземных взрывах. Основное внимание уделено построению теоретических осциллограмм движения точек свободной поверхности среды, при этом считается, что источник волн описывается функцией, выбранной на основе экспериментальных данных о камуфлетном взрыве.

§ 1.1. Пусть в однородной изотропной упругой среде с параметрами Ляме λ и μ и плотностью ρ на некоторой сфере радиуса R_0 с центром в точке O (фиг. 1) задан сигнал-источник.



« Фиг. 1. К постановке задачи »

В задаче о распространении волн при подземных взрывах сигнал можно описать посредством скорости частицы $u_R = u_R(t)$ при движении ее по радиусу из точки O или посредством нормального напряжения $\sigma_R = \sigma_R(t)$.

Рассмотрим задачу о распространении сигнала $u_R(t)$.

Будем считать, что при $t < 0$ среда покоится, а сигнал включается при $t = 0$.

В задаче с центральной симметрией для упругой среды перемещение частицы по радиусу w может быть представлено в виде

$$w(R, t) = \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\Phi(\xi)}{R} \right], \quad \xi = t - \frac{R - R_0}{v_p}, \quad v_p = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi(\xi)$ и v_p — потенциал и скорость распределения продольных волн

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u_R(t) \quad \text{при } R = R_0 \quad (1.2)$$

где $u_R(t) = u_0 f(t)$ — заданная функция, u_0 — постоянная размерности скорости, $f(t)$ — некоторая непрерывная функция, $f(0) = 0$.

Из (1.2) следует уравнение для $\Phi(\xi)$, решение которого при нулевых начальных данных $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ определяется функцией

$$\frac{\Phi(\xi)}{R} = - \frac{u_0 R_0^2}{R} \int_0^\xi f(\xi - \tau) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau v_p}{R_0}\right) \right] d\tau \quad (1.3)$$

Дифференцированием по R определяется смещение $w(r, t)$, а дополнительным дифференцированием по t определится и скорость частиц $u_R(R, t)$.

Для дальнейшего формулу (1.3) полезно представить в виде

$$\frac{\Phi(\xi)}{R} = -u_0 R_0^2 \int_0^\xi f_1(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{s(\xi-\tau)}}{sR} ds \right] d\tau \quad (1.4)$$

$$f_1(\tau) = \frac{R_0}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{F(\mu)}{R_0\mu + v_p} e^{\mu\tau} d\mu, \quad F(\mu) = \int_0^\infty f(t) e^{-\mu t} dt$$

Здесь в контурных интегралах $\sigma > 0$ и $\sigma_1 > 0$.

На основании (1.4) можно заключить следующее. Решение задачи о распространении сигнала в упругих средах можно рассмотреть сначала для некоторого элементарного сигнала $\Phi_0(\xi)$, а затем при помощи (1.4) перейти к реальному изменению сигнала во времени. Это соответствует замене сигнала, заданного на сфере $R = R_0$, сигналом пространственно сосредоточенного источника.

Роль такого $\Phi_0(\xi)$ в дальнейшем будут играть потенциалы

$$\Phi_\delta(\xi) = \frac{u_0 R_0^2}{R} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{s\xi}}{s} ds, \quad \Phi_\varepsilon(\xi) = -\frac{u_0 R_0^2}{R} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{s\xi}}{s^2} ds \quad (1.5)$$

описывающие соответственно изменение скорости частиц времени для сосредоточенного источника типа $\delta(t)$ и изменение точечного источника во времени как $\varepsilon(t)$; в этих формулах $\delta(t)$ — функция Дирака, а $\varepsilon(t)$ — единичная функция

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}, \quad \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Для применения формулы (1.5) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) нужно выполнить некоторые преобразования; в результате первая формула (1.5) примет вид

$$\Phi_\delta(\xi) = -u_0 R_0^2 \int_0^\infty k J_0(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\exp[st'(h-z)\sqrt{a^2s^2+k^2}]}{s\sqrt{a^2s^2+k^2}} ds \right\} dk \quad (1.6)$$

Здесь h — ордината центра источника, z — ордината точки наблюдения, (l) — контур:

$$\xi = t' - a\sqrt{r^2 + (h-z)^2}, \quad t' = t + aR_0, \quad a = \frac{1}{v_p} \quad (\text{Re } s = \sigma > 0)$$

Формула (1.6) описывает возмущения, излучаемые источником в направлении отрицательной полуоси z .

В заключение п. 1 приведем формулы, аналогичные (1.4), для сигнала второго типа; на сфере радиуса $R = R_0$ задано нормальное напряжение $\sigma_R(t) = -\sigma_0 g(t)$, где σ_0 — постоянная размерности напряжения, $g(t)$ — некоторая непрерывная функция, $g(0) = 0$.

Вместо (1.3) в этом случае [1] служит формула (1.7)

$$\frac{\Phi(\xi)}{R} = -\frac{\sigma_0 R_0}{\rho R} \int_0^\xi g(\xi - \tau) e^{-n\tau} \frac{\sin m\tau}{m} d\tau \quad \left(n = \frac{2\mu a}{\rho R_0}, \quad m = n \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\mu}} \right)$$

а вместо (1.4)

$$\frac{\Phi(\xi)}{R} = -\frac{\sigma_0 R_0}{\rho} \int_0^\xi g_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{s(\xi-\tau)}}{sR} ds \right] d\tau \quad (1.8)$$

где

$$g_1(\tau) = \frac{i}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{sG(s)e^{s\tau}}{m^2 + (s+n)^2} ds, \quad G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

При этом выражения для потенциалов элементарных сигналов в сферических и цилиндрических координатах сохраняют прежний вид.

Приводим формулы для вычисления главных нормальных напряжений $\sigma_R(R, t)$ и $\sigma_\varphi(R, t)$ в произвольной точке среды, отвечающие источнику $\sigma_R(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_R(R, t)}{\rho} &= \frac{\Phi''(\xi)}{R} + 4 \frac{v_s^2}{v_p} \frac{\Phi'(\xi)}{R^2} + 4v_s^2 \frac{\Phi(\xi)}{R^3}, \quad v_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \\ \frac{\sigma_\varphi(R, t)}{\rho} &= \left(1 - \frac{v_s^2}{v_p^2}\right) \frac{\Phi''(\xi)}{R} - 2 \frac{v_s^2}{v_p} \frac{\Phi'(\xi)}{R^2} - 2v_s^2 \frac{\Phi(\xi)}{R^3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Формулы (1.9) выведены при помощи (1.1), (1.7) и закона Гука и описывают сложное изменение напряжений с расстоянием по сравнению с изменением давления в аналогичной задаче для жидкости. Как следует из (1.9), присутствие вторых и третьих членов в этих формулах целиком объясняется сопротивлением среды сдвигу ($\mu \neq 0$); если положить $\mu = 0$, т. е. $v_s = 0$ (скорость распространения поперечных волн v_s обращается в нуль при $\mu = 0$), то из (1.9) следует решение задачи для жидкости

$$\sigma_R(R, t) = \sigma_\varphi(R, t) = \frac{\rho \Phi''(\xi)}{R} \quad (1.10)$$

Первые члены в (1.9) определяют асимптотическое поведение напряжений при $R \rightarrow \infty$. Если ввести понятие о длине нестационарной волны $\lambda = v_p T$, где T — некоторое характерное время сигнала, то первые члены в (1.9) будут описывать поведение напряжений во времени с хорошей точностью на расстояниях $R \gg \lambda$. Основным интерес для нас будет представлять изучение полей возмущений на расстояниях, сравнимых с длиной волны. В этом случае нельзя ограничиться асимптотическими формулами и следует обратиться к точным формулам.

2. Рассмотрим задачу для упругого полупространства $z \geq 0$, если внутри него в точке $z = h$ задан элементарный сигнал, описывающий поле продольных волн с потенциалом типа (1.5) для сигнала типа $u_R(t)$.

Построение решения может быть выполнено либо методом В. И. Смирнова — С. Л. Соболева [2], либо методом неполного разделения переменных [3].

Как известно, при падении на свободную поверхность $z = 0$ волны, описываемой продольным (или поперечным) потенциалом $\Phi_0(\xi)$, от поверхности отражаются волны, описываемые продольным $\varphi_1(r, z, t)$ и поперечным $\psi_1(r, z, t)$ потенциалами. Потенциалы отраженного поля можно представить при помощи следующих выражений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z, t) &= \int_0^{\infty} R_1(z, t, k) J_0(kr) dk \\ \psi_1(r, z, t) &= \int_0^{\infty} S_1(z, t, k) J_1(kr) dk \\ R_1(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_1(k, s) e^{st-z\alpha_1} ds \\ S_1(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_1(k, s) e^{st-z\beta_1} ds \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$X_1(k, s) = -\frac{T}{R} X_0(k, s), \quad Y_1(k, s) = -\frac{4k\alpha_1\delta}{R} X_0(k, s)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{a^2s^2 + k^2}, \quad \beta_1 = \sqrt{b^2s^2 + k^2}, \quad g = 2k^2 + b^2s^2$$

$$b = \frac{4}{v_s}, \quad R = g^2 - 4k^2\alpha_1\beta_1, \quad T = g^2 + 4k^2\alpha_1\beta_1$$

При этом R_1 и S_1 представлены Мелиновскими контурными интегралами, а $X_0(k, s)$ следует взять в соответствии с (1.6) в виде

$$X_\delta(k, s) = -u_0R_0^2 \frac{k}{s^2\alpha_1} e^{-h\alpha_1} \tag{1.12}$$

либо в соответствии с (1.5) в виде

$$X_\varepsilon(k, s) = -u_0R_0^2 \frac{k}{s^2\alpha_1} e^{-h\alpha_1} \tag{1.13}$$

На основании зависимостей (1.11), (1.12) и (1.13) формулы, определяющие отраженное поле смещений для точечного источника типа (1.12) в полупространстве $z \geq 0$, можно привести к виду

$$w_r(r, z, t) = u_0R_0^2 \int_0^\infty kJ_1(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \left[\frac{\delta^2 + 4\alpha\beta}{\delta^2 - 4\alpha\beta} e^{-k(h+z)\alpha} - \frac{4\alpha\beta\delta}{\delta^2 - 4\alpha\beta} e^{-kz\beta - kz\alpha} \right] \exp \frac{k\zeta t}{b} \frac{d\zeta}{\zeta\alpha} \right\} dk$$

$$w_z(r, z, t) = -u_0R_0^2 \int_0^\infty kJ_0(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \left[\frac{\delta^2 - 4\alpha\beta}{\delta^2 + 4\alpha\beta} e^{-k(h+z)\alpha} - \frac{4\delta}{\delta^2 - 4\alpha\beta} e^{-kz\beta - kz\alpha} \right] \exp \frac{k\zeta t}{b} \frac{d\zeta}{\zeta\alpha} \right\} dk \tag{1.14}$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}, \quad \gamma = \frac{v_s}{v_p}, \quad \beta = \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad \delta = 2 + \zeta^2$$

а (l) — Мелиновский контур $\text{Re } \zeta = \sigma > 0; \arg \alpha = \arg \beta = 0$ при $\zeta > 0$.

Поле смещений, описываемое формулами (1.14), вызвано перемещениями в продольной волне от элементарного источника (1.12)

$$w_{r\delta} = \frac{u_0R_0^2}{R} \frac{r}{R} \left[a\delta(t - aR) + \frac{\delta(t - aR)}{R} \right]$$

$$w_{z\delta} = -\frac{u_0R_0^2}{R} \frac{h - z}{R} \left[a\delta(t - aR) + \frac{\varepsilon(t - aR)}{R} \right] \tag{1.15}$$

Полное поле смещений (1.14) и (1.15), отвечающее источнику (1.12), будет изучено в п. 3 и является вспомогательным в поставленной задаче.

Основное внимание будет уделено исследованию поля смещений на поверхности упругой среды, проведенному для получения точных осциллограмм движения точек поверхности для сигнала (1.13). При этом выражения $w_r(r, 0, t)$ и $w_z(r, 0, t)$, определенные ниже, описывают суммарное поле перемещений

$$w_{r\varepsilon}(r, 0, t) = 2A \int_0^\infty J_1(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\beta}{\delta^2 - 4\alpha\beta} \exp \left[k \left(\zeta \frac{t}{b} - h\alpha \right) \right] d\zeta \right\} dk \tag{1.16}$$

$$w_{z\varepsilon}(r, 0, t) = -A \int_0^\infty J_0(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\delta}{\delta^2 - 4\alpha\beta} \exp \left[k \left(\zeta \frac{t}{b} - h\alpha \right) \right] d\zeta \right\} dk$$

($A = 2u_0R_0^2$)

В заключение п. 2 отметим, что решения (1.14) и (1.16), полученные методом неполного разделения переменных, допускают элементарное исследование асимптотического поведения компонент поля перемещений, как это доказано работами ленинградской группы механиков, руководимой Г. И. Петрашением.

В поставленной задаче асимптотическое исследование полученных формул будет служить вспомогательным при качественном изучении особенностей волнового поля на основе формул (2.4) и (2.5).

В п. 3 рассматривается качественная волновая картина в упругом полупространстве. Детальные исследования точных решений задач динамической теории упругости, выполненные ленинградской группой динамиков (см., например, [3, 4, 1]), позволяют при выяснении качественной волновой картины быстро установить основные особенности волновых полей в конкретных задачах, если построены решения типа (1.14).

Эти исследования проводятся при помощи асимптотических методов для контурных интегралов (метод стационарной фазы) с последующим интегрированием по Фурье — Бесселю и предназначены в основном для изучения поля на больших расстояниях от источника ($R \gg \lambda$). При этом устанавливается однозначное соответствие между особенностями подынтегральных выражений в контурных интегралах из (1.14) и качественными особенностями волнового поля (см., например, [5]).

3. Не воспроизводя громоздких выкладок и оценок, связанных с вычислением главных членов в асимптотических представлениях возмущений в окрестности волновых фронтов, приведем картину фронтов волнового поля в некоторый момент времени (фиг. 1) и выпишем соответствующие приближенные формулы.

1°. В окрестности фронта прямой продольной волны P_0 поле перемещений описывается формулами (1.15) для источника (1.12).

Если же учесть формулу (1.4) и перейти к заданному изменению источника во времени, то главные части возмущений при $\sqrt{r^2 + (h-z)^2} \gg \lambda$ будут иметь вид

$$w_r \approx \frac{u_0 R_0^2}{v_p R} x f_1(\xi), \quad w_z \approx -\frac{u_0 R_0^2}{v_p R} \sqrt{1-x^2} f_1(\xi) \quad (x = \sin \alpha) \quad (1.17)$$

Здесь α — угол падения волны P_0 на границу.

Если рассматривать (1.17) вдоль некоторой плоскости $z = 0$, проходящей через безграничную упругую среду на отдалении h от центра источника, то w_r будет убывать так же, как и в безграничной среде: R^{-1} при $R \rightarrow \infty$, а w_z будет убывать как R^{-2} .

2°. В окрестности фронта отраженной продольной волны P_1 главные члены в приближенных асимптотических формулах имеют вид

$$x_{rp} \approx -\frac{u_0 R_0^2 x G_1(x)}{v_p \sqrt{r^2 + (h-z)^2}} f_1(\xi_1), \quad \xi_1 = t' - a \sqrt{r^2 + (h+z)^2} \quad (1.18)$$

$$w_{zp} \approx -\frac{u_0 R_0^2 G_1(x) \sqrt{1-x^2}}{v_p \sqrt{r^2 + (h-z)^2}} f_1(\xi_1)$$

Здесь

$$G_1 = \frac{(2\gamma^2 x^2 - 1)^2 - 4\gamma^3 x^2 \sqrt{1+x^2} \sqrt{1-\gamma^2 x^2}}{(2\gamma^2 x^2 - 1)^2 + 4\gamma^3 x^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\gamma^2 x^2}}$$

описывает изменение «амплитуды» отраженной волны в зависимости от угла отражения α . Интересно отметить, что знак вступления отраженной волны может изменяться, как об этом свидетельствует график функции G_1 для $\gamma = 0.6$ (фиг. 2). В соответствии с этими графиками на фиг. 2 на фронте волны P_1 стрелкой указано направление движения частицы при вступлении этой волны.

Формулы (1.18) указывают на характер изменения перемещения во времени, как и в прямой волне P_0 .

3°. В окрестности фронта поперечной волны S_1 , возникшей вместе с отраженной волной P_1 , соответствующие приближенные формулы

имеют вид

$$w_{rs} \approx \frac{u_0 R_0^2 \sqrt{1 - \gamma^2 x^2}}{v_p R^*} G_2(x) f_1(t - t_\Phi)$$

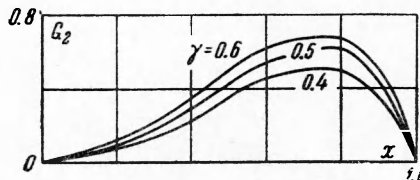
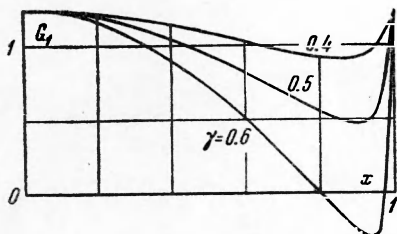
$$w_{zs} \approx - \frac{u_0 R_0^2 \gamma x}{v_p R^*} G_2(x) f_1(t - t_\Phi)$$
(1.19)

Здесь

$$G_2 = \frac{4\gamma x^2 \sqrt{1 - x^2} (1 - 2\gamma^2 x^2)}{(2\gamma^2 x^2 - 1)^2 + 4\gamma^3 x^2 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \gamma^2 x^2}}, \quad R^* = x \left\{ r \operatorname{tg} \alpha \left[h + \gamma z \left(\frac{1 - x^2}{1 - \gamma^2 x^2} \right)^{3/2} \right]^{1/4} \right\}$$

а t_Φ — время прихода поперечной волны в точку наблюдения¹ с координатами (r, z) , так что $t_\Phi = t_1 + t_2$, где t_1 — время пробега падающей волны P_0 до границы $z = 0$, а t_2 — время пробега поперечной отраженной волны S_1 . Напомним механизм образования поперечной волны S_1 . В каждой точке поверхности $z = 0$, в которую пришла продольная волна P_0 , возникают и сжатия, и сдвиги, которые затем распространяются с различными скоростями V_p и V_s . На фиг. 1 указаны элементарные волны S_j , уходящие от свободной поверхности в глубину полупространства. Огибающей этих волн и будет поперечная волна S_1 , уравнение этой огибающей в некоторый фиксированный момент $t = t_\Phi$.

Функция $G_2(x)$ для всех x и γ остается положительной (фиг. 3), это свидетельствует о том, что знаки вступления поперечной волны в момент $t = t_\Phi$ на записях $w_r(r, z, t)$ и $w_z(r, z, t)$ на всех расстояниях r при фиксированных z и h не меняются: при вступлении поперечной волны частица движется вверх и вперед от источника, совершая движение по касательной к фронту волны S_1 (фиг. 1).



Фиг. 2. Графики $G_1(x)$ для $\gamma = 0.4$ — I, $\gamma = 0.5$ — II и $\gamma = 0.6$ — III. Фиг. 3. Графики $G_2(x)$. Обозначения те же, что и на фиг. 2

Как было отмечено выше, для рассматриваемой задачи в решении (1.14) устанавливается соответствие между особенностями подынтегральных выражений контурных интегралов и особенностей поля возмущений. В интегралах Меллина из (1.14) подынтегральные функции имеют простые полюса в точках $\zeta = \pm i\vartheta$ ($0 < \vartheta < 1$) комплексной плоскости ζ . Вычеты в точках $\zeta = \pm i\vartheta$ и последующее элементарное интегрирование по k позволяют установить, что связанная с этим особенность поля возмущений есть не что иное как поверхностная волна релеевского типа [4]. В § 2 это возмущение будет рассмотрено подробнее, на основе точных формул для полного поля возмущений. Пока же следует отметить, что главная часть упомянутого возмущения распространяется со скоростью $v_R = \vartheta v_s < v_s$ и, следовательно, все это возмущение проявляется главным образом при временах наблюдения $t_R \approx r/v_R$ для заданных $r > h$, $r > z$.

¹ Время t_Φ определяется формулой

$$t_\Phi = \frac{1}{v_p} \sqrt{(r - r_0)^2 + h^2} + \frac{1}{v_s} \sqrt{r_0^2 + z^2}$$

Здесь r_0 для фиксированных r, z, h определяется из закона Снеллиуса

$$\gamma \sin \alpha = \sin \beta$$

где β — угол отражения поперечной волны S_1 .

Это замечание сделано по аналогии с известными результатами, но легко может быть подтверждено при помощи вычисления вычетов в точках $\xi = \pm i\psi$ в (1.14) и тщательного анализа особенностей этой волны в нашей задаче. На фиг. 1 это отображено условным знаком и буквой R — поверхностная волна.

Приведем, наконец, приближенные формулы для составляющих поля смещений на свободной поверхности среды. В точках поверхности $z = 0$ эти формулы описывают суммарное поле перемещений $P_0 + P_1 + S_1$ и могут быть получены либо при помощи асимптотических методов прямо из (1.14), либо суммированием главных частей (1.15), (1.18) и (1.19)

$$\begin{aligned} w_r(r, 0, t) &\approx \frac{4u_0 R_0^2 G_3(x)}{v_p \sqrt{r^2 + h^2}} j_1(\xi) \\ w_z(r, 0, t) &\approx -\frac{2u_0 R_0^2 G_4(x)}{v_p \sqrt{r^2 + h^2}} f_1(\xi) \end{aligned} \quad (1.20)$$

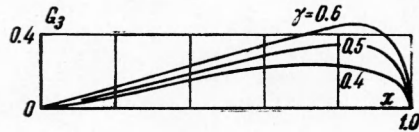
Здесь ξ — согласно (1.20); функции

$$\begin{aligned} G_3 &= \frac{1}{\Delta(x)} \gamma(x) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\gamma^2 x^2}, \quad G_4 = \frac{1}{\Delta(x)} \sqrt{1-x^2} (1-2\gamma^2 x^2) \\ \Delta(x) &= (2\gamma^2 x^2 - 1)^2 + 4\gamma^3 x^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\gamma^2 x^2} \end{aligned}$$

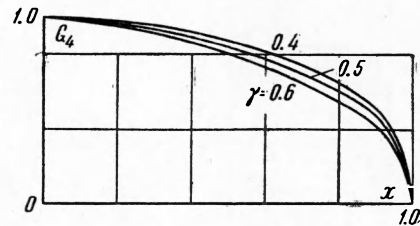
Как следует из (1.20), компоненты поля перемещений по-разному убывают с расстоянием, как это иллюстрируют графики фиг. 4, 5.

В связи с графиками $G_3(x)$ и $G_4(x)$ следует отметить, что при $r \gg \lambda$ законы убывания амплитуд с расстоянием для поля перемещений и поля скоростей одинаковы; изменяется только вид эпюры.

Отмеченные качественные особенности волновых возмущений позволяют указать основные типы волн в среде, их кинематические и динамические признаки. К первым, как и обычно, относим скорости распространения волн и времена прихода волн в заданную точку наблюдения; ко вторым — асимптотические законы затухания амплитуд, сравнительные интенсивности проявления различных волн, их знаки вступления на теоретической осциллограмме.



Фиг. 4. Графики $G_3(x)$



Фиг. 5. Графики $G_4(x)$

В то же время почти очевидно, что приведенные формулы вряд ли пригодны для количественных сравнений с опытными данными, разве что для среды, весьма близкой к упругой, и на расстояниях $r \gg \lambda$. Для получения более точных описаний волновых упругих возмущений в окрестности фронтов объемных волн необходимо, либо вычисление последующих членов асимптотического разложения, либо вычисление по точным формулам.

§ 2.1. Точные исследования поля перемещений могут быть выполнены, либо на основе решений, полученных методом В. И. Смирнова—С. Л. Соболева [2], либо на основе формул типа (1.14) или (1.16). Имея в виду поставленную задачу, ограничимся ниже изучением поля перемещений на поверхности $z = 0$ (1.16).

В работе [4] был указан простой способ сведения формул типа (1.16) к вещественным интегралам. При этом в контурных интегралах из (1.16) выбирается расположение разрезов вдоль мнимой оси от нижней точки ветвления на бесконечность (симметрично верхней и нижней полуплоскостях), а контур деформируется в берега разрезов.

Последующая перестановка порядка интегрирования и выполнение интегрирования по k позволяет представить (1.16) в виде следующих

простых выражений в безразмерных переменных ξ, η, t^* :

$$\begin{aligned} w_{r\varepsilon} &= \frac{k}{t^*} [U_{r0} + U_{rR} + U_{r\lambda}], & k &= \frac{u_0 R_0}{v_s}, & t^* &= \frac{tv_p}{R_0} \\ w_{z\varepsilon} &= \frac{k}{t^*} [U_{z0} + U_{zR} + U_{z\lambda}], & \xi &= \frac{r}{tv_p}, & \eta &= \frac{h}{tv_p} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$U_{r0} = \frac{\gamma}{1 - \gamma^2} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}, \quad U_{rR} = \frac{4\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\xi d_1 \sqrt{\rho}} \left(\eta \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{v_R}{v_p} \cos \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\rho = \sqrt{[\xi^2 + \eta^2 (1 - \gamma^2 \vartheta^2) - v_R^2 a^2]^2 + 4v_R^2 a^2 \xi^2 (1 - \gamma^2 \vartheta^2)}$$

$$\varphi = \text{Arctg} \left(\frac{2v_R a \eta \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{a^2 v_R^2 - \xi^2 - \eta^2 (1 - \gamma^2 \vartheta^2)} + \frac{\pi}{2} \right), \quad v_R = \vartheta v_s, \quad a = \frac{1}{v_p}$$

$$d_1 = 4 \left(2 - \vartheta^2 - \gamma^2 \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}} - \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \right)$$

и ϑ — корень уравнения

$$(2 - \vartheta)^2 = 4\sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}$$

$$U_{z0} = -\frac{\gamma}{1 - \gamma^2} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}, \quad U_{zR} = \frac{2 - \vartheta^2}{d_1 \sqrt{\rho}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Слагаемые $U_{r\lambda}$ и $U_{z\lambda}$ представлены вещественными интегралами

$$\begin{aligned} U_{r\lambda} &= -\frac{4}{\pi \xi} \int_1^{1/\gamma} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}}{P(\lambda)} \left(\eta \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2} \sin \frac{\varphi_1}{2} + \gamma \lambda \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho_1}} \\ U_{z\lambda} &= -\frac{8}{\pi} \int_1^{1/\gamma} \frac{(2 - \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \sin \frac{\varphi_1}{2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho_1}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$P(\lambda) = (2 - \lambda^2)^4 + 16(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2 \lambda^2),$$

а ρ_1 и φ_1 получаются из ρ и φ заменой ϑ на λ .

Эти формулы позволяют провести точные исследования поля перемещений на поверхности упругой среды. Из физических соображений ясно, что вычисление следует производить при $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. После выполнения вычислений в (2.1) и (2.2) переход к источнику, изменяющемуся во времени по закону $f(t)$, совершается при помощи формулы

$$w(r, z, t) = \int_0^{t^*} f_2(t - \tau) w_\varepsilon(r, z, t) d\tau$$

где

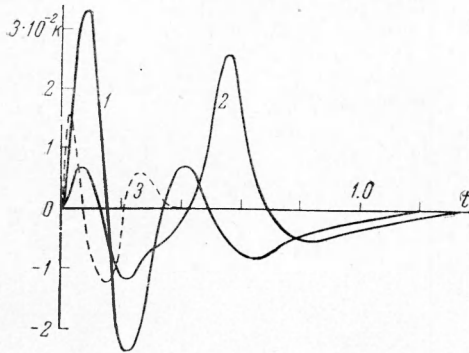
$$f_2(\tau) = f(\tau) - \int_0^\tau f(v) \exp(v - \tau) dv$$

Сделаем два замечания по поводу полученных формул (2.1), (2.2) и (2.3). Решение для поля перемещений в упругой задаче удается записать в виде функции от безразмерных переменных ξ, η, t^* . Это означает, что для всех упругих сред с различными параметрами v_p, v_s, ρ , но с фиксированным γ , в задаче можно вычислить универсальные эпюры $w_r(t^*)$ и $w_z(t^*)$ в заданной точке наблюдения, при этом по оси координат выбран масштаб в единицах k , а по оси абсцисс отложено безразмерное время t^* .

В качестве сигнала $f(t)$ в рассматриваемой задаче выбрана запись скорости частиц на сфере ¹ радиуса R_0 . Если фиксировать параметры сигнала u_0, R_0 , то при переходе от одной упругой среды к другой масштабы перемещений изменяются обратно пропорционально скорости поперечных волн.

Если в (2.3) или в (2.1) выполнить дифференцирование по времени (перейти к теоретическим осциллограммам для скорости частиц на поверхности грунта), то можно установить масштабный коэффициент для скорости частиц

$$k_1 = \frac{u_0 R_0}{\gamma} \quad (2.4)$$



Фиг. 6

Если по-прежнему считать u_0, R_0 фиксированными для различных упругих сред, то можно утверждать, что на одинаковых безразмерных расстояниях амплитуды скоростей частиц изменяются обратно пропорционально γ . Отношение $\gamma = v_s / v_p$ для большинства реальных грунтов [6] изменяется мало: $\gamma = 0.4 \div 0.6$, поэтому мало будут отличаться и соответствующие амплитуды скорости частиц.

Сделанные замечания и определяют направление численных исследований, результаты которых приведены ниже.

2. Выберем в качестве основной среду с параметрами $v_p = 4500$ м/сек, $\gamma = 1/\sqrt{3}$. Как следует из формул (2.1) — (2.2), плотность среды в формулы для перемещений нигде явно не входит, так что v_p и γ полностью характеризуют необходимые в расчете механические свойства среды, близкой по параметрам к горным породам средней жесткости.

В качестве R_0 примем расстояние $30R_3$, где R_3 — радиус заряда; глубины заряда приняты в расчете $20R_3$ и $40R_3$. Для сигнала $f(t)$, принятого в расчетах и имеющего длительность $t^* \approx 4$, некоторая условная длина волны может быть принята равной $\lambda = R_0 t^* \approx 4R_0 = 120R_3$.

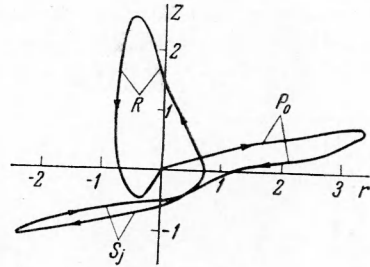
Это и определило диапазон расчетных безразмерных расстояний $r = 60 \div 240R_3$.

Рассмотрим прежде теоретические осциллограммы перемещений на расстоянии $r = 120R_3$ для $h = 20R_3$ (фиг. 6). Теоретические осциллограммы $r = 120R_3, h = 20R_3$, сплошные линии: 1 — горизонтальная компонента движения, 2 — вертикальная. В том же масштабе по оси абсцисс на фиг. 6 указан вид сигнала $f(t)$ (кривая 3) в произвольном вертикальном масштабе (время отсчета сигнала смещено к времени вступления волны P_0). По сравнению с сигналом $f(t)$ вид эпюр $w_r(t^*)$ и $w_z(t^*)$ более сложен: увеличилась общая длительность сигнала; отношение амплитуд последовательных пиков и впадин на разных компонентах различно; вместо простого радиального движения в волне P_0 в безграничной среде движение частицы поверхности обладает поляризацией (фиг. 7). Изучение траектории движения частицы совместно с точными осциллограммами и качественной картиной § 1, п. 3 позволяет сделать вывод, что в сложном движении точки поверхности принимают участие различные типы волн: $P_0 + P_1, S_1 + (S_j)$ и R . Если обратиться к фиг. 1, где указаны схематически фронты волн P_0, P_1, S_1 и волны S_j и R , то можно следующим образом интерпретировать сложное движение поверхности, указанное на фиг. 7. Начало движения точки поверхности — вверх и вперед от эпицентра — отвечает в основном движению в продольной

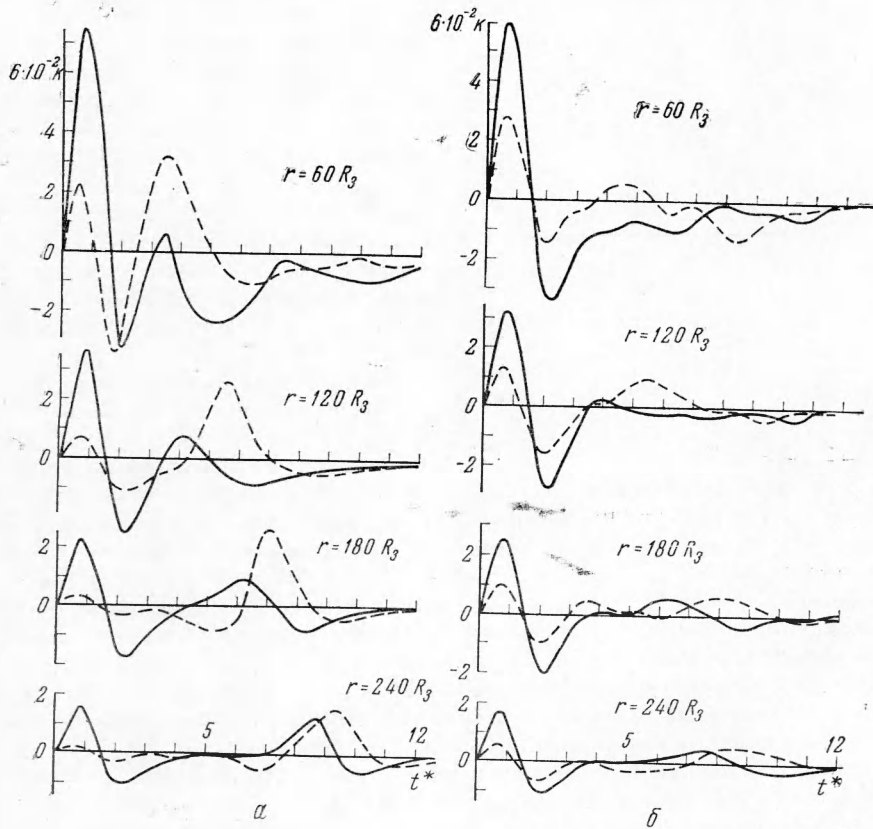
¹ В качестве R_0 следует выбирать расстояние от заряда, на котором влияние свободной поверхности не сказывается существенным образом на запись $f(t)$.

волне P_0 и включает в себя влияния отражения: P_1, S_1 . Это движение совершается по эллипсоподобной орбите с вращением частицы по часовой стрелке. После переходного участка с движением частицы вниз и назад, а затем вверх и вперед начинается движение частицы по эллипсоподобной орбите с направлением вращения против часовой стрелки. Это движение отождествляется с волной R , а переходный участок — с движением в поперечных волнах S_j , огибающей которых и является поперечная волна S_1 .

В заключение качественного анализа следуют заметить, что разделение сложного движения на отдельные волны условно и содержит следующий смысл. Выделенные участки теоретических осциллограмм и траектории отождествляются с отдельными волнами на основании кинематических и динамических признаков по преимущественному проявлению свойств отдельных волн на этих участках. Вообще говоря, нельзя отрицать проявления продольных волн на участке S_j и проявления поперечных волн S_j на участке R , но это проявление дополнительных возмущений слабее основных движений, индексы которых и присвоены участку.



Фиг. 7. Траектория движения частицы поверхности среды по данным фиг. 6



Фиг. 8а. Теоретические осциллограммы для $h = 20 R_3$, но оси абсцисс в единицах t^* отложено время от прихода волны P_0 в данную точку. Обозначения компонент те же, что и на фиг. 6

Фиг. 8б. Теоретические осциллограммы для $h = 40 R_3$

На фиг. 8а и 8б приведены сводные теоретические осциллограммы движения поверхности для тех же параметров среды, для расстояний и глубин, указанных там же.

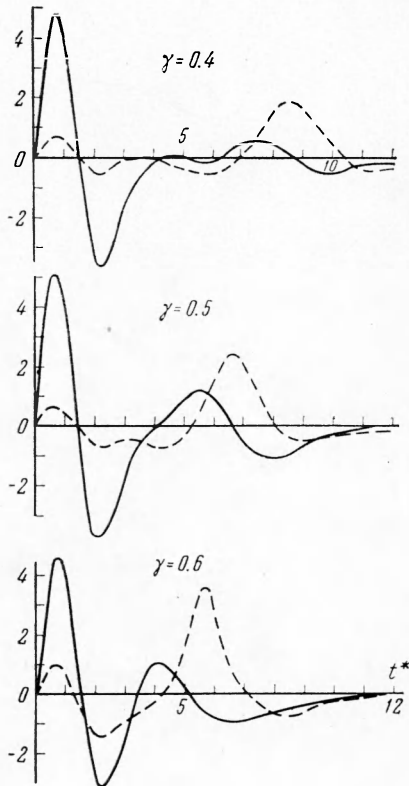
Даже беглый обзор осциллограмм фиг. 8а ($h = 20R_3$) позволяет четко выделить две основные группы в движении точек поверхности $z = 0$, которые в соответствии с качественным анализом, отмечены индексами P и R (в первую группу отнесены волны P_0, P_1, S_1 , а во вторую S_j и собственно R).

Эти группы распространяются с разными скоростями: первая со скоростью v_p , вторая со скоростью v_R . Максимальные амплитуды в этих группах убывают с увеличением r по разным законам: если на близких расстояниях $\sim 60 R_3$ первая группа преобладает по амплитудам, то, начиная с расстояний $\sim 120 R_3$, начинает преобладать вторая группа, к этому же расстоянию движение на переходном участке обладает сравнительно незначительными амплитудами, проявляясь в основном в фазе возвратного движения в первой группе и на участках нарастания второй.

На основании расчетов, несмотря на небольшое количество точек по расстояниям, можно указать, что на близких расстояниях максимальные перемещения в первой группе убывают с расстоянием не медленнее r^{-1} , а в конце расчетного диапазона намечается переход к закону (1.15): перемещения убывают быстрее r^{-1} , но медленнее r^{-2} . Так, если построить график затухания максимальных амплитуд перемещений или скоростей согласно (1.15) для выбранной сетки расстояний и глубины $h = 20 R_3$, то можно аппроксимировать эту зависимость степенной вида Ar^{-n} , где $n = 1.6-1.7$. Причем этот закон одинаков и для перемещений, и для скоростей

частиц, необходимо только подчеркнуть, что он раньше (на более близких расстояниях) становится пригодным для описания скоростей частиц. Во второй группе в расчетном диапазоне перемещения убывают медленнее, чем r^{-1} , но быстрее $r^{-1/2}$ и ближе к последнему закону, асимптотическому для поверхностной волны R . Отмеченная сравнительная характеристика позволяет указать на смену носителя максимальных амплитуд в общем движении с увеличением расстояния от эпицентра. При этом первая группа наиболее четко может быть прослежена на горизонтальной компоненте (первый максимум и первый минимум), а вторая волновая группа на вертикальной компоненте в конце записи.

На фиг. 8б приведены теоретические осциллограммы для глубины заряда $h = 40 R_3$. Сравнение осциллограмм фиг. 8а и 8б показывает, что группа, отождествляемая с поверхностной волной, имеет на фиг. 8б значительно меньшие амплитуды, хотя некоторое уменьшение амплитуд отмечается и в первой волновой группе. При $h = 40 R_3$ смены носителя максимальной амплитуды не происходит во всем расчетном диапазоне расстояний. На основе сравнения затухания максимальных амплитуд



Фиг. 9. Теоретические осциллограммы для $r = 120 R_3$, $h = 20 R_3$ и $\gamma = 0.4, 0.5, 0.6$

в первой и второй группах можно утверждать, что эта смена при $h = 40R_3$ также произойдет, но уже на больших расстояниях, чем это было при глубине источника $h = 20R_3$.

В заключение отметим, что основные особенности волновой картины по существу не зависят от конкретной функции $f(t)$, которая выбрана в расчетах. Важно здесь лишь то обстоятельство, что $f(t)$ определяет некоторую длину волны λ — характерный размер в задаче, — а это, в свою очередь, определяет диапазон расстояний $r \approx \lambda$, подвергнутых изучению.

3. Рассмотрим изменение волновой картины, происходящее с изменением γ , параметр $v_p = 4500$ м/сек фиксирован. Изменение γ в этом случае означает изменение скоростей распространения поперечной и поверхностной волн: при изменении γ от 0.6 до 0.4 величина v_s изменяется от 2700 м/сек до 1800 м/сек. Как следует из теоретических осциллограмм (фиг. 9), вторая группа запаздывает за первой группой тем больше, чем меньше γ , при этом на переходном участке успевают наметиться ($\gamma = 0.5$) и четко выделиться ($\gamma = 0.4$) промежуточный максимум в движении, отвечающий второму максимуму сигнала $f(t)$. Все основные особенности волновой картины, отмеченные в п. 2, при изменении γ сохраняются. Максимальные амплитуды перемещений при изменении γ от 0.6 до 0.4 несущественно отличаются от общего закона зависимости, указанного масштабным множителем $k = u_0 R_0 / v_s$, как это следует из графиков фиг. 9, где все эюры построены в одном вертикальном масштабе $k = u_0 R_0 / 1800$.

В заключение отметим, что приведенный в статье качественный анализ волновой картины движения свободной поверхности упругой среды следует дополнить анализом изменений спектра и энергии в угругом движении границы. Последние задачи являются самостоятельными по своей сложности и объему и будут темой специальных обсуждений.

Авторы благодарят Губкина К. Е., Родионова В. Н. и Ромашова А. Н. за ценное обсуждение результатов работы при подготовке статьи в печать.

Поступила 9 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Огурцов К. И., Ермилова Н. И., Успенский И. Н. Некоторые количественные исследования по распространению волн. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ч. I, Гостоптехиздат, 1957.
2. Смирнов В. И., Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии. Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1933, № 29.
3. Петрашень Г. И. Общая количественная теория отраженных и головных волн. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ч. I, Гостоптехиздат, 1957.
4. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1950, т. 21, № 35.
5. Маркова К. И., Шемякин Е. И. Распространение нестационарных возмущений в слое жидкости, находящемся в контакте с упругим полупространством. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
6. Волин А. П., Рудаков А. Г., О сейсморазведочных работах на поперечных волнах. Прикладная геофизика, Гостоптехиздат, 1956, вып. 15.