ОБ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ СЫПУЧИХ СРЕД

Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова (Воронеж)

Теория сыпучих сред исходит из представлений более общих, чем теория идеальной пластичности [1, 2], учитывая влияние нормального давления на величину предельного касательного напряжения. Но, если в теории идеальной пластичности используются различные условия пластичности Мизеса, Треска и т. д., то в теории сыпучих сред исследуются преимущественно условия предельного равновесия, являющиеся непосредственным обобщением условия пластичности Треска.

Теория анизотропных идеально пластических сред развивалась Мизесом [3] и Хиллом [4] путем обобщения условия пластичности Мизеса, поэтому эти представления не могли быть в полной мере приложимы к построению теории анизотропных сыпучих сред. В работе [5] рассматривались соотношения идеально пластической среды при условии пластичности, обобщающем условие Треска. Эти идеи используются ниже для построения теории анизотропных сыпучих сред.

Отметим, что предположение о независимости коэффициентов трения и сцепления от вида напряженного состояния представляет собой достаточно произвольную идеализацию грунта.

Ниже делается попытка учета анизотропных свойств грунтов, поэтому в качестве исходной была выбрана простейшая модель сыпучей среды.

В настоящей работе рассматриваются основные соотношения анизотропной сыпучей среды для случаев пространственного и плоского деформированных состояний.

1. Условие предельного состояния изотропных сыпучих сред при линейной зависимости предельного касательного усилия τ_n от нормального давления σ_n, действующих на некоторой площадке с нормалью n, записывается в виде

$$\max \{|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \rho\} = k \tag{1.1}$$

Здесь ρ — угол внутреннего трения, k — коэффициент сцепления.

Если обозначить через σ_i ($i = 1, 2, 3$) главные напряжения, то условие (1.1) может быть записано в виде

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leqslant \sin \rho\, (\sigma_i + \sigma_j + 2H), \qquad H = k \operatorname{ctg} \rho \tag{1.2}$$

где величина H характеризует временное сопротивление среды всестороннему равномерному растяжению.

Условие предельного состояния (1.1), (1.2) интерпретируется в пространстве главных напряжений правильной шестигранной пирамидой, исходящей из точки $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -H$, равнонаклоненной к оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Если рассмотреть элемент изотропной сыпучей среды, то временные сопротивления при растяжении и сжатии (соответственно σ_r и σ_s) по любому направлению в случае, если $\sigma_i \neq 0$, $\sigma_j = \sigma_k = 0$, будут равны

$$\sigma_r = \frac{2H \sin \rho}{1 - \sin \rho}, \qquad \sigma_s = -\frac{2H \sin \rho}{1 + \sin \rho} \tag{1.3}$$

Через три точки $O\,(-H, -H, -H)$, $A\,(\sigma_r, 0, 0)$, $B\,(0, \sigma_s, 0)$ в пространстве главных напряжений проходит грань условия предельного состояния (1.2), поэтому условие (1.2) может быть переписано в виде

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_r} + \frac{\sigma_j}{\sigma_s} \leqslant 1 \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

В случае анизотропной среды свойства тела зависят от направления. Рассмотрим элемент анизотропной сыпучей среды, зафиксированной в ортогональной системе координат. Результаты эксперимента по определению временных сопротивлений σ_r и σ_s ($\sigma_i \neq 0$, $\sigma_j = \sigma_k = 0$) будут зависеть от направления растяжения-сжатия. Поэтому в соотношениях (1.3) в общем случае будет иметь место $\rho = \rho\,(l, m, n)$, где l, m, n — направляющие-косинусы, образуемые направлением растяжение-сжатие с осями x, y, z.

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

Величина H является постоянной, так как для любой анизотропной среды временное сопротивление при всестороннем растяжении имеет вполне определенную постоянную величину.

Предположим, что некоторая анизотропная сыпучая среда находится в предельном состоянии. В каждой точке тела можно указать три взаимно-ортогональных направления 1, 2, 3, по которым действуют главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3. Ориентацию осей 1, 2, 3 в фиксированной системе координат x, y, z определим направляющими-косинусами, которые приведены в таблице слева.

Условие предельного состояния определим следующим образом. Пусть по любым трем взаимно-ортогональным направлениям 1, 2, 3 известны пределы σ_{ir}, σ_{is}. Предположим, что условие предельного состояния интерпретируется шестигранной пирамидой, каждая из граней которой проходит соответственно через три точки в пространстве главных напряжений, соответствующих предельному всестороннему растяжению, а также одноосному растяжению или сжатию по одному из главных направлений 1, 2, 3. На фигуре показаны два сечения пирамиды плоскостями $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$. Отметим, что при изменении ориентации осей 1, 2, 3 пирамида предельного состояния меняет конфигурацию в зависимости от величин σ_{ir}, σ_{is}.

Легко видеть, что уравнения граней пирамиды будут записываться в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_1}{\sigma_{1r}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{2s}} - \sigma_3\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{1r}} + \frac{1}{\sigma_{2s}}\right) = 1 \qquad (AB)\\
&\frac{\sigma_1}{\sigma_{1r}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{3s}} - \sigma_2\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{1r}} + \frac{1}{\sigma_{3s}}\right) = 1 \qquad (BC)\\
&\frac{\sigma_2}{\sigma_{2r}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{3s}} - \sigma_1\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{2r}} + \frac{1}{\sigma_{3s}}\right) = 1 \qquad (CD)\\
&\frac{\sigma_2}{\sigma_{2r}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1s}} - \sigma_3\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{2r}} + \frac{1}{\sigma_{1s}}\right) = 1 \qquad (DE)\\
&\frac{\sigma_3}{\sigma_{3r}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1s}} - \sigma_2\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{3r}} + \frac{1}{\sigma_{1s}}\right) = 1 \qquad (EF)\\
&\frac{\sigma_3}{\sigma_{3r}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{2s}} - \sigma_1\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\sigma_{3r}} + \frac{1}{\sigma_{2s}}\right) = 1 \qquad (FA)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь σ_{ir}, σ_{is} — соответственно временные сопротивления при растяжении и сжатии по направлению главного напряжения σ_i.

Следуя идеям Драккера [6], будем считать, что пирамида предельного состояния невогнута относительно начала координат. Это условие накладывает некоторые очевидные ограничения на величины σ_{ir}, σ_{is}.

Величины σ_{ir}, σ_{is} определяют предельное касательное усилие. Аналогично пирамида предельного состояния может быть построена по данным, определяющим величину предельного касательного усилия при чистом сдвиге по различным направлениям.

Предельное состояние реализуется, если главные напряжения удовлетворяют одной из граней (1.5).

Важный случай представляет условие соответствия напряженного состояния ребру пирамиды предельного состояния (1.5), в этом случае реализуется так называемое полное предельное состояние сыпучей среды.

Соотношения (1.5), являющиеся непосредственным обобщением соотношений (1.2) для случая анизотропной среды, предполагают линейную зависимость предельных касательных усилий от нормального давления. Идеи теории могут быть перенесены на более общий случай зависимости τ_n, σ_n.

Деформирование сыпучей среды осуществляется при достижении средой предельного напряженного состояния. Поэтому в общем случае должен быть определен закон деформирования сыпучей среды. В статически неопределимых задачах соотношения закона деформирования замыкают систему уравнений; в случае статической определимости системы закон деформирования позволяет определить истинное решение среди всей совокупности статически допустимых решений.

Считая выполненным постулат Драккера [6], утверждающий необратимость работы при пластическом деформировании, определим закон деформирования сыпучих сред, рассматривая условие предельного состояния в качестве потенциала скоростей деформаций. При таком определении закона деформирования в случае кусочно-линейных условий предельного состояния наибольшая свобода деформирования соответствует ребрам пирамиды предельного состояния (фигура). Любое деформированное состояние может соответствовать ребрам пирамиды предельного состояния, поэтому система уравнений, соответствующая условию полного предельного состояния при ассоциированном законе деформирования, является полной и замкнутой.

Граням пирамиды предельного состояния при заданном напряженном состоянии могут соответствовать лишь шесть фиксированных направлений деформации. Поэтому в этом случае предельное состояние существенно ограничено в деформировании. В настоящее время отсутствуют примеры решений при соответствии напряженного состояния граням пирамиды предельного состояния, если не считать плоского напряженного состояния, при котором определенная свобода деформаций достигается за счет особенностей самой задачи. Вопрос о том, в каких случаях может реализоваться напряженное состояние, соответствующее граням призмы, должен быть рассмотрен особо.

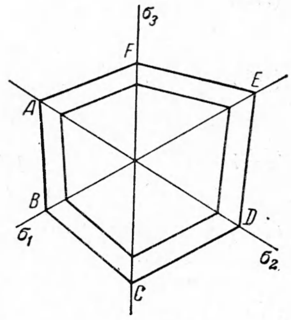
Рассмотрим ребро пирамиды предельного состояния, например ребро C, соответствующее пересечению граней BC и CD (фигура). Из (1.5) и (1.3) получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sin \rho_{3s} (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H), \qquad \sigma_1 = \sigma_2 \tag{1.6}$$

Для ребра F также найдем

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \sin \rho_{3r} (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H), \qquad \sigma_1 = \sigma_2 \tag{1.7}$$

Отметим, что $\rho_{3s} = \rho_s (n_1, n_2, n_3)$, $\rho_{3r} = \rho_r (n_1, n_2, n_3)$. Выражения для других ребер имеют аналогичный вид.



Используя известные преобразования

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \qquad \tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(выражения в скобках указывают, что недостающие соотношения получаются из данных круговой перестановкой индексов) и выражения (1.6), получим

$$\sigma_x = q (1 - \sin \rho \cos 2\theta_1) - H, \qquad \tau_{xy} = - q \sin \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Здесь

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \sin \rho}, \qquad \cos \theta_i = n_i, \quad \rho = \rho (n_1, n_2, n_3)$$

В выражениях (1.9) у величины ρ опущен индекс. Легко видеть, что, используя оотношения (1.7), можно прийти к выражениям (1.9), если считать, что

$$q = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2 \sin \rho}$$

Подставляя выражения (1.9) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \tag{1.10}$$

где F_x — проекция массовой силы на ось x, получим

$$\frac{\partial q}{\partial x}(1 + \sin \rho) - 2 \sin \rho \cos \theta_1 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial q}{\partial y} \cos \theta_2 + \frac{\partial q}{\partial z} \cos \theta_3\right) + \tag{1.11}$$

$$+ 2q \sin \rho \cos \theta_1 \left(\sin \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \sin \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z}\right) +$$

$$+ q \cos \rho \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial n_m} \sin \theta_m \left(- \frac{\partial \theta_m}{\partial x} + 2 \cos \theta_1 \Theta_m\right) + 2q \sin \rho \sin \theta_1 \Theta_1 + F_x = 0 \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \cos \theta_2 + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \cos \theta_3$$

причем

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \tag{1.12}$$

Четыре уравнения (1.11), (1.12) образуют систему гиперболического типа относительно четырех неизвестных q, θ_1, θ_2, θ_3.

Записывая уравнение характеристической поверхности в виде $\Psi (x, y, z) = 0$, найдем, что характеристический определитель системы уравнений (1.11), (1.12) записывается в виде

$$(\mathrm{grad}\ \Psi \cdot \mathbf{n}) [2 (\mathrm{grad}\ \Psi \cdot \mathbf{n})^2 - (1 + \sin \rho)\, \mathrm{grad}^2 \Psi - \mathrm{ctg}\, \rho\, (\mathrm{grad}\ \Psi \cdot \mathbf{n}) (\mathrm{grad}\ \Psi \cdot \mathbf{a}) +$$

$$+ \mathrm{ctg}\, \rho\, (\mathrm{grad}\ \Psi \cdot \mathbf{n})^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})] = 0 \tag{1.13}$$

$$\left(\mathbf{a} \left\{\frac{\partial \rho}{\partial n_i}\right\}, \ \mathbf{n}\ \{n_i\}\right)$$

Обозначая углы между векторами grad Ψ и $\mathbf{n}$, grad Ψ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ соответственно через α, β, γ, найдем уравнение конуса характеристик

$$2 \cos^2 \alpha - (1 + \sin \rho) - b \cos \alpha \cos \beta + b \cos^2 \alpha \cos \gamma = 0 \qquad (b = |\mathbf{a}|\, \mathrm{ctg}\, \rho) \tag{1.14}$$

Перейдем к определению закона пластического течения. Из (1.6) найдем

$$[2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_y + \sigma_z + 2H)]\,\tau_{yz} - \tau_{xz}\,\tau_{xy}\,(3 + \sin\rho) = 0 \quad (xyz) \tag{1.15}$$

или

$$[2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_y + \sigma_z + 2H)][2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_z + 2H)] = \tau_{xy}^2\,(3 + \sin\rho)^2 \quad (xyz)$$

Рассматривая выражение (1.15) в качестве обобщенного потенциала скоростей деформаций, следуя Койтеру [7], найдем

$$\varepsilon_x = \lambda_1 \left[2\tau_{yz} + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_x}\,4q^2 \sin\rho\; n_2 n_3\right] + \tag{1,16}$$

$$+ \lambda_2 \left[-(1 + \sin\rho)\,\tau_{xz} + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_x}\,4q^2 \sin\rho\; n_3 n_1\right] +$$

$$+ \lambda_3 \left[-(1 + \sin\rho)\,\tau_{xy} + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_x}\,4q^2 \sin\rho\; n_1 n_2\right] \quad (xyz)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \lambda_1 \left[-\tau_{xz}\,(3 + \sin\rho) + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\tau_{xy}}\,4q^2 \sin\rho\, n_2 n_3\right] +$$

$$+ \lambda_2 \left[-\tau_{yz}\,(3 + \sin\rho) + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\tau_{xy}}\,4q^2 \sin\rho\; n_3 n_1\right] +$$

$$+ \lambda_3 \left[-2q \sin\rho\,(3 + \sin\rho)\,n_3^2 + \cos\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\tau_{xy}}\,4q^2 \sin\rho\; n_1 n_2\right]$$

где

$$\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial\rho}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\rho}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\rho}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial\sigma_{ij}}$$

Из (1.9) следует

$$\begin{aligned} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) &= -2q \sin\rho\,(3n_1^2 - 1) \\ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 &= 4q^2 \sin^2\rho\; n_1^2\,(1 - n_1^2) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Отсюда

$$\frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)^2}{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{(3n_1^2 - 1)^2}{n_1^2\,(1 - n_1^2)} \tag{1.18}$$

Дифференцируя (1.18), получим

$$\frac{\partial n_1}{\partial\sigma_x} = -\frac{n_1\,(1 - n_1^2)}{q \sin\rho\,(1 + n_1^2)}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial\sigma_y} = \frac{\partial n_1}{\partial\sigma_z} = \frac{n_1\,(1 - n_1^2)}{2q \sin\rho\,(1 + n_1^2)} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial\tau_{xy}} = \frac{n_2\,(3n_1^2 - 1)}{2q \sin\rho\,(1 + n_1^2)}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial\tau_{xz}} = \frac{n_3\,(3n_1^2 - 1)}{2q \sin\rho\,(1 + n_1^2)}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial\tau_{yz}} = 0 \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в соотношения (1.16) и исключая величины λ_1, λ_2, λ_3, найдем

$$d_1 \left[\varepsilon_x + \varepsilon_{xy}\,\frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_z + 2H)}{\tau_{xy}\,(3 + \sin\rho)} + \varepsilon_{xz}\,\frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y - \sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_y + 2H)}{\tau_{xz}\,(3 + \sin\rho)}\right] =$$

$$= d_2 \left[\varepsilon_{xy}\,\frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_y + \sigma_z + 2H)}{\tau_{xy}\,(3 + \sin\rho)} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz}\,\frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y - \sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_y + 2H)}{\tau_{yz}\,(3 + \sin\rho)}\right] =$$

$$= d_3 \left[\varepsilon_{xz}\,\frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_y + \sigma_z + 2H)}{\tau_{xz}\,(3 + \sin\rho)} + \varepsilon_{yz}\,\frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z - \sin\rho\,(\sigma_x + \sigma_z + 2H)}{\tau_{yz}\,(3 + \sin\rho)} + \varepsilon_z\right]. \tag{1.20}$$

Используя (1.9), перепишем выражения (1.20) в виде

$$d_1\left[\varepsilon_x+\varepsilon_{xy}\frac{n_2}{n_1}+\varepsilon_{xz}\frac{n_3}{n_1}\right]=$$

$$=d_2\left[\varepsilon_{xy}\frac{n_1}{n_2}+\varepsilon_y+\varepsilon_{yz}\frac{n_3}{n_2}\right]=d_3\left[\varepsilon_{xz}\frac{n_1}{n_3}+\varepsilon_{yz}\frac{n_2}{n_3}+\varepsilon_z\right]$$

где

$$\frac{1}{d_i}=1+\sin\rho+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\rho\left[-\frac{1}{n_i}\frac{\partial\rho}{\partial n_i}+(\operatorname{grad}\rho\cdot\mathbf{n})\right]$$

Из (1.16) получим также уравнение

$$\frac{1}{d_1}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)-2\sin\rho\left(\varepsilon_x+\varepsilon_{xy}\frac{n_2}{n_1}+\varepsilon_{xz}\frac{n_3}{n_1}\right)=0 \qquad (1.21)$$

Три уравнения (1.20), (1.21) относительно трех неизвестных составляющих скоростей перемещений u, v, w принадлежат к гиперболическому типу, характеристические поверхности их определяются из уравнения (1.13). Таким образом, в рассматриваемом случае анизотропии характеристические многообразия систем уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояние, совпадают.

2. Рассмотрим случай плоского деформированного состояния. Предположим, что

$$\sigma_3=\sigma_z,\qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0,\qquad \varepsilon_z=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0 \qquad (2.1)$$

Очевидно, что в случае, если $\sigma_{sA}=\sigma_{rB}$, то плоское деформированное состояние может соответствовать грани AB (фигура); если $\sigma_{sE}=\sigma_{rD}$, то может реализоваться грань DE. В случаях, когда $\sigma_r\neq\sigma_s$, плоское деформированное состояние соответствует ребрам пирамиды предельного состояния. Легко убедиться, что во всех этих случаях условие предельного состояния не меняет вида, может изменяться лишь компонента $\sigma_3=\sigma_z$, значение которой никак не сказывается на характере основных соотношений теории плоского деформированного состояния.

Условие предельного состояния в рассматриваемом случае имеет вид

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}{}^2=\sin^2\rho(\sigma_x+\sigma_y+2H)^2 \qquad (2.2)$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}&\sigma_x=q\,(1+\sin\rho\cos 2\psi)-H,\qquad \sigma_y=q\,(1-\sin\rho\cos 2\psi)-H,\\&\tau_{xy}=q\sin\rho\sin 2\psi,\qquad q=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+H,\qquad \rho=\rho\,(\psi)\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Здесь ψ — угол между направлением первого главного напряжения и осью x. Подставляя выражения (2.3) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0 \qquad (2.4)$$

получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial q}{\partial x}\sin 2\psi+\frac{\partial q}{\partial y}(\sin\rho-\cos 2\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}2q\sin\rho+\frac{\partial\psi}{\partial y}q\,(\cos\rho)\,\rho'=X\\&\frac{\partial q}{\partial x}(\sin\rho+\cos 2\psi)+\frac{\partial q}{\partial y}\sin 2\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}q\,(\cos\rho)\,\rho'+\frac{\partial\psi}{\partial y}2q\sin\rho=Y\end{aligned} \qquad (2.5)$$

где

$$X=-(F_x\sin 2\psi-F_y\cos 2\psi),\qquad Y=-(F_x\cos 2\psi+F_y\sin 2\psi)$$

Система уравнений (2.5) принадлежит к гиперболическому типу, уравнения характеристик которой имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{2k\sin 2\psi-k'\cos 2\psi\pm\sqrt{4k^2-4k^4+k'^2}}{2k\cos 2\psi+2k^2+k'\sin 2\psi} \qquad (2.6)$$

Здесь $k=\sin\rho$, $k'=\cos\rho\cdot\rho'$, штрих означает производную по ψ.

Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$\begin{aligned}&[k'\sin 2\psi\pm\sqrt{4k^2+\rho'^2}]\,dq+q\,(k'^2+4k^2)\,d\psi+\\&+(2kX-k'Y)\,dx+(2kY-k'X)\,dy=0\end{aligned} \qquad (2.7)$$

В случае отсутствия массовых сил выражения (2.7) интегрируются

$$\ln q = -\int \frac{k'^2 + 4k^2}{k' \sin 2\psi \pm \sqrt{4k^2 + \rho'^2}} d\psi$$

Рассматривая условия (2.2) в качестве потенциала скоростей деформаций, получим

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \lambda \left[\sigma_x - \sigma_y - (\sigma_x + \sigma_y + 2H) k^2 - (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 kk' \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x}\right] \\
\varepsilon_y = \lambda \left[\sigma_y - \sigma_x - (\sigma_x + \sigma_y + 2H) k^2 - (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 kk' \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y}\right] \\
\varepsilon_{xy} = 2\lambda \left[\tau_{xy} - \frac{(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2}{4} kk' \frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xy}}\right]
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Из (2.2) следует

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x} = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 k^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 k^2}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 k^2}$$

Окончательно выражения (2.8) имеют вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \lambda \left[\sigma_x - \sigma_y - (\sigma_x + \sigma_y + 2H) k^2 + \tau_{xy} \frac{k'}{k}\right] \\
\varepsilon_y = \lambda \left[\sigma_y - \sigma_x - (\sigma_x + \sigma_y + 2H) k^2 - \tau_{xy} \frac{k'}{k}\right] \\
\varepsilon_{xy} = 2\lambda \left[\tau_{xy} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{4} \frac{k'}{k}\right]
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из (2.9) найдем

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y + \tau_{xy} \dfrac{k'}{k}}{2\left[\tau_{xy} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{4} \dfrac{k'}{k}\right]}, \qquad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_x + \varepsilon_y} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y + \tau_{xy} \dfrac{k'}{k}}{(\sigma_x + \sigma_y + 2H) k^2} \tag{2.10}$$

Легко убедиться, что уравнения (2.10) принадлежат к гиперболическому типу и имеют характеристики (2.6). Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$\begin{gathered}
(-2k \sin 2\psi + k' \cos 2\psi \pm \sqrt{4k^2 - 4k^4 + k'^2})\, du + \\
+ (2k \cos 2\psi + k' \sin 2\psi - 2k^2)\, dv = 0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Выражения (2.11) обобщают известные соотношения Гейрингер в теории идеально пластического тела.

Поступила 2 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1950.
3. Mises R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen, ZAMM, Bd. 8, 1928.
4. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
6. Друккер Д. О пределе устойчивости неупругого материала. Сб. пер., Механика, ИИЛ, 1960, № 2.
7. Койтер В. Т. Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теоремы единственности для упруго-пластического материала с сингулярной поверхностью текучести. Сб. пер., Механика, ИИЛ, 1960, № 2.