

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ
ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОРИСТОЙ
ПОВЕРХНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Л. Ф. Козлов

(Ленинград)

Под пористой поверхностью будем понимать обтекаемую жидкостью поверхность, на которой нормальная составляющая скорости не равна нулю.

Известны точные решения системы уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности для частных случаев распределения скоростей на внешней границе слоя (см. монографию [1] и работы [2,3]). Однако эти решения имеют скорее принципиальное, чем практическое значение, так как большей частью необходимость интегрировать уравнения пограничного слоя возникает при произвольном распределении скоростей.

Существующие методы приближенного интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности основаны на использовании уравнения импульсов [4-7] или на совместном применении уравнений импульсов и энергии [8,9]. Точность этих методов в значительной мере зависит от удачной аппроксимации профиля скорости поперек пограничного слоя. Например, профиль скорости, предложенный в работе [4], весьма приблизительно отражает действительное изменение скоростей в пограничном слое на пористой поверхности, особенно вблизи точки отрыва слоя. Использование полинома четвертой степени в этом случае также приводит к погрешностям в расчетах характеристик пограничного слоя [5].

Как показал Л. Г. Лойцянский [10], используя систему уравнений «моментов» основного дифференциального уравнения пограничного слоя и применяя простые семейства профилей скорости, можно разработать вполне удовлетворительный приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя на непроницаемой поверхности. В предлагаемой статье предпринята попытка использовать систему трех уравнений моментов для приближенного интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности в несжимаемой жидкости. Решение этой системы получено в виде квадратуры и простых интерполяционных зависимостей, связывающих основные характеристики пограничного слоя.

1. Основная система уравнений. Система дифференциальных уравнений плоского ламинарного пограничного слоя для установившегося течения в несжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - UU' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left(U' = \frac{dU}{dx} \right) \quad (1.1)$$

Здесь x — координата вдоль поверхности тела, y — координата по нормали к поверхности, u и v — проекции вектора скорости на координатных осях, $U(x)$ — заданная продольная скорость на внешней границе слоя, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Для тела с пористой поверхностью должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = -v_0 \quad \text{при } y = 0 \quad u \rightarrow U \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Первое уравнение (1.1) при помощи второго можно привести к виду, более удобному для дальнейших вычислений

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] + U'(U-u) - \nu \frac{\partial^2 (U-u)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

Умножим обе части уравнения (1.3) на y^k , где $k = 0, 1, 2, \dots$, и проинтегрируем по y от нуля до бесконечности; получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y^k u (U - u) dy + \int_0^{\infty} y^k \frac{\partial}{\partial y} [v (U - u)] dy + \\ + U' \int_0^{\infty} y^k (U - u) dy - \nu \int_0^{\infty} y^k \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} dy = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что интегралы в уравнении (1.4) будут иметь конечные значения. Рассмотрим частный случай уравнения (1.4) при $k = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u (U - u) dy + U' \int_0^{\infty} (U - u) dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [v (U - u)] dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1.5) \\ (\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}) \end{aligned}$$

Здесь τ_w — напряжение трения на поверхности обтекаемого тела. Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [v (U - u)] dy = v_0 U \quad (1.6)$$

поэтому уравнение импульсов (1.5) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'\delta^{**}}{U} (2 + H) + \frac{v_0}{U} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1.7)$$

Здесь δ^* — толщина потока вытеснения, δ^{**} — толщина потери импульса, H — формпараметр пограничного слоя.

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (1.8)$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры:

$$f = \frac{\delta^{**2}}{\nu} \frac{dU}{dx}, \quad \zeta = \frac{\tau_w \delta^{**}}{\mu U}, \quad t^{**} = \frac{v_0 \delta^{**}}{\nu} \quad (1.9)$$

Уравнение (1.7) приведет к виду

$$\frac{df}{dx} - \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U} \{2\zeta - 2[2 + H]f - 2t^{**}\} \left(U'' = \frac{d^2 U}{dx^2} \right) \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) будем называть уравнением нулевого момента. При $k = 1$ из уравнения (1.4) получим уравнение первого момента

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y u (U - u) dy + \int_0^{\infty} y \frac{\partial}{\partial y} [v (U - u)] dy + U' \int_0^{\infty} y (U - u) dy = \\ = \nu \int_0^{\infty} y \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} dy \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для второго и четвертого интегралов уравнения (1.11) имеем

$$\int_0^{\infty} y \frac{\partial}{\partial y} [v (U - u)] dy = - \int_0^{\infty} v (U - u) dy, \quad \int_0^{\infty} y \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} dy = U \quad (1.12)$$

С учетом формул (1.12) уравнение (1.11) примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} yu (U - u) dy - \int_0^{\infty} v (U - u) dy + U' \int_0^{\infty} y (U - u) dy = \nu U \quad (1.13)$$

Первый интеграл уравнения (1.13)

$$\int_0^{\infty} yu (U - u) dy = H_1 U^2 \delta^{**2} \quad \left(H_1 = \int_0^{\infty} \eta \varphi (1 - \varphi) d\eta, \quad \eta = \frac{y}{\delta^{**}}, \quad \frac{u}{U} = \varphi \right) \quad (1.14)$$

Замечая, что

$$\frac{d\eta}{dx} = - \frac{\eta}{\delta^{**}} \frac{d\delta^{**}}{dx} \quad (1.15)$$

из уравнения неразрывности (1.1) и граничного условия (1.2) имеем

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - v_0 = U' \delta^{**} \int_0^{\eta} \varphi d\eta - U \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta - \eta \varphi \right) - v_0 \quad (1.16)$$

Учитывая (1.16), для второго интеграла в уравнении (1.13) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v (U - u) dy &= H_2 U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} - H_3 U U' \delta^{**2} - v_0 \int_0^{\infty} (U - u) dy = \\ &= H_2 U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} - H_3 U U' \delta^{**2} - v_0 U \delta^* \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь

$$H_2 = \int_0^{\infty} \left(\eta \varphi - \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, \quad H_3 = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta$$

Наконец, третий интеграл в уравнении преобразуется к виду

$$\int_0^{\infty} y (U - u) dy = H_4 U \delta^{**2} \quad \left(H_4 = \int_0^{\infty} \eta (1 - \varphi) d\eta \right) \quad (1.18)$$

Подставляя интегралы (1.14), (1.17) и (1.18) в уравнение (1.13), получим

$$\frac{d}{dx} (H_1 U^2 \delta^{**2}) - H_2 U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} + H_3 U U' \delta^{**2} + v_0 U \delta^* + H_4 U U' \delta^{**2} = \nu U \quad (1.19)$$

Заменяя $\delta^{**2} / \nu = f / U'$, в уравнении (1.19) найдем, что

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{(H_1 - 1/2 H_2)} \frac{U'}{U} [1 - H_1 f - (2H_1 + H_3 + H_4) f] + \frac{U''}{U'} f \quad (1.20)$$

При $k = 2$ из уравнения (1.4) получим уравнение второго момента. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y^2 u (U - u) dy - 2 \int_0^{\infty} yv (U - u) dy + U' \int_0^{\infty} y^2 (U - u) dy = \\ = 2\nu \int_0^{\infty} (U - u) dy \end{aligned} \quad (1.21)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{\infty} y^2 u (U - u) dy = H_5 U^2 \delta^{**3} \quad \left(H_5 = \int_0^{\infty} \eta^2 \varphi (1 - \varphi) d\eta \right)$$

$$\int_0^{\infty} (U - u) dy = U \delta^{**} H \quad (1.22)$$

$$\int_0^{\infty} y v (U - u) dy = H_6 U^2 \delta^{**2} \frac{d\delta^{**}}{dx} - H_7 U U' \delta^{**3} - H_4 v_0 \delta^{**2} U$$

$$\left(H_6 = \int_0^{\infty} \eta \left(\eta \varphi - \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, H_7 = \int_0^{\infty} \eta \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \right)$$

Учитывая формулы (1.22), уравнение (1.21) можно привести к виду

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} \frac{4}{(3H_5 - 2H_6)} \left[H - H_4 t^{**} - \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f \right] + \frac{U''}{U'} f \quad (1.23)$$

где

$$H_8 = \int_0^{\infty} \eta^2 (1 - \varphi) d\eta$$

Таким образом, для вычисления H , ζ и f получена система уравнений (1.10), (1.20) и (1.23); эти уравнения представляют собой обобщение уравнений нулевого, первого и второго моментов [10] на случай пористой поверхности.

2. Интерполяционная формула для параметра H (f , t^{}).** Введя постоянные

$$a = \frac{1}{H_1 - \frac{1}{2} H_2}, \quad b = \frac{2H_1 + H_3 + H_4}{H_1 - \frac{1}{2} H_2} \quad (2.1)$$

$$c = \frac{H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8}{H_0}, \quad H_0 = \frac{3H_5 - 2H_6}{4(H_1 - \frac{1}{2} H_2)}$$

уравнения первого и второго моментов запишем в виде

$$\frac{df}{dx} = a \frac{U'}{U} \left(1 - H t^{**} - \frac{b}{a} f \right) + \frac{U''}{U'} f \quad (2.2)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{a}{H_0} \frac{U'}{U} \left(H - H_4 t^{**} - H_0 c f \right) + \frac{U''}{U'} f \quad (2.3)$$

Диапазон изменения формпараметра H сравнительно невелик. На пример, для пластины $H = 2.0 \div 2.59$. Предположим, что в уравнении первого момента (2.2) формпараметр H приближенно равен двум, т. е. его точному значению для асимптотического пограничного слоя на пористой пластине [1]. Далее, используя уравнение второго момента для вычисления зависимости H (f , t^{**}), почленно вычтем уравнение (2.2) из уравнения (2.3); после преобразований получим

$$H = H_0 - (2H_0 - H_4) t^{**} - H_0 (b/a - c) f \quad (2.4)$$

Полагая в этой формуле $t^{**} = 0$ и считая, что в этом случае формула (2.4) должна соответствовать известной интерполяционной формуле, предложенной в работе [10], найдем значения коэффициентов

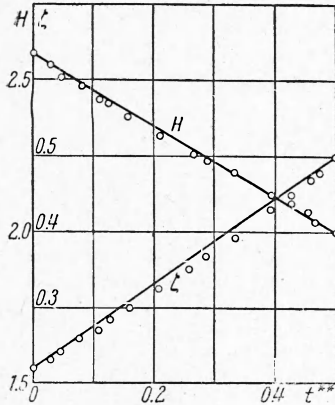
$$H_0 = 2.59, \quad H_0 (b/a - c) = 7.55$$

Постоянную H_4 вычислим по формуле (1.18), используя асимптотический профиль скоростей в пограничном слое на пористой пластине [1]; в результате получим, что $H_4 = 4$.

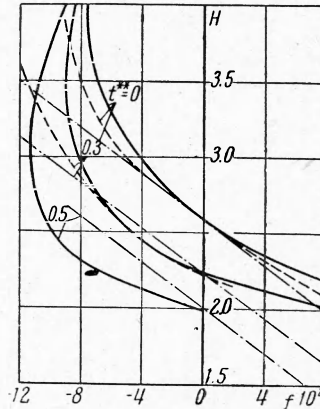
Интерполяционная формула (2.4) в окончательном виде будет

$$H = 2.59 - 1.18t^{**} - 7.55f \tag{2.5}$$

Сопоставление этой формулы с данными численного интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой пластине [2] показывает на их удовлетворительное соответствие (фиг. 1). Сравнение аналогичных данных для пористого клина [3] показало, что при $t^{**} = 0.462$ и $f = 0.01675$ точное значение $H = 2.03$, а приближенное 1.97.



Фиг. 1



Фиг. 2

Полученная зависимость $H(f, t^{**})$ на фиг. 2 сопоставлена с известными приближенными решениями. Это позволяет судить о степени сходимости полученной аналитической формулы и ранее известных приближенных графических зависимостей.

3. Интерполяционная формула для параметра $\zeta(f, t^{})$.** Решая совместно уравнения нулевого (1.10) и первого (2.2) моментов получим, что

$$\zeta = \frac{a}{2} + (1 - a)t^{**} + \left(2 + H - \frac{b}{2}\right)f \tag{3.1}$$

Положим здесь $t^{**} = 0$ и тогда из условия соответствия уравнения (3.1) известному решению [10] находим $a = 0.4408$, $b = 5.48$.

Подставляя в (3.1) эти значения и выражение (2.5) для H , получим

$$\zeta = 0.22 + 0.56t^{**} - 1.18ft^{**} + 1.85f - 7.55f^2 \tag{3.2}$$

Сопоставление данных, вычисленных по этой формуле, с точными величинами ζ для пористой пластины [2] дает удовлетворительное их соответствие в интервале значений параметра t^{**} от 0 до 0.5 (фиг. 1). Максимальная погрешность при этом не превышает 5%.

Интересно сравнить точные численные данные, вычисленные в работе [3] для пористого клина, с результатами расчетов, полученных по формулам. Сравнение показало, что для $t^{**} = 0.462$ и $f = 0.01675$ точное значение $\zeta = 0.488$, а приближенное, вычисленное по формуле (3.2), равно 0.498.

Сопоставление полученных ранее приближенных зависимостей с формулой (3.2) дано на фиг. 3. Этот график позволяет судить о степени их совпадения.

Положив $\zeta = 0$ из уравнения (3.2), получим формулу для формпараметра $f_s(t^{**})$ в точке отрыва пограничного слоя

$$f_s = \frac{(1.85 - 1.18t^{**}) - \sqrt{(1.85 - 1.18t^{**})^2 + 4 \cdot 7.55(0.22 + 0.56t^{**})}}{2 \cdot 7.55} \tag{3.3}$$

Для непроницаемой поверхности формула (3.3) дает $f_s = -0.0875$.

4. Вычисление формпараметра $f(x)$. Для вычисления формпараметра f можно использовать любое из трех уравнений моментов. Расчеты показали, что получаемые при этом результаты весьма близки. Для дальнейшего уравнение нулевого момента возьмем в следующем виде:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U} (F - 2t^{**}) \quad (4.1)$$

Здесь

$$F(f, t^{**}) = 2\zeta(f, t^{**}) - 2[2 + H(f, t^{**})] f \quad (4.2)$$

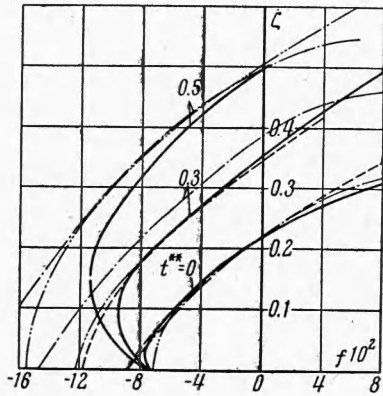
Подставляя в формулу (4.2) значения H и ζ , можно показать, что функция F является линейной функцией от формпараметра f , т. е.

$$F(f, t^{**}) = A(t^{**}) - B(t^{**}) f \quad (4.3)$$

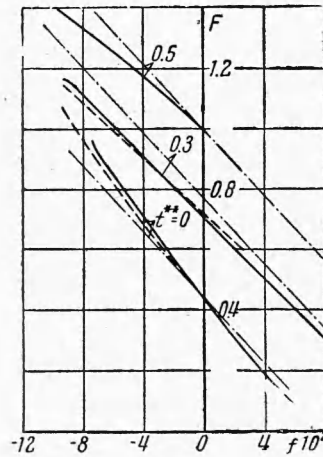
где

$$A(t^{**}) = 0.44 + 1.12t^{**}, \quad B = 5.48$$

Сопоставление полученной функции $F(f, t^{**})$ с известными ранее приближенными графическими зависимостями (фиг. 4) позволяет судить о их совпадении.



Фиг. 3



Фиг. 4

Функция $F(f, t^{**})$ линейная, поэтому интеграл уравнения (4.1) можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{U'(x)}{[U(x)]^B} \int_0^x [A(x) - 2t^{**}(x)] [U(x)]^{B-1} dx + C \frac{U'(x)}{U^B(x)} \quad (4.4)$$

Расположим систему координат так, что $U = 0$, при $x = 0$. Тогда из условия конечности f при $x = 0$ следует, что постоянная интегрирования $C = 0$, а $f(0) = A/B$.

5. Схема для расчета характеристик пограничного слоя. Вычислив по формуле (4.4) значения формпараметра $f(x)$, можно определить все остальные характеристики ламинарного пограничного слоя

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{\nu f(x)}{U'(x)}}, \quad \delta^* = \delta^{**} H(f, t^{**})$$

$$\frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{2\nu}{U \delta^{**}} \zeta(f, t^{**}), \quad v_0 = \frac{\nu t^{**}}{\delta^{**}} \quad (5.1)$$

Для расчета характеристик слоя при заданной нормальной составляющей скорости на пористой поверхности тела v_0 необходимо применять метод последовательных приближений. Задаваясь в первом приближении ожидаемым изменением параметра t^{**} по формулам (4.4) и (5.1), можно вычислить функцию δ^{**} , и по значениям этой функции, так как v_0 задана, найти изменение параметра t^{**} во втором приближении. Повторяя процесс последовательных приближений, можно с достаточной точностью рассчитать все характеристики пограничного слоя.

В качестве первого приближения ожидаемого изменения параметра t^{**} рекомендуется принимать соответствующие значения для пористой пластины с заданным распределением v_0 для тела с пористой поверхностью. Для вычисления необходимых значений t^{**} для пористой пластины удобно воспользоваться таблицами, приведенными в работе [2].

Изложенный способ расчета может быть использован также для расчета характеристик ламинарного пограничного слоя и функции $v_0(x)$ по заданным значениям функции δ^{**} , U и U' . Если перечисленные величины заданы, то можно вычислить функции f и df/dx и из уравнений (4.1) и (5.1) определить искомые функции t^{**} и v_0 .

Предложенный способ расчета характеристик ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности разработан применительно к плоским течениям. При помощи известного преобразования Е. И. Степанова [11] этот способ можно распространить на случай осесимметричных течений.

Поступила 5 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд-во иностр. лит-ры, 1956.
2. Emmons H. W. & Leigh D. C. Tabulation of the Blasius Function with Blowing and Suction. Aeronaut. Res. Coun. Current Paper, 1954, No 147.
3. Schaefer H. Laminare Grenzschicht zur Potentialströmung $U = u_1 x^m$ mit Absaugen und Ausblasen. Deutsche Luftfahrtforschung, 1944, Um 2043.
4. Schlichting H. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Ing.—Archiv, 1948, 16.
5. Torda T. P. Boundary Layer Control by Continuous Surface Suction or Injection. J. Math. Phys., 1952, 31.
6. Truckenbrodt E. Ein einfaches Näherungsverfahren zum Berechnen der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Institut für Strömungsmechanik, Technische Hochschule, Braunschweig, 1955, Rep. No 5516 a.
7. Truckenbrodt E. Berechnung der laminaren Grenzschichten mit Absaugung. ZAMM, Sonderheft, 1956.
8. Wieghardt K. Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung. Ing.—Archiv, 1954, 22.
9. Head M. R. Approximate Calculation of Laminar Boundary Layer with Suction. Aeronaut. Res. Coun., Rep. and Mem., 1959, No 3124.
10. Лойцянский Л. Г. Приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 5.
11. Степанов Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией. ПММ, 1947, т. XI, вып. 1.