

ТЕРМОУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ  
В СЛОЕ

И. В. Харламов  
(Новосибирск)

При рассмотрении задач термоупругости обычно пренебрегают изменением температуры, вызванным деформацией среды, что существенно упрощает математическую часть исследования [1]. Однако объяснение процессов затухания на основе уравнений термоупругости невозможно без учета указанного эффекта. В этой статье основные уравнения термоупругости решаются с целью описания процесса затухания в простейшей задаче о продольной волне в упругом слое.

Обозначения

$u$  — перемещение,  
 $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  
 $\rho$  — плотность,  
 $t$  — время,  
 $T$  — температура,  
 $T_0$  — начальная температура,  
 $l$  — характерная длина,  
 $\tau$  — характерное время,  
 $H$  — толщина слоя,  
 $h$  — безразмерная толщина,  
 $\kappa$  — коэффициент теплопроводности  
 $a, b, \varepsilon$  — безразмерные параметры,

$\alpha$  — температурный коэффициент объемного расширения,  
 $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме,  
 $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  
 $V$  — скорость распространения продольной волны,  
 $S$  — параметр, характеризующий начальную деформацию,  
 $Q$  — количество тепла в слое, отнесенное к единице площади основания слоя

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad l = \frac{\kappa}{c_v V}, \quad \tau = \frac{\kappa}{c_v V^2}, \quad h = \frac{H}{l}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

$$a = \alpha T_0 \frac{\lambda + 2/3\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad b = \frac{c_p - c_v}{\alpha T_0 c_v}, \quad \varepsilon = ab = \frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{\lambda + 2/3\mu}{\lambda + 2\mu}$$

1. Уравнения движения термоупругой среды [2]

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \alpha \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{grad} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{c_p - c_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} T$$

в случае плоской продольной волны

$$\mathbf{u} = u(x, t) \mathbf{e}, \quad T = T(x, t) \quad (\mathbf{e} - \text{единичный вектор оси } x)$$

сводятся к двум уравнениям

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{c_p - c_v}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Отнесем линейные величины к характерной длине  $l$ , а за единицу времени примем  $\tau$ , в уравнениях (1.1) перейдем к безразмерным переменным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (1.2)$$

Рассмотрим упругий слой, заключенный между теплоизолированными плоскостями  $x = 0$  и  $x = h$ . Для определенности полагаем, что колебания слоя возникли в результате мгновенного снятия в момент  $t = 0$

нагрузки, равномерно распределенной по плоскости  $x = h$ , плоскость  $x = 0$  полагаем закрепленной. К моменту  $t = 0$  слой покоился. Таким образом, задача сведена к интегрированию уравнений (1.2) при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(h, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = Sx, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta(h, t)}{\partial x} = 0$$

## 2. Изображения искомых функций $u, \theta$

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dp \quad \Theta(x, p) = \int_0^{\infty} \theta(x, t) e^{-pt} dp \quad (2.1)$$

вследствие (1.2), (1.3) находятся из уравнений

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - a \frac{d\Theta}{dx} = p^2 U - p Sx, \quad \frac{d^2 \Theta}{dx^2} = p \Theta + b \left( p \frac{dU}{dx} - S \right)$$

при условиях

$$U(0, p) = 0, \quad \frac{dU(h, p)}{dx} = 0, \quad \frac{d\Theta(0, p)}{dx} = 0, \quad \frac{d\Theta(h, p)}{dx} = 0$$

в виде

$$U(x, p) = \frac{S}{p} \left[ x + \frac{(n^2 - p^2) \operatorname{sh} nh \operatorname{sh} kx - (k^2 - p^2) \operatorname{sh} kh \operatorname{sh} nx}{n(k^2 - p^2) \operatorname{sh} kh \operatorname{ch} nh - k(n^2 - p^2) \operatorname{sh} nh \operatorname{ch} kh} \right] \quad (2.2)$$

$$\Theta(x, p) = \frac{S}{a} \frac{(k^2 - p^2)(n^2 - p^2)}{pkn} \frac{n \operatorname{sh} nh \operatorname{ch} kx - k \operatorname{sh} kh \operatorname{ch} nx}{n(k^2 - p^2) \operatorname{sh} kh \operatorname{ch} nh - k(n^2 - p^2) \operatorname{sh} nh \operatorname{ch} kx} \quad (2.3)$$

Здесь

$$k = \sqrt{\frac{p}{2} \sqrt{p+1+\varepsilon} + \sqrt{(p-1+\varepsilon)^2 + 4\varepsilon}}$$

$$n = \sqrt{\frac{p}{2} \sqrt{p+1+\varepsilon} - \sqrt{(p-1+\varepsilon)^2 + 4\varepsilon}} \quad (2.4)$$

Перемещения свободной плоскости  $x = h$  слоя представляются на основании (2.1), (2.2) формулой

$$u(h, t) = S [h - J(h, t)] \quad (2.5)$$

$$J(h, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) \frac{e^{pt}}{p^2} dp \quad (2.6)$$

Здесь контурный интеграл  $J(h, t)$  берется в плоскости комплексной переменной  $p$  по прямой, параллельной мнимой оси и расположенной правее всех особых точек функции

$$\frac{F(p)}{p^2} = \frac{1}{p} \frac{(k^2 - n^2) \operatorname{sh} nh \operatorname{sh} kh}{n(k^2 - p^2) \operatorname{sh} kh \operatorname{ch} nh - k(n^2 - p^2) \operatorname{sh} nh \operatorname{ch} kh} \quad (2.7)$$

Так как из (2.1), (2.3)

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Theta(x, p) e^{pt} dp$$

то количество тепла в слое, отнесенное к единице площади основания слоя

$$Q = c_0 l T_0 \int_0^h \theta(x, t) dx$$

выражается при помощи того же интеграла (2.6)

$$Q = \varepsilon \frac{S}{a} c_0 l T_0 J(h, t) \quad (2.8)$$

Здесь учтено, что (см. (2.4))

$$\frac{(k^2 - p^2)(n^2 - p^2)}{k^2 n^2} = -\varepsilon$$

3. Входящие в (2.7) произведения гиперболических функций выразим через гиперболические функции аргументов  $(k+n)h$  и  $(k-n)h$  и, принимая во внимание вытекающие из (2.4) равенства

$$k+n = \sqrt{p} \sqrt{(\sqrt{p}+1)^2 + \epsilon}, \quad k-n = \sqrt{p} \sqrt{(\sqrt{p}-1)^2 + \epsilon}$$

записываем  $F(p)$  в виде

$$F(p) = \frac{\operatorname{ch}(h\sqrt{p}\sqrt{(\sqrt{p}+1)^2+\epsilon}) - \operatorname{ch}(h\sqrt{p}\sqrt{(\sqrt{p}-1)^2+\epsilon})}{(\sqrt{p}+1) \frac{\operatorname{sh} h(\sqrt{p}\sqrt{(\sqrt{p}+1)^2+\epsilon})}{\sqrt{(\sqrt{p}+1)^2+\epsilon}} - (\sqrt{p}-1) \frac{\operatorname{sh}(h\sqrt{p}\sqrt{(\sqrt{p}-1)^2+\epsilon})}{\sqrt{(\sqrt{p}-1)^2+\epsilon}}} \quad (3.1)$$

Точка  $p=0$  есть точка ветвления функции  $F(p)$ . Фиксируем ветвь этой функции, проводя в плоскости  $p$  разрез по отрицательной действительной полуоси и полагая  $\arg \sqrt{p} = 0$  при  $p$  действительном положительном. На верхнем берегу разреза  $\sqrt{p} = i\sqrt{s}$  ( $0 < s < \infty$ ), на нижнем  $\sqrt{p} = -i\sqrt{s}$  ( $0 < s < \infty$ ), причем

$$F(-i\sqrt{s}) = F(i\sqrt{s}) = \frac{\operatorname{Im} \operatorname{ch}(ih\sqrt{s}\sqrt{(1+i\sqrt{s})^2+\epsilon})}{\operatorname{Im} \left\{ (1+i\sqrt{s}) \frac{\operatorname{sh}(ih\sqrt{s}\sqrt{(1+i\sqrt{s})^2+\epsilon})}{\sqrt{(1+i\sqrt{s})^2+\epsilon}} \right\}} \quad (3.2)$$

В окрестности  $p=0$  имеем  $F(p) \approx hp$  и, следовательно, точка  $p=0$  будет простым полюсом подынтегральной функции интеграла (2.6). Радикалы  $\sqrt{(\sqrt{p}+1)^2+\epsilon}$  и  $\sqrt{(\sqrt{p}-1)^2+\epsilon}$  входят в выражение (3.1) формально, так как в разложениях по степеням  $z$  функций  $\operatorname{ch} z$  и  $z^{-1}\operatorname{sh} z$  содержатся лишь четные степени  $z$ .

Как видно из (3.1), при  $p$  действительном и положительном знаменатель  $F(p)$  в нуль не обращается. Лежащие на отрицательной действительной полуоси нули знаменателя найдем, приравняв к нулю его мнимую часть, что приводит к уравнению

$$\operatorname{tg}(hM\sqrt{s}) = \frac{M\sqrt{s}-N}{N\sqrt{s}+M} \operatorname{th}(hN\sqrt{s}) \quad (3.3)$$

Здесь

$$M = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1+\epsilon-s)^2 + 4s} + 1 + \epsilon - s \right]}$$

$$N = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1+\epsilon-s)^2 + 4s} - 1 - \epsilon + s \right]}$$

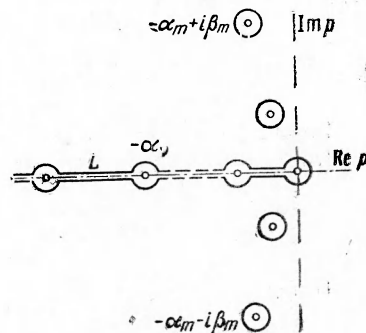
Правая часть (3.3) при  $0 < s < \infty$  положительна и ограничена, обращается в нуль при  $s=0$  и стремится к нулю при возрастании  $s$ . Аргумент  $h\sqrt{s}M(s)$ , стоящей слева в (3.3) тригонометрической функции, монотонно растет вместе с  $s$ , поэтому уравнение (3.3) имеет простой корень в каждом интервале

$$v\pi < h\sqrt{s}M(s) < \left(v + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

Обозначим эти корни

$$p_v = -\alpha_v \quad (\alpha_v > 0 \text{ при } v > 0) \quad (3.4)$$

У твердых тел разность  $c_p - c_v$  мала по сравнению с  $c_v$  и поэтому величина  $\epsilon$  мала по сравнению с единицей. Воспользовавшись этим,



Фиг. 1

будем искать нули знаменателя (3.4) в виде ряда

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (3.5)$$

Коэффициенты ряда определяются из уравнений

$$\operatorname{sh} [h \sqrt{p_0} (\sqrt{p_0} + 1)] - \operatorname{sh} [h \sqrt{p_0} (\sqrt{p_0} - 1)] = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{p_0}}{p_0 - 1} \operatorname{sh} h p_0 \operatorname{ch} h \sqrt{p_0} + h [p_0 + 2p_1(p_0 - 1)] \operatorname{sh} h p_0 \operatorname{sh} h \sqrt{p_0} + \\ & + h \left( p_1 \frac{p_0 - 1}{\sqrt{p_0}} - \sqrt{p_0} \right) \operatorname{ch} h p_0 \operatorname{ch} h \sqrt{p_0} = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.6) находим две последовательности значений

$$p_{0\nu} = -\frac{\nu^2 \pi^2}{h^2} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

$$p_{0m} = \pm i \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{h} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Подставив (3.8) в (3.7), получаем уравнение, определяющее  $p_{1\nu}$

$$\frac{2\sqrt{p_{0\nu}}}{p_{0\nu} - 1} \operatorname{sh} h p_{0\nu} + h \left( p_{1\nu} \frac{p_{0\nu} - 1}{\sqrt{p_{0\nu}}} - \sqrt{p_{0\nu}} \right) \operatorname{ch} h p_{0\nu} = 0$$

Откуда

$$p_{1\nu} = \frac{\nu^2 \pi^2}{h^2 + \nu^2 \pi^2} - \frac{2h\nu^2 \pi^2}{(h^2 + \nu^2 \pi^2)^2} \operatorname{th} \frac{\nu^2 \pi^2}{h} \quad (3.10)$$

Из (3.4), (3.5), (3.8) получаем действительные корни знаменателя (3.4) в виде ряда

$$p_\nu = -\alpha_\nu = -\frac{\nu^2 \pi^2}{h^2} + \varepsilon \frac{\nu^2 \pi^2}{h^2 + \nu^2 \pi^2} \left( 1 + \frac{2h}{h^2 + \nu^2 \pi^2} \operatorname{th} \frac{\nu^2 \pi^2}{h} \right) + \dots \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

Вносимая членом  $\varepsilon p_{1\nu}$  поправка к  $p_{0\nu}$  не превосходит  $\varepsilon$ .

Подстановка (3.9) в (3.7) приводит к уравнению

$$\frac{2\sqrt{p_{0m}}}{p_{0m} - 1} \operatorname{ch} h \sqrt{p_{0m}} + h [p_{0m} + 2p_{1m}(p_{0m} - 1)] \operatorname{sh} h \sqrt{p_{0m}} = 0$$

Отсюда

$$p_{1m} = -\frac{p_{0m}}{2(p_{0m} - 1)} - \frac{\sqrt{p_{0m}}}{h(p_{0m} - 1)^2} \operatorname{cth} \sqrt{p_{0m}}$$

Полагая

$$p_{1m} = -\xi_m \pm i\eta_m \quad (3.12)$$

найдем

$$\xi_m = \frac{z^2}{2(4g^4 + z^2)} + 2gz \frac{(4g^4 - z^2)(\operatorname{sh} g + \sin g) - 4g^2 z (\operatorname{sh} g - \sin g)}{(4g^4 + z^2)^2 (\operatorname{ch} g - \cos g)} \quad (3.13)$$

$$\eta_m = \frac{g^2 z}{4g^4 + z^2} - 2gz \frac{(4g^4 - z^2)(\operatorname{sh} g - \sin g) + 4g^2 z (\operatorname{sh} g + \sin g)}{(4g^4 + z^2)^2 (\operatorname{ch} g - \cos g)} \quad (3.14)$$

где

$$z = \pi^2 (2m + 1)^2 \geq \pi^2, \quad g = \sqrt{(2m + 1)\pi h} > 0 \quad (3.15)$$

(следовало бы писать  $z_m$  и  $g_m$ : индекс опущен для упрощения записи).

Полюса функции  $F(p)$ , соответствующие значениям (3.9), (3.12), располагаются в точках

$$p_m = -\alpha_m \pm i\beta_m \quad (3.16)$$

где по (3.5)

$$\alpha_m = \varepsilon \xi_m + O(\varepsilon^2), \quad \beta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h} + \varepsilon \eta_m + O(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

Покажем, что определяемая формулой (3.13) величина  $\xi_m$  положительна для всех  $m = 0, 1, 2, \dots$  и  $h > 0$ . Достаточно установить положительность величины

$$z(4g^4 + z^2)(\operatorname{ch} g - \cos g) + 4g(4g^4 - z^2)(\operatorname{sh} g + \sin g) - 16g^3z(\operatorname{sh} g - \sin g) \quad (3.18)$$

отличающейся от  $\xi_m$  отсутствием положительного множителя

$$\frac{z}{2(4g^4 + z^2)(\operatorname{ch} g - \cos g)}$$

Внося в (3.18) разложения гиперболических и тригонометрических функций по степеням  $g$ , получаем

$$2g^2 \left\{ \frac{z^2}{2} (z - 8) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g^{4j}}{(4j+2)!} [z^3 - 4(4j+2)z^2 + \right. \quad (3.19)$$

$$\left. + 4(4j+2)(4j+1)4j(4j-5)z + 16(4j+2)(4j+1)4j(4j-1)(4j-2)] \right\}$$

Полином

$$z^3 - Az^2 + Bz + C$$

где

$$A = 4(4j+2), \quad B = 4(4j+2)(4j+1)4j(4j-5)$$

$$C = 16(4j+2)(4j+1)4j(4j-1)(4j-2) > 0$$

имеет действительный отрицательный корень. Значения этого полинома при  $z > 0$  будут заведомо положительными, если остальные два корня окажутся комплексными, что имеет место при условии

$$\frac{P^2}{4} + \frac{R^3}{27} > 0 \quad (3.20)$$

Здесь

$$P = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB + C, \quad R = B - \frac{A^2}{3} = \frac{16}{3}(4j+2)[48j^2(j-1) - 19j - 2]$$

При  $j > 1$  условие (3.20) выполнено уже потому, что  $R > 0$ . При  $j = 1$  полином  $(z - 24)(z - 4\sqrt{30})(z + 4\sqrt{30})$  положителен для всех  $m \geq 0$  (что соответствует по (3.15) значениям  $z = \pi^2, 9\pi^2, 25\pi^2, \dots$ ). Таким образом, каждый член ряда (3.19) положителен, что означает отрицательность действительных частей корней (3.16) при достаточно малых  $\varepsilon$ . Все полюса подынтегральной функции интеграла (2.6) определяются формулами (3.11), (3.16) (с учетом (3.17), (3.13), (3.14)); все они, за исключением  $p = 0$ , лежат левее мнимой оси плоскости  $p$ .

Деформируем контур интегрирования интеграла (2.6) в линию  $L$ , идущую по берегам разреза в плоскости  $p$ , как указано на фигуре, тогда из (2.6)

$$J(h, t) = \sum_{p=-\alpha_\nu} \operatorname{res} F(p) \frac{e^{pt}}{p^2} + \sum_{p=-\alpha_m \pm i\beta_m} \operatorname{res} F(p) \frac{e^{pt}}{p^2} \quad (3.21)$$

Здесь принято во внимание, что сумма значений интегралов по прямолинейным участкам контура  $L$  равна нулю, так как по (3.12) значения подынтегральной функции на обоих берегах разреза одинаковы.

Как уже отмечалось ранее,  $F(p) \approx hp$  в окрестности  $p = 0$  и, следовательно, вычет интеграла в начале координат равен  $h$ . Остальные вычеты в (3.21) содержат множитель  $\exp(-\alpha_m t)$  или  $\exp(-\alpha_\nu t)$  и с воз-

растанием  $t$  стремятся к нулю, поэтому по (2.6), (2.8), (2.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(h, t) = h, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \varepsilon \frac{S}{a} c_p l T_0 h = SH \frac{c_p - c_v}{\alpha}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(h, t) = 0$$

Последнее соотношение и означает затухание колебаний, вызванное термоупругой диссипацией.

В заключение выразим коэффициент затухания  $\delta = \alpha_m / \tau$  в зависимости от частоты колебаний  $\omega = \beta_m / \tau$ .

Введем обозначение

$$q = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h}$$

По (3.15) имеем  $z = 4q^2 h^2$ ,  $g = \sqrt{2q} h$ , из (3.17), (3.13), (3.14)

$$\alpha_m = \frac{\varepsilon}{2(1+q^2)} \left\{ q^2 + \frac{\sqrt{2q}}{h} \frac{(1-q^2)(\operatorname{sh} \sqrt{2q} h + \sin \sqrt{2q} h) - 2q(\operatorname{sh} \sqrt{2q} h - \sin \sqrt{2q} h)}{(1+q^2)(\operatorname{ch} \sqrt{2q} h - \cos \sqrt{2q} h)} \right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$\beta_m = q + \frac{\varepsilon}{2(1+q^2)} \left\{ q - \frac{\sqrt{2q}(1-q^2)(\operatorname{sh} \sqrt{2q} h - \sin \sqrt{2q} h) + 2q(\operatorname{sh} \sqrt{2q} h + \sin \sqrt{2q} h)}{(1+q^2)(\operatorname{ch} \sqrt{2q} h - \cos \sqrt{2q} h)} \right\} + O(\varepsilon^2)$$

Исключая из этих равенств  $q$ , получаем

$$\alpha_m = \frac{\varepsilon}{2(1+\beta_m^2)} \left\{ \beta_m^2 + \frac{\sqrt{2\beta_m}}{h} \frac{(1-\beta_m^2)(\operatorname{sh} \sqrt{2\beta_m} h + \sin \sqrt{2\beta_m} h) - 2\beta_m(\operatorname{sh} \sqrt{2\beta_m} h - \sin \sqrt{2\beta_m} h)}{(1+\beta_m^2)(\operatorname{ch} \sqrt{2\beta_m} h - \cos \sqrt{2\beta_m} h)} \right\} + O(\varepsilon^2)$$

и, следовательно,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\tau(1+\omega^2\tau^2)} \left\{ \omega^2\tau^2 + \frac{\sqrt{2\omega\tau}}{h} \frac{(1-\omega^2\tau^2)(\operatorname{sh} \sqrt{2\omega\tau} h + \sin \sqrt{2\omega\tau} h) - 2\omega\tau(\operatorname{sh} \sqrt{2\omega\tau} h - \sin \sqrt{2\omega\tau} h)}{(1+\omega^2\tau^2)(\operatorname{ch} \sqrt{2\omega\tau} h - \cos \sqrt{2\omega\tau} h)} \right\}$$

или, после подстановки значений  $\varepsilon$ ,  $\tau$ ,  $h$

$$\delta = \frac{(c_p - c_v)(\lambda + 2/3\mu)\kappa\rho}{2[c_v^2(\lambda + 2\mu)^2 + \omega^2\kappa^2\rho^2]} \left\{ \omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{H} \Omega \right. \\ \times \left. \frac{[c_v^2(\lambda + 2\mu)^2 - \omega^2\kappa^2\rho^2](\operatorname{sh} \Omega + \sin \Omega) - 2\omega\kappa\rho c_v(\lambda + 2\mu)(\operatorname{sh} \Omega - \sin \Omega)}{[c_v^2(\lambda + 2\mu)^2 + \omega^2\kappa^2\rho^2](\operatorname{ch} \Omega - \cos \Omega)} \right\} \\ \left( \Omega = \sqrt{2\omega \frac{c_v}{\kappa} H} \right)$$

Институт гидродинамики  
СО АН СССР

Поступила 26 XII 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Parkus H. Instationäre Wärmespannungen. Springer. Verlag. Wien, 1959.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.