

СВОЙСТВА МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА УСКОРЯЕМЫХ РАЗНОПЛОТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В. Е. Неуважаев

(Челябинск)

Предложенная в [1] простая модель турбулентного перемешивания границы раздела ускоряемых разноплотных жидкостей позволяет найти решения ряда задач в аналитическом виде. Это дает возможность изучить зависимость свойств решения от входящих в модель эмпирических постоянных.

Рассмотрена усложненная модель турбулентного перемешивания с тремя параметрами и проанализирована роль вновь введенного параметра. Построены решения задачи с переменным ускорением, заданным степенным, ступенчатым и синусоидальным законами. Показано, что в зависимости от постоянной модели, характеризующей роль инерциального механизма, ширина области перемешивания может изменяться до двух раз. Получено решение задачи о перемешивании слоя малой толщины, а в случае конечной толщины задача сведена к интегралу.

1. Модель с тремя параметрами. Граница двух несжимаемых разноплотных жидкостей, помещенных в ускоряемый сосуд, неустойчива, если ускорение направлено от легкой жидкости к тяжелой. Это известная неустойчивость Рэля — Тейлора. Если вязкость и поверхностное натяжение пренебрежимо малы, что имеет место при больших ускорениях, то граница разрушится. Наступит перемешивание одного вещества с другим, которое, как показывают эксперименты [2], носит турбулентный характер.

Для описания турбулентного перемешивания имеются полуэмпирические модели. Простейшая, с одной постоянной, была предложена в [3]. Дальнейшее развитие модели дано в [4, 5].

Усложненная полуэмпирическая модель турбулентного перемешивания с тремя параметрами для случая двух несжимаемых веществ имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$(1.2) \quad \frac{d \rho v^2}{2dt} = \rho D g \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} - \nu \frac{\rho v^3}{l} + \frac{4}{3} \alpha_2 \rho D \left(\frac{d \ln \rho}{dt} \right)^2 + \frac{5}{6} \rho v^2 \frac{d \ln \rho}{dt};$$

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \bar{u} = -D \frac{\partial \ln \rho}{\partial x};$$

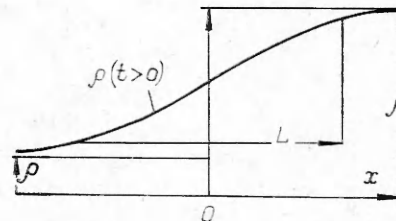
$$(1.4) \quad D = lv;$$

$$(1.5) \quad l = \alpha L,$$

где ρ — плотность смеси тяжелой (ρ_1) и легкой (ρ_2) жидкостей; v^2 — турбулентная энергия; g — ускорение, зависящее только от времени; u — скорость смеси, определяемая соотношением (1.3) для несжимаемых жидкостей [3]; L — эффективная ширина области перемешивания, определяемая ниже; α , ν , α_2 — эмпирические постоянные.

В начальный момент $t = 0$ полагаем, что граница раздела совпадает с началом координат $x = 0$, а легкая и тяжелая жидкости расположены соответственно слева и справа (фиг. 1).

Выписанная выше система уравнений получается при последовательном осреднении исходных газодинамических уравнений. Истинные значения плотности ρ , скорости u , давления p и энтропии заменяются средними значениями и пульсациями: $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $p = \bar{p} + p'$, $u_k = \bar{u}_k + u'_k$, $k = 1, 2, 3$ и т. д. При осреднении пренебрегаем третьими корреляциями и произведениями



Ф и г. 1

вторых. Уравнение баланса турбулентной энергии строится обычным образом с использованием для замыкания гипотезы Прандтля:

$$\overline{u'_k p'} = -D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k},$$

$$\overline{u'_k u'_i} = \frac{2}{3} v^2 \delta_{ki} - \alpha_2 D \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{2d \ln \bar{\rho}}{3 dt} \delta_{ki} \right]$$

и предположения Ландау:

$$\overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \nu \bar{\rho} \frac{v^3}{l}.$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) и далее черточка у величины ρ опущена.

Поясним смысл полученных в уравнении (1.2) членов. Первый член в правой части является основным, порождающим турбулентное перемешивание, и пропорционален корню квадратному из частоты Брента — Вейселя, характеризующей скорость роста коротковолновых возмущений, а в случае устойчивого течения, при отрицательных значениях, полагается равным нулю.

Второй член учитывает диссипацию турбулентной энергии. Он устанавливает закон затухания турбулентности при отсутствии порождающих ее источников.

Третий и четвертый члены появились в результате последовательного применения гипотезы Прандтля. Эти члены отсутствовали в [1].

Полученные уравнения согласуются с моделью [4] при условии несжимаемости.

Выясним роль двух последних членов в уравнении (1.2). Для этого воспользуемся приближенным подходом работы [1], где предложено считать $\partial v / \partial x = 0$. Такое приближение несколько искажает решение на фронте перемешивания, но зато значительно упрощает исходные уравнения, позволяя в ряде случаев построить решение в аналитическом виде.

Действительно, в этом случае коэффициент D будет зависеть только от времени, поэтому после замены

$$(1.6) \quad d\tau = D dt$$

уравнение (1.1) сведется к уравнению диффузии, решение которого известно:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right),$$

где Φ — интеграл вероятности.

Для построения решения в целом нужно определить энергию v^2 и проинтегрировать уравнение (1.6). Под шириной области перемешивания L будем понимать эффективную ширину, которую находим по безразмерной плотности

$$(1.7) \quad \delta = (\rho - \rho_2) / (\rho_1 - \rho_2) = (1/2)(1 + \Phi)$$

как расстояние между точками, в которых $\delta = 0,1$ и $0,9$.

Из (1.7) следует, что определенный таким образом фронт перемешивания вправо и влево распространяется симметрично и ширина перемешивания есть

$$(1.8) \quad L = 4\eta_0 \sqrt{\tau}, \quad \eta_0 = 0,906.$$

Получим уравнение для v . В (1.2) перейдем к эйлеровой координате. Усредним обе части уравнения по области перемешивания и построим уравнение для \bar{v} . Здесь и далее черточку над v будем опускать:

$$(1.9) \quad \frac{d\bar{v}^2}{2d\tau} + k \frac{\bar{v}^2}{\tau} = \frac{0,4(n-1)}{\eta_0(n+1)} \frac{g}{\sqrt{\tau}};$$

$$(1.10) \quad k = \frac{v}{16\eta_0^2\alpha^2} + \frac{0,4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{(n-1)^2}{(n+1)} - \frac{16\eta_0^2\alpha^2}{3\pi^2} \alpha_2 \frac{(n-1)^4}{(n+1)}, \quad n = \rho_1/\rho_2.$$

Решение уравнения (1.9) имеет вид

$$v^2 = \frac{0,8(n-1)}{\eta_0(n+1)} \tau^{-2k} \int_0^\tau g \tau^{2k-1/2} d\tau.$$

Используя (1.6), (1.8), получим уравнение, определяющее зависимость $\tau(t)$. В некоторых случаях решение строится в аналитическом виде. Так, если ускорение g до некоторого момента t_0 постоянно ($g = g_0$), а потом равно нулю, то имеем

$$(1.11) \quad L = \begin{cases} A \frac{n-1}{n+1} g_0 t^2, & t \leq t_0, \\ A \frac{n-1}{n+1} g_0 t_0^2 \left[2(1+2k) \frac{t-t_0}{t_0} + 1 \right]^{1/(1+2k)}, & t \geq t_0, \end{cases}$$

где

$$A = \frac{6,4\alpha^2\eta_0^2}{1+4k}.$$

На этом решении можно проанализировать влияние параметров модели — постоянных α , v , α_2 .

Введенный параметр k , согласно (1.10), зависит от трех постоянных α , v , α_2 и величины $(n-1)/(n+1)$, называемой числом Атвуда. При выключенном ускорении параметр k определяет степень затухания турбулентного перемешивания. Из теоретических оценок, полученных в [6], следует, что турбулентность затухает по «закону 2/7», т. е. характерная турбулентная длина l зависит от времени:

$$l \sim t^{2/7}.$$

Поэтому при малых числах Атвуда имеем

$$(1.12) \quad 1/(1+2k_0) = 2/7, \quad k_0 = v/(16\eta_0^2\alpha^2) = 5/4.$$

На стадии перемешивания с постоянным ускорением, описываемой верхним равенством формулы (1.11), определяется постоянная A_0 . Она выбирается из эксперимента $A_0 = 0,09$ [2].

Заметим, что ширина перемешивания при малом числе Атвуда ($n \sim 1$) зависит линейно от него. Это совпадает с результатами работы [3], где была указана логарифмическая зависимость $\ln n \simeq 2(n-1)/(n+1)$.

В общем случае зависимость от числа Атвуда представляется более сложной. Если при малых числах Атвуда значение параметра α_2 несущественно, то в общем случае оно может проявиться. На фиг. 2 дана зависимость параметров A и k от числа Атвуда $(n-1)/(n+1)$, построенная при двух значениях параметра $\alpha_2 = 0$ и 10. Как следует из приводимых кривых, параметры A и k остаются примерно постоянными и слабо зависят от значения α_2 при $(n-1)/(n+1) < 0,6$.

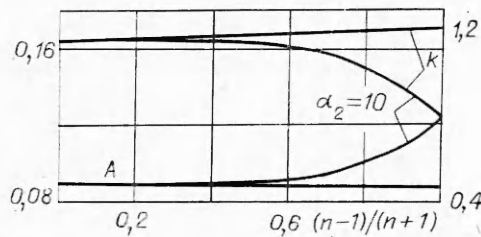
Таким образом, третий параметр α_2 можно определить только при тщательно поставленных экспериментах, которые могли бы выявить установленные зависимости. Ниже положено $\alpha_2 = 0$.

2. Переменное ускорение. При обработке экспериментальных результатов чаще всего ускорение непостоянно. Поэтому используют хорошо измеряемую в опыте характеристику — перемещение системы s , которое связано с ускорением очевидным соотношением

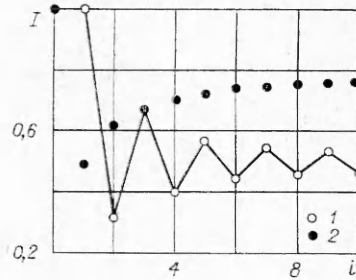
$$(2.1) \quad s = \int \left(\int \underline{g} dt \right) dt.$$

Один из главных параметров A характеризует развитие перемешивания во времени и обычно определяется на основании (1.11), (2.1):

$$(2.2) \quad L/2s = A(n-1)/(n+1).$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

При постоянном ускорении и постоянном n параметр A постояен. Однако при переменном ускорении это будет не так. Ниже рассмотрены три случая: ускорение зависит от времени 1) степенным образом, 2) ступенчатым с постоянным периодом и 3) по синусоидальному закону.

1) Пусть

$$(2.3) \quad g = g_0 t^m,$$

где степень m может быть как положительной, так и отрицательной. Исключая особые случаи, будем считать $m > -1$.

В приложении вычислено перемещение s от переменной τ . Соотношение (1.8) определяет ширину L как функцию от τ . Поэтому отношение, соответствующее (2.2), но для случая переменного ускорения, легко устанавливается:

$$(2.4) \quad \frac{L}{2s} = \frac{2(1+4k)(1+m)}{(1+4k)(2+m)+m} A \frac{n-1}{n+1}.$$

Очевидно, что при $m = 0$ (постоянное ускорение) последнее выражение переходит в (2.2). Появившийся множитель при $m > 0$ больше 1 и при $m < 0$ меньше 1.

Таким образом, если при обработке опыта пользоваться формулой (2.2), то при возрастающем ускорении постоянная завышается, а при спадающем — занижается. При $k = 5/4$

$$\frac{L}{2s} = \frac{1+m}{1+7m/12} A \frac{n-1}{n+1}.$$

Отметим два крайних случая. Если предположить параметр k малым, то множитель в (2.4) не зависит от m . Если степень m близка к -1 , ускорение резко падает, множитель мал, и перемешивания почти не происходит.

2) Пусть ускорение изменяется по закону

$$(2.5) \quad g = \begin{cases} 2g_0, & 2(i-1)t_0 < t < (2i-1)t_0, \\ 0, & (2i-1)t_0 < t < 2it_0, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Подобное ускорение получается на границе раздела двух покоящихся в начальный момент слабосжимаемых жидкостей, разгоняемых со стороны легкой жидкости поршнем с постоянным ускорением.

В такой постановке решение задачи не будет автомодельным. Однако при больших временах установится асимптотический режим, который мы и найдем. Граница раздела в целом перемещается так же, как и при постоянном ускорении g_0 . Вопрос заключается в количественной оценке изменения соотношения (2.2).

Если k мало, то это значит, что мал параметр ν и велика роль инерции в уравнении (1.2). Положим формально $k = 0$.

Уравнения (1.4)–(1.6), (1.9) интегрируются, и решение для ширины имеет вид

$$(2.6) \quad L(k=0) = A_0 \frac{n-1}{n+1} 2s, \quad A_0 = A(k=0) = 6,4\alpha^2 \eta_0^2.$$

Оно верно при произвольной зависимости ускорения от времени.

Если k велико (достаточно считать $k \gg 0,25$), то уравнение (1.9) можно заменить выражением

$$v^2 = \frac{0,4(n-1)}{\eta_0(n+1)} g \frac{\sqrt{\tau}}{k},$$

а решение получить в виде

$$(2.7) \quad L(k \gg 0,25) = A_1 \frac{n-1}{n+1} \left(\int_0^i \sqrt{g} dt \right)^2,$$

$$A_1 = A(k \gg 0,25) = \frac{1,6\alpha^2 \eta_0^2}{k},$$

что эквивалентно решению из [3], где было пренебрежено инерцией турбулентного перемешивания.

При малых k формула (2.2) выполняется и при переменном ускорении на основании (2.6). Если $k \gg 0,25$, то, как следует из (2.7), отношение (2.2) уже не будет постоянным. Действительно,

$$\frac{L(k \gg 0,25)}{2s} = A_1 \frac{n-1}{n+1} I(t),$$

$$I(t) = \left(\int_0^t \sqrt{g} dt \right)^2 / 2s.$$

Множитель $I(t)$ зависит от времени. Его можно вычислить.

Для ступенчатого ускорения (2.5) получим $I(0) = 1$, при больших временах $I(\infty) = 0,5$. Действительно, значение $I(t)$ есть

$$(2.8) \quad I(it_0) = \begin{cases} \frac{i+1}{2i}, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ \frac{i}{2(i+1)}, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases}$$

3) Для синусоидального ускорения

$$g = g_0(1 + \varphi \sin(\pi t/t_0))$$

множитель I равен

$$I(it_0) = \frac{4i^2(1+\varphi) E^2\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2\varphi}{1+\varphi}}\right)}{2\pi i\varphi + \pi^2 i^2},$$

где E — эллиптический интеграл второго рода. Если $\varphi = 1$, то $E(\pi/2, 1) = 1$ и

$$(2.9) \quad I(it_0) = 8i/(\pi^2 i + 2\pi).$$

На фиг. 3 представлена зависимость множителя $I(t)$ от времени (точками 1 изображена функция (2.8) для ступенчатого ускорения, 2 — (2.9) для синусоидального). В реальных моделях $k \simeq 1,25$, поэтому в этом случае множитель $I(t)$ будет близок к полученным выше при $k \gg 0,25$.

3. Перемешивание слоя конечной ширины. Слой вещества, помещенный в среду другой плотности, перемешивается в любом случае независимо от знака ускорения, так как одна из границ будет неустойчива всегда.

На первой стадии, до выхода области перемешивания на устойчивую границу, решение будет автомодельным. Затем начнется вторая стадия, неавтомодельная. В [3] было указано асимптотическое решение второй стадии для одного частного случая.

Модель [1] позволяет задачу о перемешивании слоя свести к интегралам, а случай перемешивания тонкого слоя решить аналитически.

Построенные предельные решения имеют принципиальное значение для проверки принятой теории и ее сравнения с экспериментом. Согласно п. 1, перемешивание тяжелого слоя толщины x_0 и с плотностью ρ_1 , окруженного веществом с плотностью ρ_2 , описывается решением

$$\rho = \rho_2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) \left[\Phi \left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right]$$

Здесь положено для определенности, что перемешивание начинается на границе раздела $x = x_0$, а точка $x = 0$ отвечает устойчивой границе.

Введем безразмерную плотность δ следующим образом:

$$\delta = \frac{\rho - \rho_2}{\rho(0, \tau) - \rho_2} = \frac{\Phi \left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{\tau}} \right)}{2\Phi \left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right)}$$

Значение δ изменяется монотонно от 1 при $x = 0$ до 0 при $x = \infty$. Фронта нет, поэтому, как и раньше, введем эффективную ширину области перемешивания. Обозначим соответственно $x_{0,9} = x(\delta = 0,9)$, $x_{0,1} = x(\delta = 0,1)$. Значения $x_{0,9}$ и $x_{0,1}$ находятся как решение уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi \left(\frac{x_{0,9} + x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x_{0,9} - x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) &= 1,8\Phi \left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \\ \Phi \left(\frac{x_{0,1} + x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x_{0,1} - x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) &= 0,2\Phi \left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \end{aligned}$$

Эффективная ширина L есть некоторая функция от τ :

$$(3.2) \quad L = x_{0,1} - x_{0,9} = L(\tau).$$

Получим уравнение для усредненной по области перемешивания турбулентной скорости \bar{v} . Как и в п. 1, исходное уравнение (1.2) заменим приближенным. Положим $\alpha_2 = 0$ и $g = g_0$. Окончательно получим

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} \frac{d\bar{v}^2}{d\tau} + \frac{\bar{v}v^2}{\alpha^2 L^2} = g_0 \frac{\rho_{0,9} - \rho_{0,1}}{M} - \frac{v^2 (\rho_{0,9} - \rho_{0,1})^2}{3\rho_{0,5} M L}$$

где $M \approx (\rho_2 + \rho(0, \tau))/2L = \rho_{0,5}L$;

$$\rho_{0,5} - \rho_{0,1} = 0,8(\rho_1 - \rho_2)\Phi(x_0/2\sqrt{\tau})$$

$$\rho_{0,5} = \rho_2 + [(\rho_1 - \rho_2)/2]\Phi(x_0/2\sqrt{\tau}).$$

В отличие от п. 1 интеграл $\int_L^{\infty} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} dx$ в исследуемом случае отличен от нуля,

Однако по всей области $0 < x < \infty$ он равен нулю, а по области перемешивания L он мал, и поэтому им пренебрегается.

Таким образом, решение задачи свелось к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (3.3) совместно с функциональной зависимостью для L (3.2), определяемой из решения системы (3.1). Уравнение (3.3) линейно относительно v^2 , поэтому решение можно получить в виде интеграла. Переход к исходной переменной t осуществляется с помощью уравнения (1.6):

$$t = \alpha \int_0^{\tau} (1/vL) d\tau.$$

Найдем решение для тонкого слоя. Оно получается в аналитическом виде. Рассмотрим времена, когда $\tau \gg x_0$. Используя приближенное представление для интеграла вероятности и разложение в ряд, решение уравнения (3.1) найдем в явном виде |

$$x_{0,9} = 0,92\sqrt{\tau}, \quad x_{0,1} = 4,29\sqrt{\tau}.$$

Из (3.2) следует выражение для ширины L :

$$L = 3,37\sqrt{\tau}.$$

Уравнение (3.3) преобразуется в следующее:

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\tau} + \frac{vv^2}{\alpha^2 (3,37)^2 \tau} = \frac{0,8g_0}{3,37\sqrt{2\pi}} \frac{(\rho_1 - \rho_2) x_0}{\rho_2 \tau}.$$

Здесь пренебрежено членом $1/\tau^2$.

Из (3.4) следует, что для тонкого слоя при больших временах турбулентная скорость v стремится к постоянному значению v_0 :

$$(3.5) \quad v_0 = \alpha \sqrt{1,35 x_0 g_0 (\rho_1 - \rho_2) / \pi \rho_2},$$

а ширина выходит на линейный закон

$$L = 5,68 \alpha v_0 t.$$

Если легкий слой плотности ρ_2 окружен тяжелым с плотностью ρ_1 , то в формуле (3.5) нужно в знаменателе ρ_2 заменить на ρ_1 .

Рассмотрим предельный случай, когда плотность легкого слоя $\rho_2 = 0$. Если легкое окружено тяжелым, то турбулентное перемешивание происходит с максимальной скоростью, а ширина в пределе выходит на линейный закон с максимальным наклоном:

$$(3.6) \quad L = 3,72 \alpha^2 (\sqrt{x_0 g / v}) t.$$

Если тяжелое окружено легким (в пределе вакуумом), то формула (3.5) неприменима. Уравнение для турбулентной скорости будет другим, так как в этом случае масса перемешанного вещества в отличие от общего слоя ограничена, а уравнение для турбулентной скорости имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\tau} + \frac{vv^2}{\alpha^2 (3,37)^2 \tau} = \frac{1,6g_0}{3,37\sqrt{\tau}}.$$

Для ширины получим квадратичный закон:

$$(3.7) \quad L = \frac{12,9 \alpha^2 g}{2,84 + v/\alpha^2} t^2.$$

Заметим, что в коэффициент не вошли характеристики начального слоя.

В рамках рассмотренной выше модели турбулентного перемешивания асимптотические законы (3.6), (3.7) определяются постоянными α и v , выбранными из сравнения с экспериментом при постоянном и выключенном ускорении. Так ли это на самом деле, на этот вопрос может дать ответ только эксперимент.

Приложение. Вычислим как функции переменной τ . Для этого перейдем в (2.3) к τ :

$$g = g_1 \tau^{m_1},$$

где g_1 и m_1 пока неизвестны. Из (1.2) следует

$$v^2 = \frac{0,8(n-2)}{\eta_0(n+1)} \frac{2g_1}{(4k+1+2m_1)} \tau^{(2m_1+1)/2}.$$

Подстановка v в уравнение (1.6) приводит к определению связи между t и τ :

$$t = \sqrt{\frac{(n+1)(4k+1+2m_1)}{1,6(n-1)g_1\eta_0}} \frac{\tau^{(1-2m_1)/4}}{(1-2m_1)\alpha^2}.$$

Воспользуемся тождеством

$$g_0 t^m = g_1 t^{m_1}$$

и найдем $m_1 = m/2(m+2)$,

$$g_1 = g_0^{\frac{2}{2+m}} \left[\frac{2(m+2)}{\alpha(m+4)} \right]^{\frac{2m}{2+m}} \left[\frac{(n+1)(2km+4k+m+1)}{0,8(n-1)\eta_0(m+2)} \right]^{\frac{m}{m+2}}.$$

Переходя в (2.1) к τ , получим

$$s = \frac{(4k+1)(m+2) + m}{(4k+1)(m+1)} \frac{\eta_0}{A} \frac{n+1}{n-1} \sqrt{\tau}.$$

Поступила 13 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Неуважаев В. Е. К теории турбулентного перемешивания.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 5.
2. Анучина Н. И., Кучеренко Ю. А. и др. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей.— МЖГ, 1978, № 6.
3. Бельский С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— Труды ФИАН им. Лебедева, 1965, т. 29, с. 207.
4. Андронов В. А., Бахрах С. М. и др. Турбулентное перемешивание на контактной поверхности, ускоряемой ударными волнами.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, вып. 2(8).
5. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. К теории турбулентного перемешивания границы раздела в поле тяжести.— ПМТФ, 1976, № 4.
6. Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6.

УДК 533.6.011.55.011.6

К ТЕОРИИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА ПРОИЗВОЛЬНОГО УДЛИНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА

М. М. Кузнецов

(Москва)

Рассмотрим пространственное обтекание равномерным гиперзвуковым потоком наветренной стороны тонкого крыла, форма поверхности которого зависит от времени, под углом атаки $\alpha = \text{const}$. Будем считать, что течение в ударном слое сопровождается физико-химическими превращениями и имеет релаксационный характер. Примем, что толщина ударного слоя пропорциональна малому параметру ϵ , равному характерному значению отношения плотностей на фронте головной ударной волны, и воспользуемся для решения задачи методом тонкого ударного слоя [1].

1. Проанализируем сначала случай обтекания крыла малого удлинения, имеющего следующие характерные размеры: $b = O(\sqrt{\epsilon})$, $c = O(\epsilon)$, $L = 1$. Тогда, используя известные асимптотические представления параметров потока в виде рядов по ϵ и полную систему уравнений движения газа с физико-химическими превращениями [2], получим

$$(1.1) \quad \begin{cases} dw/dt = 0, & dv/dt = -(1/\rho_0)\partial p/\partial y; \\ \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} * & d\rho_0/dt + \rho_0(\partial v/\partial y + \partial w/\partial z) = 0; \\ \end{cases}$$

$$(1.3) \quad dq_m/dt = Q_m(p_0, T_0, q_m), \quad m = 1, \dots, N;$$

$$(1.4) \quad [dh_0/dt = 0, \rho_0 = p_0\mu(q_m)/RT_0, d/dt = \partial/\partial t + \partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z,$$

где ρ_0 , T_0 , h_0 , q_m — основные значения плотности, температуры, статической энтальпии и релаксационных параметров, пронормированные на соответствующие значения за скачком уплотнения; p_0 — основное («ньютоновское») значение давления, остальные обозначения те же, что и в [2, 3].

Граничные условия для системы уравнений (1.1)—(1.4) имеют вид на фронте ударной волны при $y = \Phi(x, z, t)$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} w &= -\Phi_z, \quad v = \Phi_t + \Phi_x - \Phi_z^2 - 1, \quad p = 2\Phi_x + 2\Phi_t - \Phi_z^2 - 1, \quad \rho_0 = \\ &= T_0 = h_0 = q_m = 1; \end{aligned}$$