УДК 533.6.011.72:537.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ С ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

А. М. Блохин, Ю. Л. Трахинин, И. З. Меражов*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск
*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Обсуждается вопрос об устойчивости ударных волн для гидродинамической модели движения сплошной среды с объемным электрическим зарядом. Доказана корректность смешанной задачи, полученной линеаризацией гидродинамической модели и уравнений сильного разрыва для электрогидродинамических ударных волн, что, как известно, означает устойчивость этого типа сильных разрывов в данной модели сплошной среды.

Введение. Существует устойчивый интерес к изучению движения сплошной среды с объемным электрическим зарядом в связи с разнообразными практическими приложениями [1]. Проблема построения и обоснования основных уравнений электрогидродинамики (ЭГД) далека от удовлетворительного решения, в отличие, например, от проблем магнитной гидродинамики.

В настоящей работе с позиций теории уравнений с частными производными обсуждается система уравнений ЭГД, принятая за основу в [1]. По сравнению с описанной в [2] она обладает рядом преимуществ с точки зрения теории дифференциальных уравнений, что очень важно, например, при обосновании численных методов решения конкретных задач ЭГД.

В настоящей работе доказана корректность смешанной задачи, полученной линеаризацией уравнений ЭГД и нелинейных соотношений для электрогидродинамических ударных волн, что означает устойчивость этого типа сильных разрывов в данной модели сплошной среды.

1. Основные уравнения ЭГД. Уравнения ЭГД в одножидкостном приближении имеют вид [1, 2]

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0; \tag{1.1}$$

$$(\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}\tilde{\Pi} = 0; \tag{1.2}$$

$$(\rho e)_t + \operatorname{div}\mathbf{W} = (\mathbf{J}, \mathbf{E}); \tag{1.3}$$

$$q_t + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0; \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi q; \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь ρ — плотность сплошной среды; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^*$ — скорость сплошной среды (звездочка означает транспонирование); $\tilde{\Pi}$ — тензор плотности потока импульса с компонентами $\tilde{\Pi}_{ik} = \rho u_i u_k + p\delta_{ik} - P_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$; p — давление; $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^*$ — напряженность электрического поля; $e = e_0 + (1/2)|\mathbf{u}|^2$; e_0 — внутренняя энергия; $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)^* =$

$\rho\mathbf{u}(e + pV)$; $V = 1/\rho$ — удельный объем; $\mathbf{J}$ — плотность тока; q — заряд. Компоненты P_{ik} максвелловского тензора напряжений P имеют вид $P_{ik} = (1/4\pi)(E_i E_k - |\mathbf{E}|^2\delta_{ik}/2)$. Термодинамические переменные связаны соотношением Гиббса

$$T\,ds = de_0 + p\,dV \qquad (1.7)$$

(s — энтропия, T — температура). В силу (1.7) справедливы равенства

$$p = -(e_0)_V = \rho^2(e_0)_\rho, \qquad T = (e_0)_s. \qquad (1.8)$$

Плотность тока $\mathbf{J}$ связана со скоростью $\mathbf{u}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ законом Ома

$$\mathbf{J} = q(\mathbf{u} + b\mathbf{E}) \qquad (1.9)$$

(постоянная $b > 0$ — подвижность [1, 2]). Таким образом, с учетом уравнения состояния $e_0 = e_0(\rho, s)$, равенств (1.8) и закона Ома (1.9) можно рассматривать (1.1)–(1.6) как систему для нахождения компонент векторов $\mathbf{U} = (p, s, \mathbf{u}^*)^*$, $\mathbf{E}$ и заряда q. При этом уравнения Максвелла (1.5), (1.6) можно свести к одному уравнению Пуассона для скалярного электрического потенциала φ ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\Delta\varphi = -4\pi q. \qquad (1.10)$$

В силу (1.5), (1.6) векторное уравнение (1.2) можно переписать так:

$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}\Pi = q\mathbf{E} \qquad (1.2')$$

(Π — тензор плотности потока импульса с компонентами $\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p\delta_{ik}$). Тогда (1.1), (1.2′), (1.3) является системой уравнений газовой динамики с правыми частями, которую можно переписать в недивергентном виде

$$\frac{1}{\rho c^2}\frac{dp}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{u} = b\frac{(e_0)_{\rho s} q}{c^2 T}|\mathbf{E}|^2, \qquad \frac{ds}{dt} = b\frac{q}{\rho T}|\mathbf{E}|^2, \qquad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = q\mathbf{E} \qquad (1.11)$$

($d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$; $c = \sqrt{(\rho^2(e_0)_\rho)_\rho}$ — скорость звука в газе [3]). Систему (1.11) можно записать в симметрическом виде. При предположении, что термодинамические величины удовлетворяют неравенствам $\rho > 0$, $(\rho^2(e_0)_\rho)_\rho > 0$, система будет симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу) [4, 5]. Далее исследуется случай политропного газа [3, 4].

2. Уравнения сильного разрыва. Рассмотрим кусочно-гладкие решения системы (1.1)–(1.6), гладкие куски которых отделены друг от друга поверхностью сильного разрыва [3, 6], описываемой уравнением

$$\hat{f}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}') - x_1 = 0 \quad (\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = (x_2, x_3)). \qquad (2.1)$$

Следуя [1, 3, 6], выпишем для системы ЭГД (1.1)–(1.6) условия на поверхности сильного разрыва:

$$f_t[\rho] - [\rho u_1] + f_{x_2}[\rho u_2] + f_{x_3}[\rho u_3] = 0, \quad f_t[\rho u_i] - [\tilde{\Pi}_{1i}] + f_{x_2}[\tilde{\Pi}_{2i}] + f_{x_3}[\tilde{\Pi}_{3i}] = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$f_t[\rho e] - [W_1] + f_{x_2}[W_2] + f_{x_3}[W_3] = 0, \quad [J_N] = \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \qquad (2.2)$$
$$[E_N] = -4\pi\sigma, \quad [E_k] + f_{x_k}[E_1] = 0 \quad (k = 2,\ 3).$$

Здесь использованы обозначения [4]. При получении этих соотношений предполагалось, что на поверхности (2.1) может существовать поверхностный заряд $\sigma = \sigma(t, x')$. В соответствии с рекомендациями [1, 6] мы пренебрегли величиной поверхностного тока.

Замечание 2.1. Для ударных волн, т. е. при $j \neq 0$, $[\rho] \neq 0$ ($j = \rho(u_N - D_N)$, $u_N = (\mathbf{u}, \mathbf{N})$, $D_N = -f_t/|\nabla f|$) система соотношений на сильном разрыве является замкнутой при заданной величине σ. По параметрам течения перед разрывом и величине σ можно определить параметры течения за фронтом разрыва.

3. Постановка основной задачи об устойчивости электрогидродинамических ударных волн. Линеаризуем уравнения ЭГД (1.1)–(1.6) и соотношения на сильном разрыве относительно основного кусочно-постоянного решения:
при $x_1 < 0$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{U}}_\infty = (\hat{p}_\infty, \hat{s}_\infty, \hat{u}_{1\infty}, 0, 0)^*, \quad \mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{E}}_\infty = (\hat{E}_{1\infty}, 0, 0)^*, \quad q(t,\mathbf{x}) = 0;$$

при $x_1 > 0$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{U}} = (\hat{p}, \hat{s}, \hat{u}_1, 0, 0)^*, \quad \mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, 0, 0)^*, \quad q(t,\mathbf{x}) = 0.$$

Это решение удовлетворяет условиям (2.2), если фронт разрыва неподвижен, и описывается уравнением $x_1 = 0$, т. е. при $x_1 = 0$ выполнены соотношения

$$[\hat{j}\,] = 0, \quad \left[\hat{\rho}\hat{u}_1^2 + \hat{p} - \frac{\hat{E}_1^2}{8\pi}\right] = 0, \quad \left[\hat{\rho}\hat{u}_1\left(\hat{e_0} + \frac{1}{2}\hat{u}_1^2 + \hat{p}\hat{V}\right)\right] = 0, \quad [\hat{E}_1] = 4\pi\hat{\sigma}. \tag{3.1}$$

Здесь $\hat{p}_\infty = \hat{\rho}_\infty^2(e_0)_\rho(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$; $\hat{T}_\infty = (e_0)_s(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$; $\hat{p} = \hat{\rho}^2(e_0)_\rho(\hat{\rho}, \hat{s})$; $\hat{T} = (e_0)_s(\hat{\rho}, \hat{s})$; $\hat{e_0} = e_0(\hat{\rho}, \hat{s})$; $\hat{j} = \hat{\rho}\hat{u}_1$; $\hat{\rho}$, $\hat{\rho}_\infty$, $\hat{s}$, $\hat{s}_\infty$, $\hat{u}_1$, $\hat{u}_{1\infty}$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_{1\infty}$ — некоторые постоянные; $\hat{\sigma} = \mathrm{const}$ — величина поверхностного заряда. Кроме того, предполагается, что стационарный разрыв (3.1) — ударная волна, т. е. $\hat{u}_1 \neq 0$, $\hat{u}_{1\infty} \neq 0$, $[\hat{\rho}] \neq 0$. После линеаризации получаем основную смешанную задачу об устойчивости электрогидродинамических ударных волн.

Основная задача. *В области $t > 0$, $\mathbf{x} \in R_+^3$ ищется решение системы*

$$\begin{gathered} Lp + \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}q, \quad Ls = \frac{\gamma-1}{\gamma}q, \quad \mathrm{M}^2 L\mathbf{u} + \nabla p = \hat{\mathbf{a}}q, \\ Lq + \hat{\omega}_1\xi_1 q = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi q, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

в области $t > 0$, $\mathbf{x} \in R_-^3$ — решение системы

$$\begin{gathered} L_\infty p + \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}q, \quad L_\infty s = \frac{\gamma-1}{\gamma}q, \quad \mathrm{M}_\infty^2 L_\infty\mathbf{u} + \nabla p = \hat{\mathbf{a}}_\infty q, \\ L_\infty q + \hat{\omega}_{1\infty}\xi_1 q = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi q, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Решения обеих систем должны удовлетворять при $x_1 = 0$ граничным условиям

$$\begin{gathered} u_1 + dp + d_0E_{1\infty} + d_1p_\infty + d_2u_{1\infty} + d_3s_\infty + d_4\Omega = 0, \quad u_k = \hat{\lambda}F_{x_k} + \hat{d}_0E_{k\infty} + \bar{v}u_{k\infty} \quad (k = 2,\ 3), \\ F_t = \mu p + \mu_0E_{1\infty} + \mu_1p_\infty + \mu_2u_{1\infty} + \mu_3s_\infty + \mu_4\Omega, \\ s = \nu p + \nu_0E_{1\infty} + \nu_1p_\infty + \nu_2u_{1\infty} + \nu_3s_\infty + \nu_4\Omega, \\ q = \theta_1q_\infty + \theta_2\Omega_t, \quad E_1 - \hat{d}E_{1\infty} = 4\pi\Omega, \quad E_k - \hat{d}E_{k\infty} = -\hat{\chi}F_{x_k} \quad (k = 2,\ 3), \end{gathered} \tag{3.4}$$

а при $t = 0$ — начальным данным

$$\begin{gathered} \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad q|_{t=0} = q_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R_\pm^3, \\ F\Big|_{t=0} = F_0(\mathbf{x}'), \quad \Omega\Big|_{t=0} = \Omega_0(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in R^2. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь

$$R_\pm^3 = \{\mathbf{x}\,|\,x^1 \gtrless 0, \mathbf{x}' \in R^2\}; \quad L = \tau + \xi_1; \quad L_\infty = æ\tau + \xi_1; \quad \tau = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^*;$$

$$\xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3); \quad æ = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_{1\infty}}; \quad \mathrm{M}^2 = \frac{\hat{u}_1^2}{\hat{c}^2}; \quad \hat{c}^2 = \gamma \hat{p} \hat{V}; \quad \hat{V} = \frac{1}{\hat{\rho}}; \quad \mathrm{M}_\infty^2 = \frac{\hat{u}_{1\infty}^2}{\hat{c}_\infty^2};$$

$$\hat{c}_\infty^2 = \gamma \hat{p}_\infty \hat{V}_\infty; \quad \hat{V}_\infty = \frac{1}{\hat{\rho}_\infty}; \quad \hat{\mathbf{a}} = \Big(\frac{1}{\gamma \hat{\omega}_1}, 0, 0\Big)^*; \quad \hat{\mathbf{a}}_\infty = \Big(\frac{1}{\gamma \hat{\omega}_{1\infty}}, 0, 0\Big)^*;$$

$$\hat{\omega}_1 = \frac{b \hat{E}_1}{\hat{u}_1}; \quad \hat{\omega}_{1\infty} = \frac{b_\infty \hat{E}_{1\infty}}{\hat{u}_{1\infty}};$$

постоянная $b_\infty > 0$ — подвижность при $x_1 < 0$ (предполагается, что подвижность различна по обе стороны разрыва). Системы (3.2), (3.3) записаны в безразмерном виде. Граничные условия (3.4) получены линеаризацией соотношений (2.2) и записаны в безразмерном виде, причем коэффициенты в граничных условиях могут быть легко выписаны. При этом в процессе решения основной задачи (3.2)–(3.5) находятся также функции $F = F(t, \mathbf{x}')$ — малое смещение фронта разрыва и $\Omega = \Omega(t, \mathbf{x}')$ — малое возмущение поверхностного заряда. Два соотношения из граничных условий (3.4) надо считать уравнениями для определения F и Ω. Системы (3.2) и (3.3) без двух последних уравнений можно переписать так:

$$A^{(0)} \mathbf{V}_t + \sum_{k=1}^{3} A^{(k)} \mathbf{V}_{x_k} + A^{(4)} \mathbf{V} = 0; \tag{3.6}$$

$$A_\infty^{(0)} \mathbf{V}_t + \sum_{k=1}^{3} A_\infty^{(k)} \mathbf{V}_{x_k} + A_\infty^{(4)} \mathbf{V} = 0 \tag{3.7}$$

($\mathbf{V} = (\mathbf{U}, q)^*$, матрицы $A^{(k)}$, $A_\infty^{(k)}$ ($k = \overline{0,4}$) легко могут быть выписаны).

Замечание 3.1. В силу (1.10) два последних соотношения в системах (3.2), (3.3) (уравнения Максвелла) сводятся к одному уравнению Пуассона для малого возмущения потенциала φ:

$$\Delta \varphi = -4\pi q, \quad \mathbf{x} \in R_\pm^3, \quad t > 0 \tag{3.8}$$

(φ — безразмерная величина). Граничные условия для (3.8) имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \hat{d}\, \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x_1} = -4\pi \Omega, \quad \varphi - \hat{d} \varphi_\infty = \hat{\chi} F. \tag{3.9}$$

Таким образом, для определения потенциала φ получаем задачу дифракции (3.8), (3.9) [7].

4. Исследование условий (3.1) на стационарном разрыве. Пусть стационарный разрыв, удовлетворяющий условиям (3.1), — ударная волна ($\hat{u}_1, \hat{u}_{1\infty} \neq 0$, $[\hat{\rho}] \neq 0$). Запишем второе и третье соотношения (3.1) в виде

$$\bar{p} = -\gamma \mathrm{M}^2 \bar{v} + \tilde{\Delta}, \qquad 1 - \bar{p}\bar{v} + \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}^2 (1 - \bar{v}^2) = 0 \tag{4.1}$$

($\tilde{\Delta} = 1 + \gamma \mathrm{M}^2 (1 - \hat{e})$, $\bar{p} = \hat{p}_\infty / \hat{p}$, $\bar{v} = 1/æ$). Далее полагаем, что $\hat{e}$ — малый параметр ($|\hat{e}| \ll 1$) и выполнены условия

$$\hat{s} > \hat{s}_\infty, \quad \hat{p} > \hat{p}_\infty > 0, \quad \hat{\rho} > \hat{\rho}_\infty > 0, \quad \hat{u}_{1\infty} > \hat{u}_1 > 0, \tag{4.2}$$

которые при $\hat{e} = 0$ являются условиями эволюционности ударных волн в обычной газовой динамике [3, 6, 8] (эволюционность электрогидродинамических ударных волн в общем случае, т. е. при ненулевых $\hat{e}$, исследуется в [1]). Так как рассматривается политропный газ, неравенства (4.2) с учетом первого соотношения из (3.1) можно переписать:

$$\bar{p} \bar{v}^\gamma < 1, \quad 0 < \bar{p} < 1, \quad \bar{v} > 1. \tag{4.3}$$

Из (4.1) получаем квадратное уравнение для определения $\bar{v}$ и из двух его корней выбираем корень

$$\bar{v} = \frac{\gamma}{\gamma+1}\left\{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(l + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}\right\} \quad \left(\Delta = l + 1 - \hat{e}, \quad l = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\right),$$

который при $\hat{e} = 0$ меньше единицы (другой корень при $\hat{e} = 0$ равен единице). Находим выражение для $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{\gamma \mathrm{M}^2}{\gamma+1}\left\{\Delta - \gamma\sqrt{\Delta^2 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(l + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}\right\}.$$

При $|\hat{e}| \ll 1$ условия эволюционности (4.3) электрогидродинамических ударных волн накладывают на параметры основного течения ограничения

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} < \mathrm{M}^2 < 1, \quad \mathrm{M}_\infty^2 = \frac{\mathrm{M}^2 \bar{v}}{\bar{p}} > 1. \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. Для коэффициентов граничных условий (3.4) при малом параметре $\hat{e}$ справедливы представления $d = d^{(0)} + O(\hat{e})$, $\dot{d}_0 = O(\hat{e})$, $d_0 = O(\hat{e})$, $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}^{(0)} + O(\hat{e})$, $\mu = \mu^{(0)} + O(\hat{e})$, $\mu_0 = O(\hat{e})$, $\nu = \nu^{(0)} + O(\hat{e})$, $\nu_1 = O(\hat{e})$, $\hat{\chi} = O(\hat{e})$, где $d^{(0)}$, $\dot{\lambda}^{(0)}$, $\mu^{(0)}$, $\nu^{(0)}$ — некоторые постоянные числа. Предполагается, что условие малости $\hat{e}$ ($|\hat{e}| \ll 1$) выполнено в силу малости скачка нормальной составляющей напряженности электрического поля на разрыве, т. е.

$$\left|\frac{\hat{\sigma}}{\hat{u}_1\sqrt{\hat{\rho}/2\pi}}\right| = \left|\frac{\hat{E}_1}{\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}}} - \frac{\hat{E}_{1\infty}}{\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}}}\right| \ll \left|\frac{\hat{E}_1}{\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}}} + \frac{\hat{E}_{1\infty}}{\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}}}\right|^{-1},$$

$\operatorname{sgn}\hat{E}_1 = \operatorname{sgn}\hat{E}_{1\infty}$, а величины $\hat{E}_1/(\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}})$, $\hat{E}_{1\infty}/(\hat{u}_1\sqrt{8\pi\hat{\rho}})$ не являются малыми.

Замечание 4.2. С учетом специфики стационарного разрыва (3.1) можно получить несколько вариантов основной задачи. При постановке смешанных задач для систем (3.6) и (3.7) необходимо знание собственных чисел матриц $A^{(1)}$ и $A_\infty^{(1)}$. Собственные числа матрицы $A^{(1)}$ имеют вид

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \mathrm{M}^2, \quad \lambda_4 = 1 + \hat{\omega}_1, \quad \lambda_{5,6} = \frac{1 + \mathrm{M}^2 \pm \sqrt{(1+\mathrm{M}^2)^2 + 4(1-\mathrm{M}^2)}}{2}. \tag{4.5}$$

Матрица $A_\infty^{(1)}$ имеет собственные числа аналогичного вида. В силу (4.4) $\lambda_{1,2,3,5}(A^{(1)}) > 0$, $\lambda_{1,2,3,5,6}(A_\infty^{(1)}) > 0$.

Замечание 4.3. Пусть выполнены условия

$$1 + \hat{\omega}_{1\infty} > 0, \quad 1 + \hat{\omega}_1 > 0, \tag{4.6}$$

или

$$1 + \hat{\omega}_{1\infty} < 0, \quad 1 + \hat{\omega}_1 < 0, \tag{4.7}$$

или

$$1 + \hat{\omega}_{1\infty} > 0, \quad 1 + \hat{\omega}_1 < 0. \tag{4.8}$$

При выполнении (4.6) все собственные числа матрицы $A_\infty^{(1)}$ положительны, т. е. для системы (3.7) не надо ставить граничных условий при $x_1 = 0$. В тоже время в силу (4.5) система (3.6) требует пять граничных условий. Таким образом, для того чтобы основная задача при выполнении неравенств (4.6) была правильно поставлена по числу граничных условий, необходимо зафиксировать выполнение тождества

$$\Omega \equiv 0. \tag{4.9}$$

В противном случае основная задача будет недоопределенной по числу граничных условий. Аналогично в случае выполнения условий (4.7) основная задача правильно поставлена по числу граничных условий, если выполнено тождество (4.9), а в случае (4.8) — если $\Omega \neq 0$. Заметим, что при выполнении условий $1 + \hat{\omega}_{1\infty} < 0$, $1 + \hat{\omega}_1 > 0$ основная задача недоопределена даже при $\Omega \equiv 0$.

Замечание 4.4. Физический смысл условий (4.6) заключается в том, что при их выполнении в силу закона Ома (1.9) электрический ток течет через разрыв слева направо вниз по потоку (в случае выполнения условий (4.7) электрический ток течет через разрыв справа налево вверх по потоку). При выполнении условий (4.8) электрический ток направляется к разрыву с обеих сторон, создавая на ударной волне поверхностный заряд.

5. Исследование корректности основной задачи. Опишем процесс получения априорной оценки без потери гладкости для решения основной задачи в случае выполнения условий (4.6). С этой целью сконструируем для систем (3.6) и (3.7) расширенные системы [4]. Процесс получения таких систем состоит из двух этапов. На первом этапе конструируем из (3.6), (3.7) расширенные системы (для нахождения компонент вектора $\mathbf{V}$ и его производных) и выписываем для них тождества интегралов энергии в дифференциальной форме [4]. Интегрируя полученные тождества соответственно по областям R^3_+, R^3_- и складывая полученные выражения, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} I_0(t) - \iint\limits_{R^2} [(A_p^{(1)} \mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)]\Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}' + \iiint\limits_{R^3_+} ((A_p^{(4)} + A_p^{(4)*})\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x} + {}$$

$$+ \iiint\limits_{R^3_-} ((A_{p\infty}^{(4)} + A_{p\infty}^{(4)*})\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x} = 0, \tag{5.1}$$

где

$$I_0(t) = \iiint\limits_{R^3_+} (A_p^{(0)} \mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x} + \iiint\limits_{R^3_-} (A_{p\infty}^{(0)} \mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x};$$

$\mathbf{V}_p = (\mathbf{V}^*; \tau\mathbf{V}^*; \xi_1\mathbf{V}^*; \xi_2\mathbf{V}^*; \xi_3\mathbf{V}^*; \tau^2\mathbf{V}^*; \tau\xi_1\mathbf{V}^*; \tau\xi_2\mathbf{V}^*; \tau\xi_3\mathbf{V}^*; \xi_1^2\mathbf{V}^*; \xi_1\xi_2\mathbf{V}^*; \xi_1\xi_3\mathbf{V}^*; \xi_2^2\mathbf{V}^*; \xi_2\xi_3\mathbf{V}^*; \xi_3^2\mathbf{V}^*)^*$; $A_p^{(\alpha)} = \mathrm{diag}(I_5 \times A^{(\alpha)}, \varepsilon(I_{10} \times A^{(\alpha)}))$, $A_{p\infty}^{(\alpha)} = \eta(I_{15} \times A_\infty^{(\alpha)})$ $(\alpha = \overline{0, 4})$ — блочно-диагональные матрицы; $I_5 \times A^{(\alpha)}$ — кронекерово произведение матриц I_5 и $A^{(\alpha)}$; I_5 — единичная матрица порядка 5 и т. д.; $\varepsilon, \eta > 0$ — некоторые постоянные. При выводе (5.1) предполагалось, что $|\mathbf{V}_p| \to 0$ при $|x_k| \to \infty$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

Оценивая второе и третье слагаемые в равенстве (5.1) с помощью граничных условий (3.4) при $\Omega = 0$ и системы (3.2) при $x_1 = 0$, а также в силу положительной определенности матрицы $A_{p\infty}^{(1)}$ (см. замечания 4.2, 4.3), получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} I_0(t) + \eta\lambda_{\min} \iint\limits_{R^2} (\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty})\, d\mathbf{x}' - N_1 H_1(t) - N_{\hat{e}} H_2(t) \leqslant N_2 I_0(t), \tag{5.2}$$

где $N_1, N_2 > 0$, $N_{\hat{e}} = O(\hat{e})$ — постоянные;

$$H_1(t) = \iint\limits_{R^2} \{p^2 + u_2^2 + u_3^2 + p_t^2 + p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{x_3}^2 + \ldots\}\Big|_{x_1=0} + \varepsilon(P + R) + (\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty})\, d\mathbf{x}';$$

$$(\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty}) = (\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\Big|_{x_1=0}; \quad P = \Big(p_{tt}^2 + p_{tx_1}^2 + p_{tx_2}^2 + p_{tx_3}^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} p_{x_i x_j}^2\Big)\Big|_{x_1=0};$$

$$R = \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=j}^{3}(u_i)_{x_j x_k}^2\Big|_{x_1=0}; \qquad H_2(t) = \iint\limits_{R_2} \mathcal{E}\Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}';$$

$$\mathcal{E}\Big|_{x_1=0} = |\mathbf{E}_\infty|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{E}_\infty}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{E}_\infty}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{E}_\infty}{\partial x_3}\right|^2 +$$

$$+\varepsilon\left\{\left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial t^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial t \partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial t \partial x_3}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial x_2^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial x_2 \partial x_3}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\infty}{\partial x_3^2}\right|^2\right\}.$$

Оценим $H_2(t)$ через интеграл $H_1(t)$. С этой целью применим к задаче (3.8), (3.9) с учетом (4.9) преобразование Фурье. В результате получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2} - \omega^2\hat{\varphi} = -4\pi\hat{q}, \quad x^1 \gtrless 0; \tag{5.3}$$

$$\left(\frac{d\hat{\varphi}}{dx_1} - \hat{d}\,\frac{d\hat{\varphi}_\infty}{dx_1}\right)\Big|_{x_1=0} = 0, \quad (\hat{\varphi} - \hat{d}\hat{\varphi}_\infty)\Big|_{x_1=0} = \hat{\chi}\hat{F}. \tag{5.4}$$

Здесь $\hat{\varphi}$, $\hat{q}$, $\hat{F}$ — преобразования фурье-функций $\varphi(t,\mathbf{x})$, $q(t,\mathbf{x})$, $F(t,\mathbf{x}')$; $\omega^2 = 4\pi^2|\xi'|^2 = 4\pi^2(\tilde{\xi}_2^2 + \tilde{\xi}_3^2) < \infty$, где $\xi' = (\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)$ — параметр преобразования Фурье. Следуя [4], нетрудно получить решение краевой задачи (5.3), (5.4):

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi} = -\tilde{m}\exp(-\omega x_1)c_2 + \tilde{y}_1, \quad \hat{\varphi}' = \frac{1}{2}c_2\exp(-\omega x_1) + \omega\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \quad (x_1 > 0), \\ &\hat{\varphi} = c_{1\infty}\exp(\omega x_1) + \tilde{y}_{1\infty}, \quad \hat{\varphi}' = c_{1\infty}\omega\exp(\omega x_1) + \omega\tilde{y}_{1\infty} + \tilde{y}_{2\infty} \quad (x_1 < 0), \end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)^* = \int_0^\infty G(x_1 - \tau)\mathbf{f}(t,\tau,\xi')\,d\tau \cdot \quad (\tilde{y}_{1\infty}, \tilde{y}_{2\infty})^* = \int_{-\infty}^0 G(x_1 - \tau)\mathbf{f}(t,\tau,\xi')\,d\tau;$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi\hat{q} \end{pmatrix}; \quad c_{1\infty} = \frac{2\pi}{\hat{d}\omega}\int_0^\infty \exp(-\omega\tau)\hat{q}(t,\tau,\xi')\,d\tau - \frac{\hat{\chi}}{2\hat{d}}\hat{F};$$

$$c_2 = -4\pi\hat{d}\int_{-\infty}^0 \exp(\omega\tau)\hat{q}(t,\tau,\xi')\,d\tau - \hat{\chi}\omega\hat{F}.$$

Функция $H_2(t)$ представляет собой сумму интегралов:

$$H_2(t) = \iint\limits_{R^2} E_{1\infty}^2 d\mathbf{x}' + \iint\limits_{R^2} E_{2\infty}^2 d\mathbf{x}' + \ldots + \varepsilon\iint\limits_{R^2}\left(\frac{\partial^2 E_{3\infty}}{\partial x_3^2}\right)^2 d\mathbf{x}'.$$

Используя равенство Парсеваля, второе и третье граничные условия из (3.4), соотношения (5.5), можно получить неравенство

$$\iint\limits_{R^2} E_{1\infty}^2 d\mathbf{x}' \leqslant K_1\iint\limits_{R^2}(u_2^2 + u_3^2)\Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}' + K_2\iint\limits_{R^2}(u_{2\infty}^2 + u_{3\infty}^2)\,d\mathbf{x}' +$$

$$+K_3 \iint\limits_{R^2} \left\{ \left| \int\limits_0^\infty \exp\,(-\omega\tau)\hat{q}d\tau \right|^2 + \left| \int\limits_{-\infty}^0 \exp\,(\omega\tau)\hat{q}d\tau \right|^2 \right\} d\xi', \qquad (5.6)$$

где $K_1, K_2, K_3 > 0$ — постоянные, которые могут быть легко выписаны.

Из последнего уравнения системы (3.6) следует, что функция

$$\Phi = \Phi(t,\xi') = \int\limits_0^\infty \exp\,(-\omega\tau)\hat{q}(t,\tau,\xi')\,d\tau$$

удовлетворяет уравнению

$$\Phi_t + (1+\hat{\omega}_1)\omega\Phi = \hat{q}(t,+0,\xi'), \qquad (5.7)$$

где $\hat{q}(t,+0,\xi') = \hat{q}(t,\tau,\xi')\Big|_{\tau\to+0} = \theta_1\hat{q}(t,\tau,\xi')\Big|_{\tau\to-0} = \theta_1\hat{q}_\infty(t,\xi')$ (предполагаем, что $q \to 0$ при $x_1 \to \infty$).

Из (5.7) получим

$$\Phi = \exp\,(-(1+\hat{\omega}_1)\omega t)\int\limits_0^\infty \exp\,(-\omega\tau)\hat{q}_0(\tau,\xi')\,d\tau + \theta_1\int\limits_0^t \exp\,(-(1+\hat{\omega}_1)\omega(t-z))\hat{q}_\infty(z,\xi')\,dz. \qquad (5.8)$$

С другой стороны, из последнего уравнения системы (3.7) в силу первого неравенства (4.6) функция $q(t,\mathbf{x})$ при $x_1 < 0$ определяется через начальные данные следующим образом:

$$q(t,\mathbf{x}) = q_0(x_1 - \bar{v}(1+\hat{\omega}_{1\infty})t, \mathbf{x}'), \quad x_1 < 0. \qquad (5.9)$$

Предположим, что функция $q_0(x)$ финитна по x_1 с носителем $\operatorname{supp} q_0 = ((z_{1\infty}, z_{0\infty}) \cup (z_0, z_1)) \times R^2$, где $-\infty < z_{1\infty} < z_{0\infty} \leqslant 0 \leqslant z_0 < z_1 < \infty$. Тогда из (5.8) с учетом неравенства Гёльдера и (5.9) имеем

$$|\Phi|^2 \leqslant C_0 \int\limits_0^\infty |\hat{q}_0|^2\,d\tau + C_1 \int\limits_{-\infty}^0 |\hat{q}_0|^2\,d\tau, \qquad (5.10)$$

где постоянные C_0, $C_1 > 0$ зависят от $z_{1\infty}$, $z_{0\infty}$, z_0, z_1. Таким образом, из (5.6), (5.10) с помощью неравенства Гёльдера окончательно выводим оценку

$$\iint\limits_{R^2} E_{1\infty}^2 d\mathbf{x}' \leqslant K_1 \iint\limits_{R^2} (u_2^2 + u_3^2)\Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}' + K_2 \iint\limits_{R^2} (u_{2\infty}^2 + u_{3\infty}^2)\,d\mathbf{x}' + K_4 I_0(t),$$

где $K_4 > 0$ — постоянная. Аналогично можно оценить остальные интегралы из суммы для $H_2(t)$. В итоге получаем оценку $H_2(t) \leqslant N_3 H_1(t) + N_4 I_0(t)$ ($N_3, N_4 > 0$ — постоянные), из которой, используя свойство следа функции из $W_2^1(R_+^3)$ на плоскости $x_1 = 0$ [9], выводим неравенство

$$H_2(t) \leqslant N_3 \iint\limits_{R^2} (\varepsilon(P+R) + (\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty}))\,d\mathbf{x}' + \tilde{N}_4 I_0(t) \qquad (5.11)$$

($\tilde{N}_4 > 0$ — постоянная).

Из граничных условий (3.4) и системы (3.2) при $x_1 = 0$ получим

$$(\xi_2^2 + \xi_3^2)u_k = (\beta_1\tau + \beta_2\xi_1)\xi_k p - d_0\tau\xi_k E_{1\infty} + \sum_{i=1}^3 D_k^{(i)} u_{i\infty} + D_k^{(4)} p_\infty + D_k^{(5)} s_\infty + D_k^{(6)} q_\infty$$

$$(k=2,3), \quad x_1 = 0,$$

где $\beta_1 = -1 - d$, $\beta_2 = \beta^2/\mathrm{M}^2$, $\beta = \sqrt{1-\mathrm{M}^2}$ ($\mathrm{M} < 1$), а дифференциальные операторы $D_k^{(j)}$ ($j = \overline{1,5}$) имеют вид

$$D_k^{(j)} = \sum_{\alpha_0+|\alpha|=2} d^{kj}_{\alpha_0,\alpha}\tau^{\alpha_0}\xi^{\alpha}, \quad D_k^{(6)} = d_1^k\tau + d_2^k\xi_2 + d_3^k\xi_3$$

(α_0 — целое неотрицательное число, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\xi_\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}$, постоянные $d^{kj}_{\alpha_0,\alpha}$ и $d^k_{1,2,3}$ определяются через коэффициенты граничных условий (3.4)). Тогда, используя известное неравенство из [10]

$$\iint\limits_{R^2} R d\mathbf{x}' \leqslant \mathrm{const} \iint\limits_{R^2} \sum_{k=2}^{3} (\xi_2^2 u_k + \xi_3^2 u_k)^2 \Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}' \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \iint\limits_{R^2} \sum_{k=2}^{3} ((\beta_1\tau + \beta_2\xi_1)\xi_k p)^2 \Big|_{x_1=0} d\mathbf{x}' + C_2 H_2(t) + C_3 \iint\limits_{R^2} (\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty})\, d\mathbf{x}'$$

($C_{1,2,3} > 0$ — постоянные) и свойство следа функции из $W_2^1(R_+^3)$ на плоскости $x_1 = 0$ с учетом (5.11), неравенство (5.2) приводим к виду

$$\frac{d}{dt} I_0(t) + \iint\limits_{R^2} ((\eta\lambda_{\min} - \tilde{N}_3)(\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty}) - \varepsilon \tilde{N}_1 P)\, d\mathbf{x}' \leqslant \tilde{N}_2 I_0(t) \tag{5.12}$$

($\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3 > 0$ — постоянные). Заметим, что при выводе (5.12) $\varepsilon < 1/(N_3(1 + C_2))$. Неравенство (5.11) можно переписать так:

$$H_2(t) \leqslant \varepsilon \hat{N}_3 \iint\limits_{R^2} P\, d\mathbf{x}' + C_4 \iint\limits_{R^2} (\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty})\, d\mathbf{x}' + \hat{N}_4 I_0(t), \tag{5.11$'$}$$

где

$$\hat{N}_3 = \frac{N_3 C_1}{1 - \varepsilon N_3(1 + C_2)} > 0; \quad \hat{N}_4 = \frac{\tilde{N}_4}{1 - \varepsilon N_3(1 + C_2)} > 0;$$

$C_4 > 0$ — постоянная.

Перейдем ко второму этапу конструирования расширенной системы. Заметим, что функция p при $x_1 > 0$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\{(\tau')^2 - (\xi_1')^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\} p = \mathcal{F}_1 \tag{5.13}$$

($\mathcal{F}_1 = (\mathrm{M}^2(\gamma - 1)/\gamma) Lq - 1/(\gamma\hat{\omega}_1)\xi_1 q$), где новые дифференциальные операторы τ', ξ_1' задаются формулами $\tau = (\beta/\mathrm{M})\tau'$, $\quad \xi_1 = (1/\beta)\xi_1' + (\mathrm{M}/\beta)\tau'$. Если функция p удовлетворяет уравнению (5.13), то вектор $\mathbf{Y} = (\tau' p, \xi_1' p, \xi_2 p, \xi_3 p)^*$ удовлетворяет симметрической системе [4]

$$(B\tau' + Q\xi_1' + R_2\xi_2 + R_3\xi_3)\mathbf{Y} = \mathcal{F}, \quad \mathbf{x} \in R_+^3. \tag{5.14}$$

Здесь $\mathcal{F} = \mathcal{F}(m_1, l_2, l_3) = (\mathcal{F}_1, -m_1\mathcal{F}_1, -l_2\mathcal{F}_1, -l_3\mathcal{F}_1)^*$, где m_1, l_2, l_3 — постоянные; матрицы B, Q, R_2, R_3 легко могут быть выписаны ($B > 0$, если $m_1^2 + l_2^2 + l_3^2 < 1$).

Как и в газовой динамике [4], с учетом граничных условий (3.4), систем (3.2), (3.3) и уравнения (5.13) при $x_1 = 0$ получаем, что функция p удовлетворяет граничному условию

$$(\tau' - a\xi_1')\hat{L}p + \mathcal{F}_0 = 0, \tag{5.15}$$

где $\hat{L} = a_1\tau' + a_2\xi_1'$;

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{\mathrm{M}^2}{\beta^2}\{d_0\tau^2 - d_0\tau\xi_1 - \hat{\lambda}\mu_0(\xi_2^2 + \xi_3^2)\}E_{1\infty} + \sum_{i=1}^{3} D^{(i)}u_{i\infty} + D^{(4)}p_\infty + D^{(5)}s_\infty + D^{(6)}q_\infty;$$

$$D^{(j)} = \sum_{\alpha_0+|\alpha|=2} d^j_{\alpha_0,\alpha}\tau^{\alpha_0}\xi^\alpha, \quad j = \overline{1,5}; \quad D^{(6)} = d_{(1)}\tau + d_{(2)}\xi_2 + d_{(3)}\xi_3;$$

постоянные $d^j_{\alpha_0,\alpha}$, $d_{(1,2,3)}$ определяются через коэффициенты граничных условий (3.4). Из (5.14) для вектора $\mathbf{Y}_p = (\tau'\mathbf{Y}^*, \xi_1'\mathbf{Y}^*, \xi_2\mathbf{Y}^*, \xi_3\mathbf{Y}^*, \hat{L}\mathbf{Y}^*)^*$ конструируем расширенную систему

$$\Big\{B_p\tau' + Q_p\xi_1' + R_{2p}\xi_2 + R_{3p}\xi_3\Big\}\mathbf{Y}_p = \mathcal{F}_p, \tag{5.16}$$

где B_p, Q_p, R_{2p}, R_{3p} — блочно-диагональные матрицы порядка 20; $B_p = \mathrm{diag}\,(\sigma_1B_1, \sigma_2B_2, \sigma_3B_3, \sigma_4B_4, \sigma_5B_5)$; $B_i = B(m_{1i}, l_{2i}, l_{3i})$ и т. д.; $\sigma_i > 0$; m_{1i}, l_{2i}, l_{3i} ($i = \overline{1,5}$) — постоянные; $m_{1i}^2 + l_{2i}^2 + l_{3i}^2 < 1$. Выбирая коэффициенты соответствующим образом, можно превратить систему в симметрическую t-гиперболическую (по Фридрихсу), причем с учетом (5.15) можно оценить квадратичную форму так:

$$-(Q_p\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)\Big|_{x_1=0} \geqslant N_4P - \tilde{N}_{\hat{e}}\mathcal{E} - N_5(\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty}), \tag{5.17}$$

где $N_{4,5}$, $\tilde{N}_e$ — положительные постоянные; $\tilde{N}_{\hat{e}} = O(\hat{e})$. Запишем для системы (5.16) интеграл энергии в дифференциальной форме [4]:

$$(D_p\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)_t + \beta(Q_p\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)_{x_1} + (R_{2p}\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)_{x_2} + (R_{3p}\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)_{x_3} + 2(\mathbf{Y}_p, \mathcal{F}_p) = 0. \tag{5.18}$$

Здесь $D_p = (\mathrm{M}/\beta)B_p - (\mathrm{M}^2/\beta)Q_p > 0$. Проинтегрируем (5.18) по области R^3_+, предполагая, что $|\mathbf{Y}_p| \to 0$ при $x_1, |x_{2,3}| \to \infty$. В результате с учетом (5.17), (5.11$'$) и свойства следа функции из $W^1_2(R^3_+)$ на плоскости $x_1 = 0$ получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}I_1(t) + \iint\limits_{R^2}(N_6P - N_7(\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty}))\,d\mathbf{x}' \leqslant N_8(I_1(t) + I_0(t)), \tag{5.19}$$

где $N_{6,7,8}$ — положительные постоянные;

$$I_1(t) = \iiint\limits_{R^3}(D_p\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p)\,d\mathbf{x}.$$

Складывая неравенства (5.12) и (5.19) и учитывая, что путем подходящего выбора постоянных ε, η можно добиться положительной определенности квадратичной формы $(N_6 - \varepsilon\tilde{N}_1)P + (\eta\lambda_{\min} - N_3 - N_7)(\mathbf{V}_{p\infty}, \mathbf{V}_{p\infty})$, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}I(t) \leqslant N_9I(t), \quad t > 0,$$

где $I(t) = I_0(t) + I_1(t)$; $N_9 > 0$ — постоянная. Из последнего неравенства следует априорная оценка

$$I(t) \leqslant \exp\,(N_9t)I(0), \quad t > 0. \tag{5.20}$$

Тогда из (5.5), (5.20) и равенства Парсеваля получаем искомую априорную оценку

$$\|\mathbf{Z}(t)\|_{W^2_2(R^3_+)} \leqslant N_{10}, \quad 0 < t \leqslant \tilde{T} < \infty, \tag{5.21}$$

где $\mathbf{Z} = (\mathbf{V}^*, \mathbf{E}^*)^*$; $N_{10} < \infty$ — положительная постоянная, зависящая от $\tilde{T}$; $\|\mathbf{Z}(t)\|_{W_2^2(R^3_\pm)} = \|\mathbf{Z}(t)\|_{W_2^2(R^3_+)} + \|\mathbf{Z}(t)\|_{W_2^2(R^3_-)}$. Причем, как и в [4], для функции $F(t, \mathbf{x}')$может быть получена оценка

$$\|F\|_{W_2^3((0,T)\times R^2)} \leqslant N_{11} \tag{5.22}$$

($N_{11} < \infty$ — положительная постоянная, зависящая от $\tilde{T}$).

Априорные оценки (5.21), (5.22) указывают на то, что основная задача об устойчивости электрогидродинамических ударных волн корректна в случае (4.6) при сделанных предположениях о малости скачка нормальной составляющей напряженности электрического поля на разрыве (см. замечание 4.1) и финитности по x_1 функции начального возмущения заряда $q_0(\mathbf{x})$ перед и за разрывом (при $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$).

Замечание 5.1. Используя положительную определенность матрицы $A^{(1)}_\infty$ и описанную выше технику получения априорной оценки, можно доказать корректность основной задачи и в случае выполнения условий (4.7). В случае выполнения условий (4.8) при $-1 < \hat{\omega}_{1\infty} < 0$, т. е. $\hat{E}_{1\infty} < 0$, условие малости коэффициентов $\hat{d}_0$, d_0, μ_0, ν_0 может быть выполнено (см. замечание 4.1). При этом функция $\Omega(t, x')$ определяется из шестого граничного условия (3.4) через начальные данные $q_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^3_\pm$ при $x_1 = 0$. Дальнейшие рассуждения для получения априорной оценки основной задачи аналогичны рассуждениям для случаев (4.6) и (4.7).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01560).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гогосов В. В., Полянский В. А.** Электрогидродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. 1976. Т. 10. С. 5–85.
2. **Stuetzer O. M.** Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 5. P. 534–544.
3. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
4. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
5. **Blokhin A. M.** Strong Discontinuities in Magnetohydrodynamics. N. Y.: Nova Sci. Publ., 1993.
6. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
7. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
9. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
10. **Ладыженская О. А.** Математические проблемы вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 8/X 1996 г.