

ДВУХСКОРОСТНАЯ ТЕОРИЯ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Х. А. Рахматуллин, Н. А. Мамадалиев

(Москва—Ташкент)

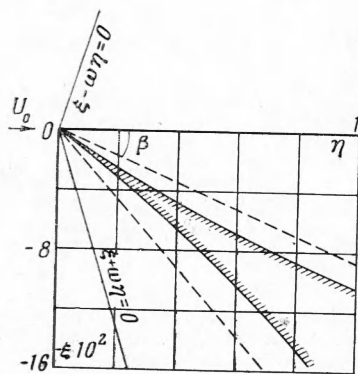
Рассматривается некоторая гидродинамическая схема сверхзвукового обтекания тонкого тела двухфазной средой. Эта теория имеет практическое значение при расчетах входов ВРД, когда газ содержит жидкие или твердые включения, при расчетах полета тел в газопылевых средах, при обтекании препятствий пульпой или песчаной бурей, а также в ряде вопросов теорий горения распыленных топлив и при разрушении теплозащитных покрытий космических кораблей. Исходя из [1], решается линеаризованная задача об обтекании тел двухфазным (сверхзвуковым, баротропным) потоком.

Исследование показало, что задача не имеет решения, если линиями тока обеих фаз будет поверхность заданного тела. Этот факт физически вполне объясним, так как в рассматриваемой теории для обеих фаз поле давления одно и то же. Поэтому если одна компонента обтекает тело, то другая вовсе его не должна достигать, т. е. компоненты разделяются, и вблизи тела появится область, в которой существенно движение только одной («легкой» или «тяжелой») фазы.

Отметим, что в [2] предложена некоторая модель двухжидкостной гидродинамики взвешенного слоя, в которой также показывается существование пристеночной области жидкой фазы. В работах [3-7] при исследовании течения газа с частицами в соплах обнаружена пристеночная область легкой фазы и т. д.

Указанная выше задача упрощается, если задаться линией раздела фаз (компонент) и находить соответствующий профиль (обратная задача). Ниже излагается аналитическое решение этой (обратной) задачи. Полученные результаты позволяют также выявить некоторые качественные особенности исследуемого течения.

Рассмотрим обтекание профиля потоком двухфазной среды с начальной скоростью U_0 . Предположим, что фазы взаимно являются «несмачиваемыми».



Фиг. 1

Возможны два типа течения: разрежения и уплотнения. В случае течения разрежения над поверхностью профиля имеем полное отделение легкой фазы от тяжелой. Первая будет обтекать тела, а вторая будет двигаться в области двухфазного потока, границей которой будет некоторая линия тока тяжелой фазы, называемая линией раздела фаз (фиг. 1, пунктирные линии). Для течения уплотнения картина движения будет аналогичной течению разрежения, только роли тяжелой и легкой фаз поменяются.

При описании двухкомпонентных систем исходят обычно из представления о компонентах, как о взаимопроникающих взаимодействующих одна с другой сплош-

ных средах. Соответствующие уравнения движения обсуждены в [1]. В случае плоского стационарного течения они имеют вид

$$u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_n i} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_n} \sum_{j=1}^2 K_{jn} (u_j - u_n)$$

$$u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_n i} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_n} \sum_{j=1}^2 K_{jn} (v_j - v_n) \quad (1)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_n u_n) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_n v_n) = 0 \quad (2)$$

Систему (1) и (2) дополним уравнениями состояния фаз

$$p = f_n (\rho_{ni}) \quad (3)$$

и соотношением

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} = 1 \quad (n = 1, 2) \quad (4)$$

Здесь p — давление, u_n, v_n — скорость, ρ_{ni} и ρ_n — истинная и приведенная плотности n -й компоненты, K_{jn} — функция взаимодействия n -й компоненты с j -й компонентой¹.

К системе (1) — (4) применяется метод малого возмущения, т. е. рассматривается линеаризованная теория обтекания тел. Тогда (1) — (4) в случае безвихревого потенциального течения с некоторыми упрощениями принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{10}}{\rho_0} [(M_1^2 - 1) \varphi_{1xx} - \varphi_{1yy}] + \frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} [(M_2^2 - 1) \varphi_{2xx} - \varphi_{2yy}] = \\ & = - \frac{k}{U_0} \left(\frac{M_1^2}{\rho_0} - \frac{M_2^2}{\rho_{00}} \right) (\varphi_{1x} - \varphi_{2x}) \\ & \left(M_1 = \frac{U_0}{a_1}, \quad M_2 = \frac{U_0}{a_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} \rho_{10} \varphi_{1x} - \frac{\rho_{10}}{\rho_0} \rho_{20} \varphi_{2x} = - \frac{k}{U_0} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6)$$

Здесь φ_1, φ_2 — потенциалы скоростей; M_1, M_2 — числа Маха; ρ_0, ρ_{00} и ρ_{10}, ρ_{20} — начальные значения истинных и приведенных плотностей сред. Сформулируем краевые условия.

Уравнения двухкомпонентной системы вблизи стенки непригодны. Как указано в начале статьи, для течения разрежения пристеночную область занимает легкая среда. Поэтому границей действия тяжелой фазы будет линия раздела фаз, на которой должны задаваться граничные условия.

Пусть линия раздела фаз будет заданной прямой и образует с осью x угол β . Очевидно, что эта линия представляется как линия тока более плотной (тяжелой) среды, т. е.

$$\varphi_{1y}(x, y) = -U_0 \beta \quad \text{при } y = \beta x \quad (7)$$

а в пристеночной области основную роль играет легкая среда, поэтому при приближении к поверхности тела удовлетворяется условие обтекания профиля однофазным потоком. Следует добавить, что скорости двухфазной системы в бесконечности ограничены и на характеристиках

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (8)$$

Таким образом, излагаемая модель дает возможность предложить следующие граничные условия: на поверхности линии раздела фаз — непрерывность нормальной и тангенциальной составляющей скорости легкой (или тяжелой) фазы и условие обтекания ее тяжелой (или легкой) фазой, а на твердой границе — условие обтекания легкой (или тяжелой) средой.

¹ Чтобы представить решения задачи в аналитической форме, функция K_{jn} принята постоянной величиной k .

Применяем к системе (5) и (6) преобразование Лапласа [8]. Тогда решения уравнения (5) и (6), удовлетворяющие граничным условиям (7) и (8), имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= U_0 \beta \omega e^{-cy/\omega} \left[w(t^*) + \int_0^{t^*} \Psi(t^* - \tau, y) w(\tau) d\tau \right] \\ \varphi_2(x, y) &= U_0 \beta \omega \frac{\rho_0}{\rho_{00}} e^{-cy/\omega} \left\{ w(t^*) + \int_0^{t^*} \Psi(t^* - \tau, y) w(\tau) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - a \left[\int_0^{t^*} e^{-m(t^* - \tau)} w(\tau) d\tau + \int_0^{t^*} \Psi(t^* - \tau, y) \int_0^{\tau} e^{-m(\tau - \tau_1)} w(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right] \right\} \quad (9) \\ w(x) &= \int_0^x e^{-bt} I_0(ct) dt + l \int_0^x dt \int_0^t e^{-bt} I_0(c\tau) d\tau \\ \Psi(x, y) &= -c_{-2} \frac{y}{\omega} + \left(-c_{-3} \frac{y}{\omega} + C_{-2}^2 \frac{y^2}{\omega^2} \right) x + \dots \\ a &= \frac{k\rho_0}{U_0 \rho_{10} \rho_{20}} \left(1 - \frac{\rho_{00}}{\rho_0} \right), \quad b = \frac{k}{2U_0} \left(\frac{B_3}{B_2} + \frac{1}{B_1} \right) \\ c &= \frac{k}{2U_0} \left(\frac{B_3}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right), \quad l = \frac{k}{U_0 B_1}, \quad \omega^2 = \frac{B_1}{B_2} \\ m &= \frac{k\rho_0^2}{U_0 \rho_{10} \rho_{20}}, \quad B_1 = \frac{\rho_{10}^2}{\rho_0^2} \rho_{20} + \frac{\rho_{20}^2}{\rho_{00}^2} \rho_{10} \\ t^* &= x - \frac{y}{\omega}, \quad B_2 = \frac{\rho_{10}^2}{\rho_0^2} \rho_{20} (M_1^2 - 1) + \frac{\rho_{20}^2}{\rho_{00}^2} \rho_{10} (M_2^2 - 1) \\ B_3 &= \frac{\rho_{10}}{\rho_0} (M_1^2 - 1) + \frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} (M_2^2 - 1) + \left(\frac{M_1^2}{\rho_0} - \frac{M_2^2}{\rho_{00}} \right) \left(\frac{\rho_{10}}{\rho_0} \rho_{20} - \frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} \rho_{10} \right) \end{aligned}$$

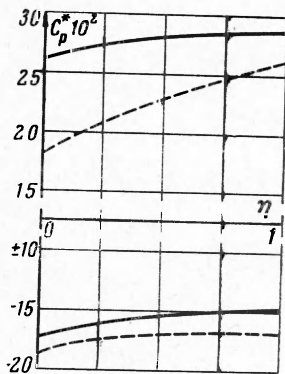
Здесь $I_0(cx)$ — модифицированная функция Бесселя.

Для определения взаимодействия с тонким телом двухфазного потока нужно рассмотреть движение одной фазы в области, прилегающей к поверхности тела. Очевидно, для потенциала скорости φ_2^* возмущенного потока имеем уравнение

$$\varphi_{2xx}^* = \omega_0^2 \varphi_{2yy}^* \left(\omega_0^2 = \frac{1}{M_2^2 - 1} \right) \quad (10)$$

которое имеет решение вида

$$\begin{aligned} \varphi_2^*(x, y) &= \frac{1}{2} \left[f\left(x - \frac{y}{\omega_0}\right) + f\left(x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{y}{\omega_0}\right) \right] + \frac{\omega_0}{2} \int_{x_-}^{x_+} F(z) dz \quad \left(\begin{array}{l} x_+ = x + y/\omega_0 \\ x_- = x - y/\omega_0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (11)$$



Фиг. 2

Здесь $f(x)$ и $F(x)$ — известные (вследствие условия непрерывности скорости легкой компоненты на линии раздела фаз) из решения в области течения двухкомпонентной среды функции. Как сказано ранее, на поверхности тонкого тела выполняется условие обтекания

$$\varphi_{2y}^*(x, y_0) = -U_0 \beta_0(x) \quad (12)$$

Здесь $\beta_0(x)$ — угол наклона касательных к элементам профиля.
Подставив (11) в (12), можно получить формулу для определения формы тела, которая из-за громоздкости не приводится. Коэффициент давления

$$c_p^* = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2} = -2\beta_0(\eta) \omega \left\{ \frac{dw(\eta)}{d\eta} + \left(1 - \frac{\rho_{00}}{\rho_0}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}}\right) \frac{\beta}{\beta_0(\eta)}\right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^\eta e^{-(\eta-t)} w(t) dt \right\} \quad (13)$$

Здесь $m_x = \eta$, $m_y = \xi$ — безразмерные переменные.

Отметим, что в случае отсутствия одной из сред из (13) вытекает формула Прандтля — Аккерта [9].

Аналогично исследовано течение уплотнения. Конкретные расчеты в случае

$$M_1 = 1.85, M_2 = 1.5, \rho_0 = 0.121 \text{ кг}\cdot\text{сек}^2 / \text{м}^4 \\ \rho_{00} = 0.075 \text{ кг}\cdot\text{сек}^2 / \text{м}^4, \rho_{10} = 0.1089 \text{ кг}\cdot\text{сек}^2 / \text{м}^4 \\ \beta = 0.0875, K = 50 \text{ кг}\cdot\text{сек} / \text{м}^4$$

показывают, что форма поверхности тонкого тела — клинообразный профиль (на фиг. 1, заштрихованная часть), кривая коэффициента давления двухфазной среды (фиг. 2, сплошные линии) расположена выше однофазной (фиг. 2, пунктирные линии), и в случае течения разрежения (уплотнения) легкий компонент среды приобретает большую (меньшую) скорость, чем тяжелый. На фиг. 2 верхние две (сплошная и пунктирная) кривые относятся к течению уплотнения, а нижние — к течению разрежения.

Поступила 5 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Бувич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. Kliegel J. R. Pas particle nozzle flows. In. Sympos. (Internat.) Comb. 9 th, N. Y., Acad. Press, 1963. (Рус. перев.: Клигель. Течение смеси газа с частицами в сопле. Сб. вопр. ракетн. техн., 1965, № 10, стр. 3—29.)
4. Kliegel Y. R., Nickerson G. R. Flow of gas—particle mixtures in axially symmetric nozzles. In: Detonation and two—phase flow, N. Y. Acad., Press, 1962, pp. 173—194. (Рус. перев.: Сб. Детонация и двухфазное течение. М., «Мир», 1966, стр. 183—201.)
5. Hoffman J. D., Thompson H. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contour for gas — particle flows. AIAA, Paper, 1966, No. 66—538. (Рус. перев.: Хоффман, Томпсон. Обобщенный метод определения оптимального контура сопла в случае двухфазных потоков. Сб. Вопр. ракетн. техн., 1967, № 3, стр. 46—63.)
6. Вережак Л. П., Галюн С. Н., Крайко А. Н., Стернин Л. Е. Результаты расчета методом характеристик течения газа с частицами в осесимметричных соплах и сравнение с результатами одномерного приближения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 133—138.
7. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с ивородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 596—605.
8. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.