ПМТФ, № 6, 1972

УДК 532.6 + 532.528

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Г. Гузевский

(Новосибирск)

Предлагается приближенный метод решения задач для плоских стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости с одной свободной границей. К этому классу относятся, например, задача об истечении тяжелой жидкости из-под криволинейного щита и симметричные задачи о кавитационном обтекании криволинейных дуг по различным классическим схемам [1] в продольном поле силы тяжести. Метод иллюстрируется на примере решения задачи о кавитационном обтекании заданной криволинейной дуги, установленной на горизонтальном дне, по схеме Рябушинского в поле сил тяжести, перпендикулярном направлению набегающего потока.

Фиксированная криволинейная граница (дуга P) задается уравнением $\Psi = \Psi(l)$, где Ψ — угол наклона касательной заданной дуги к горизонтальной прямой, l — дуговая абсцисса. Дуга P аппроксимируется некоторой кривой $\Psi_* = \Psi_*(l)$, имеющей непрерывную производную, таким образом, чтобы $\Psi_* = \Psi$ для конечного числа значений дуговой абсциссы l. Линеаризация граничного условия на свободной поверхности, при которой условие постоянства давления в каверне удовлетворяется точно в конечном числе точек этой границы, проводится, как и в работах [2, 3]. При такой конечномерной аппроксимации граничных условий решение задачи (в плоскости вспомогательного параметрического переменного) получается в явном виде. Основная трудность заключается в определении численных значений параметров, вошедших в решение задачи, из системы нелинейных трансцендентных уравнений. Метод решения этой системы с использованием ЭВМ основывается на алгоритме, предложенном в [3], для систем уравнений такого типа.

Исследование вопросов существования и единственности решения для широкого класса задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами на основе метода конечномерной аппроксимации проведено в работах В. Н. Монахова [2]. Криволинейные границы аппроксимируются при этом полигонами.

Ранее приближенные аналитические решения задач о струйном обтекании заданных криволинейных препятствий были получены только в случае невесомой жидкости [4].

Рассмотрим плоский установившийся поток идеальной тяжелой жидкости, набегающий на криволинейную дугу P, которая расположена на горизонтальном прямолинейном дне. В качестве схемы кавитационного обтекания выберем схему Рябушинского с «зеркалом» (фиг. 1). Вследствие предполагаемой симметрии течения достаточно ограничиться рассмотрением потока в области D_z, ограниченной линией тока $CDAB$ и эквипотенциалью BC. Начало декартовой системы координат поместим в точке A отрыва потока; ось абсцисс направим горизонтально, а ось ординат — перпендикулярно вектору скорости набегающего потока.

Криволинейную дугу P зададим уравнением

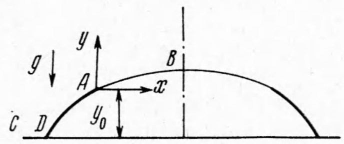
$$\Psi = \Psi(l_*) \qquad (l_* = l / L, \quad 0 \leqslant l_* \leqslant 1) \tag{1}$$

где Ψ — угол между касательной к дуге P и осью x; l — длина дуги, измеряемая вдоль P; L — полная длина дуги P. В дальнейшем будем предполагать, что функция $\Psi(l_*)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

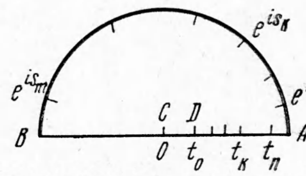
Неизвестная (свободная) граница AB отыскивается из условия постоянства давления в каверне, которое на основании уравнения Бернулли имеет вид

$$\frac{q^2}{q_0^2} = 1 - \frac{2}{p(1+\sigma)\,\mathrm{Fr}^2}\,\frac{y}{L} \qquad \left(\sigma = \frac{q_0^2}{q_\infty^2} - 1,\ \mathrm{Fr} = \frac{q_\infty}{\sqrt{g y_0}}\right) \tag{2}$$

Здесь $q = q\,(y)$ — величина скорости в точке свободной границы с ординатой y, $q_0 = q\,(0)$, q_∞ — скорость невозмущенного потока; $p = y_0 / L$ — заданный параметр, характеризующий геометрию препятствия; y_0 — вертикальный размер препятствия; σ — число кавитации, Fr — число Фруда, g — ускорение силы тяжести.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отобразим конформно область D_z на внутреннюю часть единичного полукруга Γ_ζ

$$|\zeta| < 1, \qquad \mathrm{Im}\,\zeta > 0$$

с соответствием точек, указанным на фиг. 2, при котором свободная граница переходит в дугу круга $\zeta = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$, а остальная часть границы — в действительный диаметр $\zeta = t$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда производная функции, осуществляющей отображение Γ_ζ на область в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$, примет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = K q_0 \frac{1-\zeta}{\zeta^{3/2}} \tag{3}$$

где K — некоторая вещественная постоянная.

Введем функцию Жуковского

$$\Omega(\zeta) = i \ln \frac{1}{q_0}\frac{dw}{dz} \equiv \vartheta(\zeta) + i\tau(\zeta) \tag{4}$$

где ϑ — угол вектора скорости с осью x, $dw / dz = q e^{-i\vartheta}$ — комплексная скорость течения.

Для аналитической в Γ_ζ функции $\Omega(\zeta)$ легко получить представление через функции $\vartheta(t)$ и $\tau(s) = \ln(q(s) / q_0)$, где $\vartheta(t)$ — предельное значение действительной части Ω при $\zeta \to t \in [t_0, 1]$, а $\tau(s)$ — предельное значение мнимой части Ω при $\zeta \to e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$. Действительно, на границе полукруга Γ_ζ функция $\Omega(\zeta)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\mathrm{Im}\,\Omega(e^{is}) = \tau(s) = \ln(q(s) / q_0), \qquad s \in [0, \pi]$$

$$\mathrm{Re}\,\Omega(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in [t_0, 1] \\ 0, & t \in [-1, t_0] \end{cases}$$

Отсюда в результате решения смешанной краевой задачи получим представление для функции Ω

$$\Omega(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{\pi i}\left[\int_{t_0}^{1} \frac{\vartheta(t)\,dt}{(t-\zeta)(1-\zeta t)} - \int_0^\pi \frac{\tau(s)\,ds}{1 - 2\zeta\cos s + \zeta^2}\right] \tag{5}$$

Соответствие между областью течения и параметрической плоскостью согласно равенствам (3), (4) задается функцией

$$z(\zeta) = K \int_1^{\zeta} \frac{1 - \zeta}{\zeta^{3/2}} e^{i\Omega(\zeta)} d\zeta \tag{6}$$

с $\Omega(\zeta)$, определенной формулой (5). Зависимость $l = l(t)$ находится из формулы

$$l(t) = K \int_{t_0}^{t} \frac{1 - t}{t^{3/2}} e^{-\operatorname{Im}\Omega(t)} dt \tag{7}$$

где $\operatorname{Im}\Omega(t)$ — предельное значение мнимой части $\Omega(\zeta)$ при $\zeta \to t \in [-1,1]$ причем согласно (5)

$$\operatorname{Im}\Omega(t) = -\frac{1 - t^2}{\pi}\left[\int_{t_0}^{1} \frac{\vartheta(\xi)\, d\xi}{(\xi - t)(1 - t\xi)} - \int_0^{\pi} \frac{\tau(s)\, ds}{1 - 2t\cos s + t^2}\right] \tag{8}$$

При произвольно заданных $\vartheta(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\tau(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \pi$ формулы (4) — (6) дают общее решение некоторой обратной задачи об обтекании дуги, форма которой заранее неизвестна, а на границе AB давление, вообще говоря, отлично от постоянного. Для решения прямой задачи о построении кавитационного течения около заданного препятствия P необходимо выполнить краевое условие (2) на свободной границе и соотношение $\vartheta(t) = \Psi[l(t)\,/\,l(1)]$, вытекающее из условия задания дуги P уравнением (1)

$$\tau(s) = \frac{1}{2}\ln\left[1 - \frac{2\lambda}{J}\int_0^{s} \sin\frac{s}{2}\, e^{-\tau(s)} \sin\{\operatorname{Re}\Omega(e^{is})\}\, ds\right], \quad s \in [0, \pi] \tag{9}$$

$$\vartheta(t) = \Psi\left[\frac{1}{J}\int_{t_0}^{t} \frac{1 - t}{t^{3/2}} e^{-\operatorname{Im}\Omega(t)} dt\right], \quad t \in [t_0, 1]$$

В этих формулах

$$\lambda = \frac{2}{p(1 + \sigma)\operatorname{Fr}^2}, \quad J = \frac{l(1)}{K} = \int_{t_0}^{t} \frac{1 - t}{t^{3/2}} e^{-\operatorname{Im}\Omega(t)} dt$$

$$\operatorname{Re}\Omega(e^{is}) = \frac{\sin s}{\pi}\left[2\int_{t_0}^{1} \frac{\vartheta(t)\, dt}{1 - 2t\cos s + t^2} - \int_0^{\pi} \frac{\tau(\gamma)\, d\gamma}{\cos\gamma - \cos s}\right] \tag{10}$$

Из (4) и (5) при $\zeta = 0$ следует соотношение для числа кавитации

$$\sigma = \frac{q_0^2}{q_\infty^2} - 1 = \exp\left\{\frac{2}{\pi}\left[\int_{t_0}^{1} \frac{\vartheta(t)}{t} dt - \int_0^{\pi} \tau(s)\, ds\right]\right\} - 1$$

которое может служить дополнительным условием для определения параметра t_0. Однако в дальнейшем будем считать величину t_0 фиксированной. Следовательно, число кавитации определяется после решения задачи.

С целью приближенного нахождения функций $\vartheta(t)$ и $\tau(s)$ из системы (9) поступим следующим образом. Введем в рассмотрение ряд фиксированных точек, расположенных на границе полукруга Γ_ζ

$$\zeta_k = e^{is_k} \quad (0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m < s_{m+1} = \pi), \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$$

Далее положим

$$\tau(s) = \sum_{k=0}^{m} \tau^k(s), \qquad \vartheta(t) = \sum_{k=0}^{n} \vartheta^k(t) \tag{11}$$

где

$$\tau^k(s) = \begin{cases} 0, \; s \text{ вне } [s_k, s_{k+1}] \\ \tau(s_k) + \dfrac{\cos s - \cos s_k}{\cos s_{k+1} - \cos s_k} [\tau(s_{k+1}) - \tau(s_k)] \equiv a_k + b_k \cos s, \quad s \in [s_k, s_{k+1}] \end{cases}$$

$$\vartheta^k(t) = \begin{cases} 0, \; t \text{ вне } [t_k, t_{k+1}] \\ \vartheta(t_k) + \dfrac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} [\vartheta(t_{k+1}) - \vartheta(t_k)] \equiv c_k + d_k t, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

По построению

$$\tau^k(s_k) = \tau(s_k) \equiv \tau_k \quad (k = 0, \ldots, m+1), \qquad \vartheta^k(t_k) = \vartheta_k \quad (k = 0, \ldots, n+1).$$

При такой интерполяции искомых функций $\vartheta(t)$ и $\tau(s)$ — интегралы, входящие в представление (5) функции $\Omega(\zeta)$, вычисляются в явном виде

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \sum_{k=0}^{m} b_k (s_{k+1} - s_k) \frac{1-\zeta^2}{2\zeta} - i\left(a_k + b_k \frac{1+\zeta^2}{2\zeta}\right) \times \right.$$
$$\left. \times [F_k(\zeta) - F_{k+1}(\zeta)] + R(\zeta) - R\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} \tag{12}$$

где

$$F_k(\zeta) = \ln \frac{\zeta - e^{is_k}}{1 - \zeta e^{is_k}}, \qquad R(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} (c_k + d_k \zeta) \ln \frac{t_{k+1} - \zeta}{t_k - \zeta}$$

Выполняя равенства (9) в точках $\zeta_k = e^{is_k} (k = 1, \ldots, m+1)$ и $t_k (k = 1, \ldots, n)$, приходим к системе $m + n + 1$ уравнений относительно параметров $\tau_1, \ldots, \tau_{m+1}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$

$$\tau_k = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2\lambda}{J} \int_0^{s_k} \sin \frac{s}{2} e^{-\tau(s)} \sin \vartheta(e^{is})\, ds \right] \quad (k = 1, \ldots, m+1)$$

$$\vartheta_k = \Psi \left[\frac{1}{J} \int_{t_0}^{t_k} \frac{1-t}{t^{3/2}} e^{-\tau(t)}\, dt \right] \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

$$(\tau(t) = \operatorname{Im} \Omega(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad \vartheta(e^{is}) = \operatorname{Re} \Omega(e^{is}), \quad 0 \leqslant s \leqslant \pi)$$

После нахождения решения данной системы уравнений течение определяется формулами (3), (6), (12). При этом (по построению) уравнение (1) дуги P будет выполнено в точках $z(t_k)$, $k = 0, \ldots, n+1$, а условие постоянства давления (2) на границе AB — в точках $z(e^{is_k})$, $k = 0, \ldots$ $\ldots, m+1$.

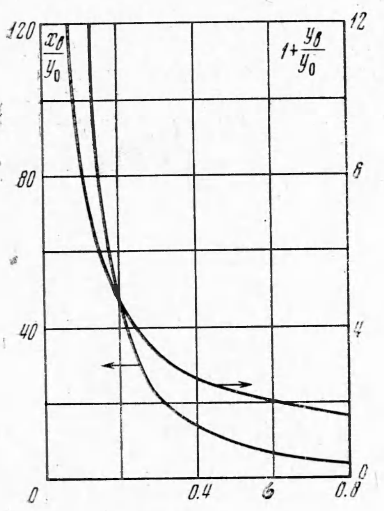
В первом приближении решение задачи находится при $m = n = 0$. Неизвестный параметр $\tau_1 = \ln(q_b / q_0)$ определяется из единственного уравнения, оставшегося в этом случае от системы уравнений (13).

Допустим теперь, что решение задачи получено в i-м приближении. Тем самым при некоторых фиксированных параметрах $s_k{}^i$ $(k = 1, \ldots, m_i)$ и t_k^i $(k = 1, \ldots, n_i)$ из системы уравнений (13) определены соответствующие им величины $\vartheta_k{}^i$ $(k = 1, \ldots, n_i)$ и $\tau_k{}^i (k = 1, \ldots, m_i + 1)$. Учитывая вид функций $\vartheta(t)$ и $\tau(s)$, заданных формулами (11), легко построить обратные зависимости $t = T(\vartheta)$ и $s = S(\tau)$.

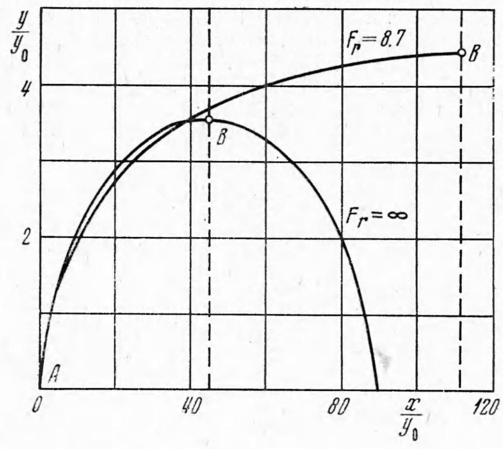
Решение задачи в $(i+1)$-м приближении с $m = m_{i+1} > m_i$ и $n = n_{i+1} > n_i$ проводится в следующей последовательности. Сначала, используя построенные ранее зависимости $t = T(\vartheta)$ и $s = S(\tau)$, выбираются параметры $t_k = t_k^{i+1}$ и $s_k = s_k^{i+1}$

$$t_k = T(\Psi_k), \quad \Psi_k = \Psi\left(\frac{k}{n_{i+1}+1}\right) \quad (k = 1, \ldots, n_{i+1}) \tag{14}$$

$$s_k = S(f_k), \quad f_k = \frac{k}{m_{i+1}+1}\,\tau^{\,i}_{m_i+1} \quad (k = 1, \ldots, m_{i+1}+1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Система уравнений (13) решается методом итераций. При этом начальное приближение $\vartheta_k^{(0)}$, $\tau_k^{(0)}$ задается следующим образом:

$$\vartheta_k^{(0)} = \Psi_k \quad (k = 1, \ldots, n_{i+1}), \qquad \tau_k^{(0)} = f_k \quad (k = 1, \ldots, m_{i+1}+1)$$

При выборе узлов интерполирования функций $\vartheta(t)$ и $\tau(s)$ по закону (14) можно ожидать, что образы точек t_k и e^{is_k} при отображении (6) будут достаточно равномерно распределены вдоль границы DAB. После нахождения решения системы производится проверка точности полученного приближенного решения гидродинамической задачи:

1) полученный профиль DA сравнивается с заданной криволинейной дугой P;

2) производится сравнение формы каверны в i-м и $(i+1)$-м приближениях и условие постоянства давления проверяется на всей свободной границе

Описанный процесс построения приближенного решения исходной задачи повторяется до тех пор, пока с требуемой точностью не будут выполнены соотношения (1) и (2).

Расчеты, проведенные для ряда криволинейных профилей, показали высокую эффективность предложенного метода.

Ниже в качестве примера приводятся результаты расчета задачи о кавитационном обтекании препятствия в форме дуги окружности с углом отрыва $\Psi(1) = 35°$. На фиг. 3 изображены кривые зависимости размеров каверны от числа кавитации в случае невесомой жидкости. При $n = 15$ максимальное отклонение формы полученного профиля от дуги круга составляет не более 0.2% (сравнение по радиусу в полярных координатах) и время расчета одного варианта задачи на машине БЭСМ-6 не превышает одной минуты. При $n = 31$ погрешность становится менее 0.05%.

Сравнение формы свободной границы для течений невесомой и тяжелой жидкости при $\sigma = 0.2$ проведено на фиг. 4. В данном случае расчеты выполнены с $m = n = 15$ и погрешность не превышает 0.2%.

Автор благодарит В. Н. Монахова за постоянный интерес к работе.

Поступила 21 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, ч. 1. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1969.
3. Гузевский Л. Г. Кавитационное обтекание пластинки в поперечном поле силы тяжести. ПМТФ, 1971. № 5.
4. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями. В кн. «Итоги науки», Гидромеханика, 1970, т. 5. М., ВИНИТИ, 1971.