

образовавшимися на внутренней (линия 4) и внешней (линия 5) поверхности вследствие реализации критерия (4). Тогда образуются две области разрушения — сдвигом S и отрывом C , причем направление и условия их распространения приводят к различиям в структуре излома трещин одного типа. Радиусы разрушения внутренней поверхности a_f и конечный радиус разрушения, определяемый по значению наружного радиуса разрушения b_f , находятся графическим путем.

Анализ ограничен частным случаем расширения пластических оболочек. Такое ограничение имеет преимущество в том, что упрощения, связанные с условиями симметрии, позволяют применить для рассмотрения некоторых сложных вопросов простой математический аппарат, что весьма затруднительно при других условиях.

Поступила 24 VI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов-Аляев Г. А. Механические основы пластической обработки металлов. М.: Машиностроение, 1968.
2. Taylor G. I. Scientific Papers. Vol. 8. Cambridge, Cambr. Univ. Press, 1963.
3. Hoggatt G. R., Recht R. F. Fracture behavior of tubular bombs.— J. Appl. Phys., 1968, vol. 39, N 3.
4. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А. Расширение идеально пластической цилиндрической оболочки под действием продуктов детонации.— ПМТФ, 1974, № 2.
5. Одинцов В. А., Селиванов В. В. Поведение жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.— ПМТФ, 1975, № 3.
6. Иवानов А. Г., Новиков С. А., Сеницын В. А. Исследование упругопластических волн в железе и стали при взрывном нарушении.— ФТТ, 1963, т. 5, № 1.
7. Златин П. А., Пугачев Г. С. и др. Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона.— ФТТ, 1975, т. 17, № 9.
8. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А. Движение упругопластической оболочки с фазовым переходом под действием продуктов детонации.— МТТ, 1974, № 3.
9. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А. Расширение толстостенной цилиндрической оболочки под действием взрывной нагрузки.— МТТ, 1975, № 5.
10. Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. Киев.: Наукова думка, 1979.
11. Грязнов Е. Ф., Одинцов В. А., Селиванов В. В. Гладкие кольцевые отколы.— МТТ, 1976, № 6.

УДК 539.374

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ

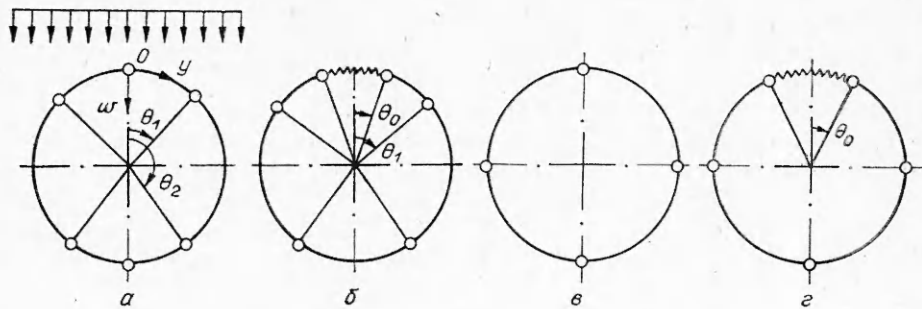
Р. Г. Якунов

(Уфа)

1. Тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка бесконечной длины находится в грунте. На заданном от оболочки расстоянии взрывается плоский заряд взрывчатого вещества, который в направлении оси оболочки обладает бесконечной протяженностью, и в среде возникает плоская ударная пластическая волна. Фронт волны параллелен образующей оболочки, параметры волны известны. Требуется определить остаточные деформации оболочки в зависимости от давления взрывной волны.

Поместим начало системы координат y, w в точке O со стороны падающей волны (фиг. 1, а). Уравнения движения элемента оболочки, испытывающего перемещение порядка толщины стенки, записываем в виде [1]

$$(1.1) \quad T' = N'_y = 0, \quad M'' + ((1/R) + w'')N_y + q + q_1 - \rho H \ddot{w} = 0,$$



Ф и г. 1

где T , N_y — касательные и нормальные усилия в срединной поверхности; M_y — изгибающий момент в окружном направлении; R , H — радиус и толщина стенки оболочки; ρ — плотность материала; w — радиальное перемещение; q , q_1 — давление волны и окружающей среды; штрих обозначает дифференцирование по y , точка — по t .

Отражение плоской ударной пластической волны от плоской преграды при нормальном падении и падении под углом исследовано в [2, 3]. При определении давления взрывной волны на оболочку используем результаты последних работ и «принцип изолированного элемента», согласно которому падающая плоская волна отражается от криволинейной границы в окрестности каждой точки так, как она отражается от малого элемента плоскости, проходящей через данную точку. Выражение давления волны записываем в виде

$$(1.2) \quad q = p_0(1 - t/t_0) \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad t > 0, \quad q = 0, \\ \pi/2 \leq \theta \leq -\pi/2,$$

где $p_0 = p_{1*}(1 + \sqrt{n})$; p_{1*} — давление на фронте падающей волны в момент отражения; t_0 — продолжительность действия давления; n — показатель степени сжатия среды; $\theta = y/R$ — угловая координата.

Со стороны, противоположной падающей волне, вследствие деформаций и смещения как жесткого цилиндра оболочка испытывает давление, которое определяем по формуле [4]

$$(1.3) \quad q_1 = p_c + \rho_0 c_1 \dot{w}, \quad \pi/2 \leq \theta \leq -\pi/2, \quad q_1 = 0, \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,$$

где p_c , ρ_0 — предел текучести и плотность среды; $c_1^2 = E_1/\rho_0$; E_1 — пластический модуль.

Полное перемещение оболочки равно сумме перемещений абсолютно жесткого цилиндра u и перемещения, возникающего в результате деформаций w_0 . Плоское движение жесткого цилиндра под действием волны давления описывается уравнением

$$\pi m_0 \ddot{u} + \int_0^{\pi/2} (\kappa_0 \dot{w} - q) \cos \theta d\theta + p_c = 0.$$

Здесь принимаем, что давление p_c равномерно распределено на длине полуокружности, $\dot{w} = \dot{u} \cos \theta$, $m_0 = \rho H$, $\kappa_0 = \rho_0 c_1$.

2. Материал оболочки — идеальный жестко-пластический. Ниже будем пользоваться кусочно-линейной аппроксимацией условия пластичности тонкостенных оболочек [5], показанной на фиг. 2 штриховой линией, описанной квадратом

$$|N_y/N_0| \leq 1, \quad |M_y/M_0| \leq 1,$$

где $N_0 = \sigma_y H$; $M_0 = \sigma_y H^2/4$; $\sigma_y = 2\sigma_s/\sqrt{3}$; σ_s — предел текучести при одноосной деформации.

Рассмотрим механизм движения, который назовем механизмом I, когда со стороны падающей волны в точках $\theta=0, \pm\theta_1$ возникают три пластических шарнира (см. фиг. 1, а). Участки оболочки между пластическими шарнирами находятся в пластическом состоянии AD. Срединная поверхность при этом испытывает сжатие. Закон течения, соответствующий этому предельному состоянию, записывается в виде

$$\dot{\epsilon}_y : \dot{\kappa}_y = -1 : 0 \quad (N_y = -N_0; -M_0 \leq M_y \leq M_0),$$

где $\dot{\epsilon}_y$ и $\dot{\kappa}_y$ — обобщенные скорости деформаций, соответствующие обобщенным напряжениям N_y и M_y . В угловых точках A и D возможны также механизмы течения $\dot{\epsilon}_y : \dot{\kappa}_y = -1 : 0$ и $\dot{\epsilon}_y : \dot{\kappa}_y = (1 - \lambda) : \lambda$.

Таким образом, в пределах каждого участка поле скоростей перемещений, удовлетворяющее условию пластичности и закону течения, является решением уравнения $\dot{\kappa}_y = \dot{w}'' = 0$ и определяется формулой

$$(2.1) \quad \dot{w}_0 = C_1(t)y + C_2(t).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из условий $\dot{w}_0 = \dot{w}_1$ ($y = 0$), $\dot{w}_0 = 0$ ($y = y_1$):

$$C_1 = \mp \dot{w}_1/y_1 \quad (0 \leq y \leq y_1; -y_1 \leq y \leq 0), \quad C_2 = \dot{w}_1.$$

Полное поле скоростей описывается выражением $\dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{u} \cos \theta$.

Используя принятое поле напряжений и закон течения, уравнение движения (1.1) приводим к виду

$$(2.2) \quad M'' - N_0/R + q + q_1 - m_0 \ddot{w}_0 = 0.$$

Решение уравнения (2.2) должно удовлетворять граничным условиям

$$(2.3) \quad M(0, t) = M_0, \quad M'(0, t) = 0;$$

$$(2.4) \quad M(\pm\theta_1, t) = -M_0, \quad M'(\pm\theta_1, t) = 0.$$

Обозначим через M_1 изгибающий момент в области $-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1$. Подставляя в (2.2) выражения (1.2), (2.1), принимая $q_1 = 0$ и удовлетворяя решению условиям (2.3), находим

$$(2.5) \quad \frac{M_1}{R^2} = \frac{q_3}{2} + \frac{A_1}{2} \theta_1^2 + \frac{m_0 \dot{C}_1 R}{6} \theta_1^3 - p_0 \varphi (1 - \cos \theta),$$

где $q_2 = N_0/R$; $q_3 = 2M_0/R^2$; $A_1 = q_2 + m_0 \dot{C}_2$; $\varphi = 1 - t/t_c$.

Удовлетворяя решение (2.5) граничным условиям (2.4), получим систему уравнений для перемещений

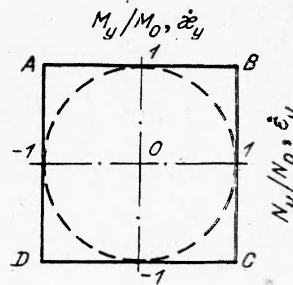
$$(2.6) \quad \frac{m_0 \theta_1^2}{3} \ddot{w}_1 = p_0 \varphi (1 - \cos \theta_1) - q_3 - \frac{q_2}{2} \theta_1^2, \quad \frac{m_0 \theta_1}{2} \ddot{w}_1 = \\ = p_0 \varphi \sin \theta_1 - q_2 \theta_1.$$

Принимая в (2.6) $\ddot{w}_1 = t = 0$, находим формулы для предельного статического давления, соответствующего механизму I. Предельным статическим будет наименьшее давление, определяемое по формулам

$$(2.7) \quad p_s = (q_2 \theta_s^2 + 2q_3)/[2(1 - \cos \theta_s)], \quad p_s = q_2 \theta_s / \sin \theta_s.$$

Здесь θ_s — угловая координата пластического шарнира, определяемая из решения уравнения

$$\theta_s [2(1 - \cos \theta_s) - \theta_s \sin \theta_s] - (H/R) \sin \theta_s = 0.$$



Фиг. 2

После исключения из системы (2.6) ускорения находим выражение зависимости координаты θ_1 от давления волны в момент отражения:

$$(2.8) \quad p_0 = (6q_3 - q_2\theta_1^2) / \{2[3(1 - \cos \theta_1) - 2\theta_1 \sin \theta_1]\}.$$

Решение (2.5) не противоречит исходным предположениям о поле напряжений при условиях $M_1''(0, t) \leq 0$, $M_1''(\pm\theta_1, t) \geq 0$, откуда следует, что в начальный момент должны выполняться неравенства

$$(2.9) \quad p_0 \leq p_{01}, \quad p_0 \leq p_{02},$$

где $p_{01} = q_2\theta_1 / (2 \sin \theta_1 - \theta_1)$; $p_{02} = q_2 / \cos \theta_1$.

Принимаем, что в нижней половине оболочки в точках с координатами $\pm\theta_2$ и π также образуются шарниры (фиг. 1, а), причем поле скоростей имеет вид

$$(2.10) \quad \dot{w} = C_3 y + C_4 + \dot{u} \cos \theta,$$

где постоянные интегрирования равны

$$C_3 = \pm [\dot{w}_2 / (\pi - \theta_2) R] (\theta_2 \leq \theta \leq \pi; -\pi \leq \theta \leq -\theta_2),$$

$$C_4 = -\dot{w}_2 \theta_2 / (\pi - \theta_2)$$

и определены из условий $\dot{w}_0 = 0$ ($\theta = \pm\theta_2$), $\dot{w}_0 = \dot{w}_2$ ($\theta = \pm\pi$). Движение, описываемое выражениями (2.10), назовем механизмом Ia. Подставляя в уравнение движения (2.2) выражения (1.3), (2.10), принимая в нем $q = 0$, производим интегрирование. Изгибающий момент в области $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$ обозначим M_2 . Удовлетворяя решение (2.2) условиям $M_2(\pm\pi, t) = M_0$, $M_2'(\pm\pi, t) = 0$, находим M_2 . Затем при помощи условий $M_2(\pm\theta_2, t) = -M_0$, $M_2'(\pm\theta_2, t) = 0$ получаем систему

$$(2.11) \quad [(\pi - \theta_2)^2 / 3] (m_0 \ddot{w}_2 - \kappa_0 \dot{w}_2) = -q_3 - [(\pi - \theta_2)^2 / 2] \times \\ \times (q_2 - p_c) - \kappa_0 \dot{u} (1 + \cos \theta_2),$$

$$[(\pi - \theta_2) / 2] (m_0 \ddot{w}_2 - \kappa_0 \dot{w}_2) = -(\pi - \theta_2)(q_2 - p_c) - \kappa_0 \dot{u} \sin \theta_2.$$

Исключая из системы (2.11) скорости и ускорения, находим выражение для координаты пластических шарниров θ_2 . В начальный момент времени угол θ_2 находим по формуле

$$\theta_2 = \pi - \sqrt{6q_3 / (q_2 - p_c)} \approx \pi - \sqrt{3H/R}.$$

Условия $M_2''(\pm\pi, t) \leq 0$, $M_2''(\pm\theta_2, t) \geq 0$ дают неравенства, которые в начальный момент времени принимают вид $q_2 - p_c \geq 0$ и всегда выполняются.

3. Рассмотрим движение оболочки, когда область I ($-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$) находится в полностью пластическом состоянии A, область II ($\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $-\theta_1 \leq \theta \leq -\theta_0$) — в пластическом состоянии AD и поля скоростей имеют вид соответственно

$$(3.1) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{u} \cos \theta, \quad \dot{w} = C_5 y + C_6 + \dot{u} \cos \theta,$$

где $C_5 = \pm \dot{w}_0(\theta_0) / [(\theta_0 - \theta_1) R]$; $C_6 = -\dot{w}_0(\theta_0) \theta_1 / (\theta_0 - \theta_1)$; $\theta_0 = \theta_0(t)$ — неизвестная угловая координата границы областей с различными пластическими режимами. Движение, описываемое выражениями (3.1), назовем механизмом II.

Уравнение движения области I имеет вид

$$(3.2) \quad m_0 \ddot{w}_0 = p_0 \varphi \cos \theta - q_2.$$

Заметим, что уравнение (3.2) следует из безмоментной теории цилиндрической оболочки.

Уравнение движения области II интегрируем, подставляя в (2.2) второе выражение (3.1) и принимая $q_1 = 0$. Удовлетворяя решение условиям $M_{11}(\pm \theta_0, t) = M_0$, $M_{11}(\pm \theta_1, t) = -M_0$, $M'_{11}(\pm \theta_0, t) = 0$, $M'_{11}(\pm \theta_1, t) = 0$, приходим к системе

$$(3.3) \quad \frac{m_0 f_1}{3} [f_1 \ddot{w}_0(\theta_0) + \dot{\theta}_0 \dot{w}_0(\theta_0)] = p_0 \Phi f_2 - \frac{q_2}{2} f_1^2 - q_3,$$

$$\frac{m_0}{2} [f_1 \ddot{w}_0(\theta_0) + \dot{\theta}_0 \dot{w}_0(\theta_0)] = p_0 \Phi f_3 - q_2 f_1,$$

где $f_1 = \theta_1 - \theta_0$; $f_2 = \cos \theta_0 - \cos \theta_1 - f_1 \sin \theta_0$; $f_3 = \sin \theta_1 - \sin \theta_0$.

Предельное статическое давление и угловые координаты пластических шарниров, соответствующие механизму II, определяем по формулам

$$p_s = (q_2 f_1^2 + 2q_3) / 2f_2, \quad \bar{\nu}_s = q_2 f_1 / f_3, \quad \nu_s = q_2 / \cos \theta_0.$$

Аналогично (2.8) находим формулу для определения координаты θ_0 в зависимости от давления волны

$$(3.4) \quad p_0 = (q_2 f_1^2 - 6q_3) / (4f_1 f_3 - 6f_2).$$

Из условий $M''_{11}(\pm \theta_0, t) \leq 0$, $M''_{11}(\pm \theta_1, t) \geq 0$ находим неравенства, которые дают ограничения на величину давления в момент отражения

$$(3.5) \quad p_0 \leq p_{03}, \quad p_0 \leq p_{04},$$

где $p_{03} = (q_2 f_1^2 + 6q_3) / [2(3f_2 - f_1^2 \cos \theta_0)]$; $p_{04} = q_2 / \cos \theta_1$.

Движение оболочки разбиваем на три стадии. Первая стадия — стадия разгона, $0 \leq t \leq t_1$. В конце первой стадии скорость перемещения оболочки достигает наибольшей величины. Время t_1 определяем из уравнения $\dot{w}_0(\theta, t_1) = 0$. Величина θ_0 не зависит от времени, но зависит от p_0 . Зависимость эта представлена формулой (3.4).

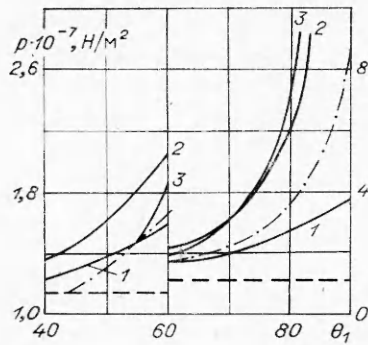
Вторая стадия, $t_1 \leq t \leq t_2$. Во второй стадии кинетическая энергия и скорость перемещения пластической зоны уменьшаются. Прогиб и угол $\theta_0(t)$ находим из решения системы (3.2), (3.3) при начальных условиях $\theta_0(t_1) = \theta_0$, $\dot{w}_0(\theta_0, t) = \dot{w}_0(\theta_0, t_1)$, $w_0(\theta_0, t) = w_0(\theta_0, t_1)$. Величина координаты θ_0 уменьшается до нуля. Время t_2 определяем из уравнения $\theta_0(t_2) = 0$.

Третья стадия, $t_2 \leq t \leq t_3$. Анализ этой стадии движения аналогичен анализу движения оболочки в п. 2. Время t_3 определяем из условия обращения в нуль скорости прогибов.

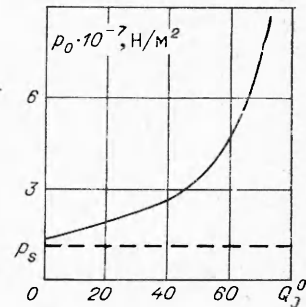
Движение оболочки не ограничивается механизмами, рассмотренными выше. Возможны и другие кинематические состояния, которые исследуются так же. Рассмотрены еще механизмы движения III и IV. Согласно механизму III, в четырех диаметрально противоположных точках возникают пластические шарниры (см. фиг. 1, в). Оболочка деформируется подобно форме наимизшего порядка при упругом изгибе, и происходит движение четырех жестких на изгиб четвертей, которые находятся в пластическом состоянии AD. В случае механизма IV область $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ со стороны падающей волны находится в пластическом состоянии A, область $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq -\theta_0$ находится в пластическом состоянии AD.

4. Оболочка имеет размеры $H = 0,015$ м, $R = 0,5$ м, $\sigma_s = 3 \cdot 10^8$ Н/м² и находится в неводонасыщенном песчаном грунте нарушенной структуры плотностью скелета $\rho_0 = 1,7 \cdot 10^3$ кг/м³, влажностью $w^0 = 4-8\%$, диаграмма сжатия имеет вид $p = 3,35 \cdot 10^5 \varepsilon^{2,5}$ [6], где ε — относительная деформация грунта. Предельное уплотнение грунта принимаем $\varepsilon_+ = 0,2$. Заряд ВВ имеет толщину $2a = 0,002$ м, показатель изэнтропы продуктов детонации $\gamma = 1,25$, начальное давление в каверне равно $2 \cdot 10^9$ Н/м². Параметры волны определяем так же, как и в работе [7].

Из сравнения минимальных давлений p_s всех четырех механизмов движения следует, что наименьшим предельным статическим является дав-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

ление $p_s = 115 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, соответствующее механизму I. Поэтому в случае действия статического давления, согласно кинематической теореме, реализуется механизм I.

При динамическом нагружении деформации оболочки возникают, начиная с давления $p_0 > p_s$, когда давление на фронте падающей волны $p_{1*} > 45 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, чему соответствует расстояние взрыва 8 м и менее.

На фиг. 3 приведены графики давлений p_{0i} ($i = 1-4$) в зависимости от угла θ_1 . Масштаб графиков до $\theta_1 = 60^\circ$ показан слева, для $\theta_1 > 60^\circ$ — справа. Кривые 1—3 представляют графики зависимостей $p_{01}(\theta_1)$, $p_{02}(\theta_1)$, $p_{03}(\theta_1)$, $p_{04}(\theta_1) = p_{02}$. Штрихпунктирная кривая показывает изменение давления p_0 в зависимости от θ_1 по формуле (2.8). Горизонтальная штриховая линия соответствует давлению p_s . Координаты шарниров $\theta_s = 44^\circ$, $\theta_2 = \pm 163^\circ$.

Как видно из фиг. 3, в диапазоне давления $p_s \leq p_0 \leq 147 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ удовлетворяются неравенства (2.9) и реализуется механизм I. При $147 < p_0 \leq 860 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ удовлетворяются неравенства (3.5) и деформация оболочки подчиняется механизму II. Со стороны, противоположной падающей волне, реализуется механизм Ia. График зависимости $p_0(\theta_0)$ приведен на фиг. 4. В случае $p_0 \geq 860 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ угол $\theta_1 = \pi/2$ и оболочка деформируется согласно механизму IV. Механизм III не реализуется, так как неравенства, аналогичные (2.9), (3.5), не выполняются.

Из решения первого уравнения (2.6) найден остаточный прогиб, который при давлении $p_0 = 132 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ и $c_1 = 100 \text{ м/с}$ равен 1,64 см. Координата области деформирования $\theta_1 = 50^\circ$, расстояние взрыва 7,5 м.

Поступила 26 VI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. Зволинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение пластической волны от преграды. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
3. Ковшов А. Н., Скобеев А. М. Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
4. Любин Л. Я., Повицкий А. С. Косой удар твердого тела о грунт. — ПМТФ, 1966, № 1.
5. Розенблюм В. И. Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. — ПММ, 1960, № 2.
6. Захаров С. Д., Ляхов Г. М., Мизякин С. Д. Определение динамической сжимаемости грунта по параметрам плоских взрывных волн. — ПМТФ, 1972, № 1.
7. Якунов Р. Г. Действие взрывной волны на пластину. — Проблемы прочности, 1980, № 3.