

## РАСЧЕТ ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ИХ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ПО ФИЛЬТРАЦИОННОМУ КАНАЛУ С ОТСОСОМ ОДНОГО КОМПОНЕНТА

В.П. МОГУЛЕВИЧ, Н.М. ПЕНЖИЕВ

*Московский энергетический институт,  
Туркменский политехнический институт, Ашхабад*

Предложена новая схема расчета поля концентрации смесей жидкостей при их турбулентном течении по фильтрационному каналу. Уравнение концентрации преобразовано к новой форме с введением дополнительной переменной. Это дало возможность проведения расчета на равномерных численных сетках, причем даже для случаев, когда традиционные методы расчета приводят к неудовлетворительным результатам из-за специфики граничных условий для малого коэффициента диффузии. Модельный численный эксперимент показал возможность снижения влияния поля концентрации путем турбулизации текущей по каналу жидкой смеси и ее разделения на компоненты.

Расчет разделения жидких систем при их турбулентном потоке по полупроницаемому фильтрационному каналу является весьма трудоемкой задачей и обычно основывается на различного рода эмпирических моделях [1]. Основную сложность представляет анализ гидродинамики течения, требующий использования сложных моделей турбулентности, типа  $k - \varepsilon$ -модели [2]. Проблема усугубляется и большим многообразием методов турбулизации течения жидких систем. Точное решение задач такого класса в полном объеме крайне затруднено, поэтому представляется актуальным рассмотрение численной схемы расчета упрощенной модели процесса.

В настоящей работе рассматривается численная схема расчета поля концентрации турбулентного потока жидких смесей в плоском фильтрационном канале с полупроницаемыми стенками. Упрощение расчетной модели производится с применением известных эмпирических аппроксимаций для полей скоростей турбулентного потока жидкости [3].

Рассмотрим плоский фильтрационный канал размером  $2R \times L$  ( $R \ll L$ ) (рис. 1). Поток жидкой смеси имеет начальную скорость на оси канала  $U_0$ . Полупроницаемые верхние и нижние стенки пропускают растворитель, но задерживают растворенное вещество. Скорости фильтрации концентрата через его стенки составляют соответственно  $V_0\xi(x')$  и  $\kappa V_0\xi(x')$ , где функция  $\xi(x') \in [0, 1]$ ,  $\xi(0) = 1$  будет зависеть от обратноосмотического давления. Будем считать, что параметр  $\kappa$  принимает одно из двух значений:  $\kappa = 1$  (симметричный случай) и  $\kappa = 0$  (случай фильтрации через одну стенку). Для таких каналов стационарное распределение концентрации растворенного вещества при турбулентном течении жидких систем будет описываться следующим уравнением [4]:

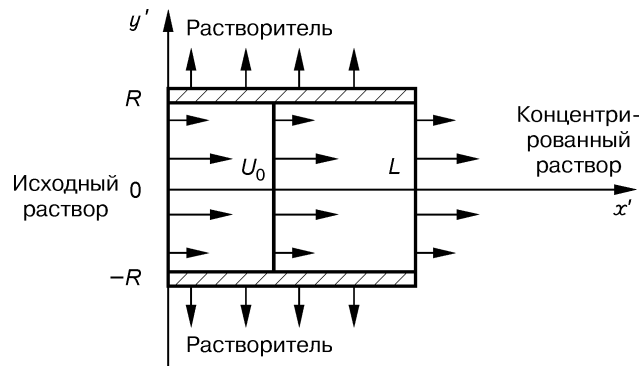


Рис. 1. Схема плоского фильтрационного канала.

Исходный раствор:  $T'(0, y) = T'_{in}$ ,  $C'(0, y) = C'_{in}$ ; растворитель:  $V_0 \xi_1(x')$ ,  $T'(x, R) = T'_c$  (верхняя стенка),  $\kappa V_0 \xi_2(x')$ ,  $T'(x, -R) = T'_c$  (нижняя стенка).

$$u' \frac{\partial C'}{\partial x'} + v' \frac{\partial C'}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( D' + \frac{v'_T}{\sigma_{Pr}} \right) \frac{\partial C'}{\partial y'}, \quad (1)$$

где  $C'$  — концентрация растворенного вещества,  $u'$ ,  $v'$  — продольная и поперечная компоненты скорости,  $D'$  — коэффициент диффузии,  $\sigma_{Pr}$  — турбулентное число Прандтля.

Уравнение для турбулентной вязкости  $v'_T$  имеет вид [4]

$$v'_T = \bar{l}^2 \left| \frac{\partial u'}{\partial y'} \right|, \quad (2)$$

где длину пути смешения  $\bar{l}$  определим с помощью экспериментальной аппроксимации Никурадзе для каналов [5]:

$$-\bar{l}/R \cong 0,14 - 0,08(y'/R)^2 - 0,06(y'/R)^4. \quad (3)$$

Компоненты скорости  $u'$  и  $v'$  будем вычислять при помощи эмпирической аппроксимации Бай Ши-и [3]:

$$u = u_1(x)u_2(y), \quad (4)$$

$$u_2(y) = 1 - \eta y^2 - (1 - \eta)y^{2n},$$

где

$$u = u'/U_0, \quad x = x'/L, \quad y = y'/R, \quad \eta = (n - S)/(n - 1), \quad n \cong 1,4S.$$

Здесь параметр турбулизации  $S$  определяется при помощи экспериментальных данных измерения давления и скорости на входе в канал и выходе из него. Для его нахождения может быть использовано уравнение изменения количества движения вдоль оси  $x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 + \frac{v'_T}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

где  $P = \frac{R^2 P'}{L \rho \nu U_0}$  — безразмерное давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость. Интегрируя уравнение (5) сначала по поперечному сечению канала (с учетом  $v'_\tau(y = \pm 1) = 0$ ), а затем и вдоль канала, получим [3]:

$$S \cong \left( \frac{R^2}{L \rho \nu} \right) \frac{(P'(0) - P'(L))}{(u'(0) - u'(L))}. \quad (6)$$

Входящую в (4) функцию  $u_1(x)$  определим из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

где

$$v = \frac{v'}{V_0}, \quad a = \frac{V_0 L}{V_0 R},$$

После интегрирования уравнения (7) по участку канала  $[-1, 1] \times [0, x]$  получим

$$\int_{-1}^1 u(0, y) dy = \int_{-1}^1 u(x, y) dy + a(1 + \kappa) \int_{-1}^1 \xi(x) dx. \quad (8)$$

Решая (8) с учетом  $\bar{u}(0, 0) = 1$ , найдем

$$u_1(x) = \frac{1}{\beta_0} - \int_{-1}^1 \xi(x) dx, \quad (9)$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \frac{a(1 + \kappa)}{\left[ 1 - \frac{\eta}{3} - \frac{1 - \eta}{2n + 1} \right]}.$$

Составляющая скорости  $v$  вычисляется из уравнения (7):

$$v = \frac{\beta_0}{a} v_1(x) v_2(y), \quad (10)$$

$$v_1 = \xi(x), \quad v_2 = \frac{a}{\beta_0} \frac{1 - \kappa}{2} + y - \frac{\eta}{3} y^3 - \frac{1 - \eta}{2n + 1} y^{2n + 1}.$$

В результате безразмерное уравнение концентрации (1) примет вид

$$u_2 \frac{\partial}{\partial x} [u_1 C] + \frac{\partial}{\partial y} I_c = 0,$$

$$I_c = v_1 v_2 C - g \frac{\partial C}{\partial y}, \quad g = D + v_\tau / \sigma_{Pr},$$

$$v_\tau = 8 \cdot 10^{-4} \eta \frac{L}{R} |y| (7 - 4y^2 - 3y^4)^2 \left( 1 + n \frac{1-\eta}{\eta} y^{2n-2} \right) u_1(x), \quad (11)$$

где

$$C = \frac{C'}{C'(0,0)}, \quad D = \left( \frac{a}{\beta_0} \right) \left( \frac{D'}{V_0 R} \right), \quad v_\tau = \left( \frac{a}{\beta_0} \right) \left( \frac{v'_\tau}{V_0 R} \right).$$

При  $S = 1$  поля скоростей (4), (9), (10) будут описывать ламинарное течение. В этом случае в уравнении (11) следует полагать, что  $v_\tau = 0$ . Для турбулентного течения ( $S \leq 10$ ) обычно принимают  $\sigma_{Pr} \sim 1$ .

Выпишем граничные условия для (11) из условия непрерывности потока концентрации  $I_c$  через стенку фильтрационного канала. Считая, что после прохождения через стенку концентрация вещества уменьшается в  $1/K_m$  раз, а ее поток будет равен  $I_c = K_m v_1 v_2 C$ , получим

$$[I_c - K_m v_1 v_2 C]_{y=\pm 1} = 0. \quad (12)$$

Существуют различные выражения для коэффициента  $K_m$ . В простейшем случае его зависимость от скорости фильтрации будет иметь вид [6]

$$\underline{K}_m = \{ \gamma_m + (1 - \gamma_m) \exp[(V_0 \xi h_m / D_m)] \}^{-1}, \quad (13)$$

где  $\gamma_m > 1$  — экспериментально определяемый параметр,  $h_m$  — толщина мембраны,  $D_m$  — коэффициент диффузии внутри мембраны (практически  $\gamma_m \approx 10-100$ ,  $V_0 h_m / D_m \geq 2$ ).

Для нахождения функции  $\xi(x)$  примем во внимание, что при обратном осмосе падение гидравлического давления вдоль канала оказывается значительно меньше исходного давления в растворе. Поэтому поведение  $\xi(x)$  будет определяться в основном обратноосмотическим давлением  $\pi' \cong \text{const}$  (обычно  $\pi' \cong 4,6 \text{ кг/см}^2$ ) [1]:

$$\xi = K [\Delta P'_0 - \pi'] = 1 + \alpha [1 - C(x, 1) / C(0, 1)], \quad (14)$$

где  $\alpha, K$  — константы,  $\Delta P'_0$  — средний перепад давления через стенку.

Система уравнений (4), (9) – (14) является замкнутой и позволяет рассчитать пространственное распределение концентрации растворенного вещества внутри самого фильтрующего канала. Перед тем как перейти к ее численному анализу, проведем приближенное исследование (11), (12). Для этого выпишем усредненные на интервале  $[x, x + \Delta x]$  уравнения (11), (12), используя следующее обозначение операции усреднения:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta x} \int \Phi dx.$$

С учетом представления  $C = C_1(x)C_2(y)$  для случая идеальной фильтрации ( $K_m = 0$ ) получим

$$u_2 C_2 \frac{d}{dx} (\overline{u_1 C_1}) + \frac{\partial}{\partial y} \overline{I_c} = 0, \quad \overline{I_c}(y = \pm 1) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (15) допускают решение

$$\overline{I_c} = 0, \quad \frac{d}{dx} (\overline{u_1 C_1}) = 0, \quad (16)$$

которое после преобразования примет вид

$$C_1(x + \Delta x) = \frac{C_1(x) u_1(x)}{u_1(x + \Delta x)}, \quad (17)$$

$$A v_2 C_2 = \left( \gamma + \frac{v_2}{\sigma_{Pr}} \right) \frac{dC_2}{dy}, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{\overline{v_1 C_1}}{u_1 C_1} \cong \frac{\bar{v}_1}{\bar{u}_1}, \quad \gamma = \frac{D \overline{C_1}}{u_1 C_1} \cong \frac{\bar{D}}{\bar{u}_1}, \quad v_2(y) = \frac{v_T}{u_T}.$$

Окончательно из уравнения (18) будем иметь:

$$C_2(y) = K \exp \left\{ A \int_{-1}^y \frac{v_2(y) dy}{(\gamma + v_2(y)/\sigma_{Pr})} \right\}, \quad (19)$$

где  $K$  — нормировочная постоянная,  $K = \min_y C_2$ .

Уравнения (17) – (19) показывают влияние основных параметров рассматриваемой модели на распределение поля концентрации. Для проведения более точного расчета рассмотрим построение численной схемы для решения уравнений (11) – (14). Сложность точного расчета определяется спецификой граничных условий (12). При малых коэффициентах диффузии ( $D \cong 0,1$ ) в их конечно-разностных аппроксимациях наблюдается существенное преобладание недиагональных элементов. В результате используемый метод прогонки “работал” не всегда хорошо, и построенные дискретные аналоги уравнений (11), (12) при малых значениях  $D$  часто давали неудовлетворительные результаты. Использование неравномерных сеток с сильным сгущением вблизи стенок канала заметно увеличивало размерность дискретной схемы. Преодоление указанных трудностей стало возможным с использованием описываемой ниже схемы, заменяющей расчет поля концентрации расчетом поля функции:

$$Z(x, y) = C(x, y) e^{-f(x, y)}, \quad f = - \int_y^1 \Phi dy, \quad \Phi = v_1 v_2 / g. \quad (20)$$

Использованный вид замены (20) отчасти может быть объяснен с помощью уравнений (19). Для такой функции  $Z$  выражения (11), (12) преобразуются к виду

$$u_2 \frac{\partial}{\partial x} [u_1 Z e^{f_p}] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ g \frac{\partial Z}{\partial y} e^{f_p} \right], \left[ \frac{\partial Z}{\partial y} + K_m \Phi Z \right]_{y=\pm 1} = 0. \quad (21)$$

Проинтегрируем их по контрольному объему (рис. 2):

$$\left[ u_1 Z_p e^{f_p} - \bar{u}_1 Z_p e^{\bar{f}_p} \right] \int_w^e u_2 dy = \Delta x \theta \left[ g e^{f_p} \frac{\partial Z}{\partial y} \right]_w^e + \Delta x (1-\theta) \left[ \bar{g} e^{\bar{f}_p} \frac{\partial Z}{\partial y} \right]_w^e, \quad (22)$$

где чертой сверху здесь и далее обозначаются значения соответствующих величин на предыдущем шаге по  $x$ , постоянный параметр  $\theta$  ( $\theta \in [0, 1]$ ) позволяет получить при  $\theta = 0,5$  схему Кранка — Николсона с порядком точности  $O(\Delta x^2)$ , а при  $\theta = 1$  схему “против потока” с порядком точности  $O(\Delta x)$ , причем все эти схемы при  $\theta \in [0, 5; 1]$  являются безусловно устойчивыми.

Принимая в (22)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} \Big|_e = \frac{Z_E - Z_p}{\delta y_e}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} \Big|_w = \frac{Z_p - Z_w}{\delta y_w}, \quad \int_w^e u_2 dy = v_2 \Big|_w^e \quad (23)$$

и умножая результат на  $e^{-f_p}$ , после преобразований получим:

$$a_p Z_p = a_E Z_E + a_w Z_w + a_p^0, \quad a_E = \theta \frac{\Delta x}{\delta y_e} g_e e^{f_e - f_p},$$

$$a_w = \theta \frac{\Delta x}{\delta y_w} g_w e^{f_w - f_p}, \quad a_p = a_E + a_w + u_1 (v_{2e} - v_{2w}),$$

$$a_p^0 = \frac{1}{\theta} e^{-\bar{f}_p - f_p} \{ u_1 (v_{2e} - v_{2w}) \bar{Z}_p - (1-\theta) a_p^0 \},$$

$$f_e - f_p = \frac{1}{4} \Delta y (\Phi_e + \Phi_p), \quad f_w - f_p = \frac{1}{4} \Delta y (\Phi_w + \Phi_p), \quad C_p = Z_p e^{f_p}. \quad (24)$$

Выполнение условий  $a_E > 0$ ,  $a_w > 0$ ,  $a_p > a_E + a_w$  отвечает основным требо-

ваниям физической правдоподобности и хорошей обусловленности дискретных схем [7].

Перейдем в уравнениях (24) к индексной форме записи. Примем разбиения поперечного сечения канала, как показано на рис. 3. Параметры такого разбиения легко вычисляются через поперечные размеры контрольных объемов  $\Delta y_i$  ( $i = 2, N-1$ ) (здесь полагаем, что

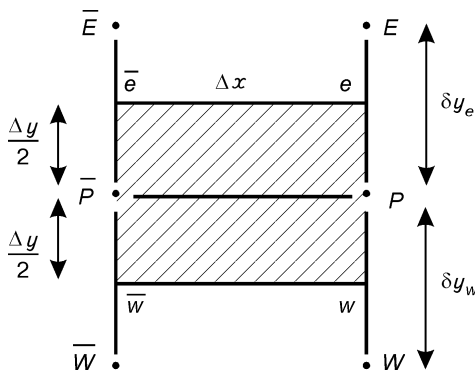


Рис. 2. Шеститочечный шаблон.

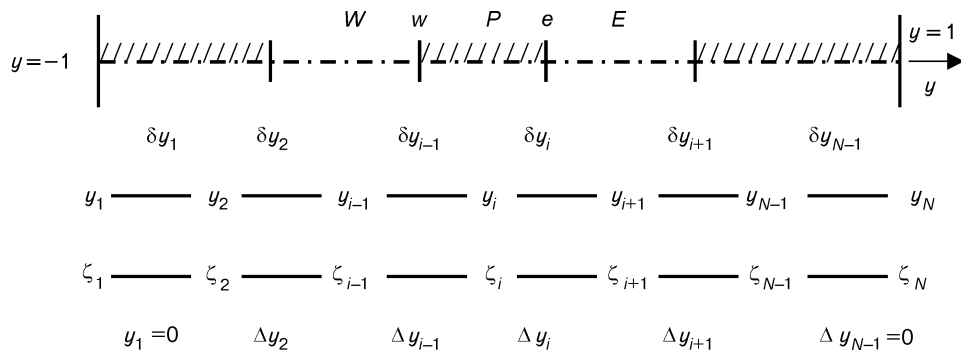


Рис. 3. Расчетная сетка шеститочечного шаблона.

$\Delta y_1 = 0, \Delta y_N = 0$ ):

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \Delta y_{i+1}), \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\zeta_1 = -1, \quad \zeta_i = \zeta_1 + \sum_{j=0}^i \Delta y_j, \quad i = \overline{2, N-1},$$

$$y_1 = -1, \quad y_i = \frac{1}{2}(\zeta_{i-1} + \zeta_i), \quad i = \overline{2, N-1}, \quad y_N = 1. \quad (25)$$

При этом переход к индексной форме записи уравнений (24) осуществляется через замены типа

$$a_p^0 \rightarrow a0_i, \quad a_p \rightarrow a_i, \quad Z_p \rightarrow Z_i,$$

$$a_E \rightarrow aE_i, \quad a_W \rightarrow aW_i, \quad \delta y_e \rightarrow \delta y_i,$$

$$f_p \rightarrow f_i, \quad \bar{f}_p \rightarrow \bar{f}_i$$

и т. д., где используются обозначения  $F(y_i) \equiv F_p, F(\square_i) \equiv F_{i\bar{r}}$ .

Функции  $f_i$ , входящие в  $C_i$ , вычисляются с помощью численного интегрирования. На равномерной сетке ( $\Delta y_i = \Delta y = \text{const}, i = \overline{2, N-1}$ ) они находятся методом Симпсона при помощи следующих уравнений:

$$f_N = 0, \quad f_{N-1} = 1/4 \Delta y (\Phi_N + \Phi_{N+1}),$$

$$f_i = f_{i+1} - 1/6 \Delta y (\Delta \Phi_{i+1} + 4\Phi_{i+1} + \Phi_i) \quad (i = \overline{n-2; 2}),$$

$$f_1 = f_2 - 1/4 \Delta y (\Phi_2 + \Phi_1). \quad (26)$$

Полученная матричная форма записи уравнений (24) решается методом прогонки с граничными условиями:

$$Z_1 = \frac{Z_2}{[1 - \delta y_1 \Phi_1 K_m]}, \quad Z_N = \frac{Z_{N-1}}{[1 + \delta y_{N-1} \Phi_N K_m]}, \quad (27)$$

в которых наблюдается преобладание диагональных элементов. Вдоль канала вычисления ведутся маршевым методом. При этом функции  $u_1, v_1$  на каждом шаге по  $x$  находятся с использованием уравнений

$$u_1 = \bar{u}_1 - \Delta x v_1, \quad v_1 = 1 - a[1 - \bar{Z}_N]. \quad (28)$$

Начальное распределение принимается равномерным:  $C(0, y) = 1$ .

В рассмотренной численной схеме объем вычислений на каждом шаге несколько увеличивается по сравнению с традиционными конечно-разностными схемами решения (11), (12). Однако этот недостаток заведомо компенсируется возможностью использования разряженных равномерных сеток. Так, в модельных экспериментах часто было достаточно использования равномерной сетки  $40 \times 40$ , при этом время машинного расчета занимало не более нескольких минут. Для повышения точности вычислений применялась схема Кранка — Николсона с  $\theta = 0,5$ . Следует также отметить, что использованное в схеме (см. рис. 3) сближение двух узлов сетки перед стенкой канала позволило вдвое повысить точность аппроксимаций граничных условий (12) (они определяют точность вычисления концентрации растворенного вещества перед стенкой).

Приведем некоторые примеры численного анализа описанных модельных экспериментов.

Полагая, что для водных растворов NaCl  $D' = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $V_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$ , получим следующий безразмерный коэффициент диффузии:

$$D = \frac{aD'}{\beta_0 V_0 R} = \frac{a}{\beta_0} \frac{0,3}{R},$$

где  $R$  измеряется в миллиметрах. Отсюда, в частности, видно, что увеличения коэффициента  $D$  можно добиться путем уменьшения толщины канала.

Однако наиболее существенный рост диффузионного потока получается в каналах с турбулентным потоком жидкой системы. В расчетах было рассмотрено два вида турбулентного течения, характеризуемых параметрами  $S = 11$  ( $\eta \cong 0,286$ ,  $n \cong 15$ ) и  $S = 22$  ( $\eta \cong 0,276$ ,  $n \cong 30$ ). В этом случае турбулентный коэффициент диффузии имеет порядок  $v_T \cong a/\beta_0$   $0,005(L/R)$  (на расстоянии  $R/2$  от стенки канала) и может значительно превышать коэффициент  $D$ .

Численные расчеты проводились как при ламинарном ( $v_T = 0$ ,  $S = 1$ ,  $\eta = 1$ ), так и при турбулентном режиме течения жидкой смеси. Параметры модели принимались равными  $D = 0,3$  и  $0,1$ ,  $R/L = 0,005$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $V_0 h_m/D_m = 2$ ,  $K_m(x=0) = 0,05$  (отсюда при помощи уравнения (13) вычисляется  $\gamma_m$  при  $\xi = 1$ ),  $\theta = 0,5$  (схема Кранка — Николсона второго порядка точности). Данные значения соответствуют используемым параметрам в реальных установках.

На рис. 4, I показано распределение поля концентрации растворенного вещества в канале при следующих параметрах процесса:  $\kappa = 1$ ,  $a = 1$  ( $u_1(1)/u_1(0) \cong 0,2$ ),  $D = 0,1$  для  $S = 1$  (a) и  $S = 11$  (b). Влияние обратноосмотического давления на поле концентрации (при отсосе компонента) показано на рис. 4, II при параметрах процесса:  $\kappa = 1$ ,  $a = 1,5$  ( $u_1(1)/u_1(0) \cong 0,06$ ),  $D = 0,3$  для  $S = 1$  (a) и  $S = 11$  (b). Здесь рост концентрации на стенках канала доходит до критической величины, и стенка фильтрационного канала становится непроницаемой. Характер поведения поля концентрации в каналах с одной полупроницаемой стенкой ( $\kappa = 0$ ) показан на рис. 4, III ( $a = 3$  ( $u_1(1)/u_1(0) \cong 0,1$ ),  $D = 0,3$ ). Параметры всех кривых определяются их значениями при пересечении соответствующих осей координат. Для лучшей ориентировки они продублированы на графиках в виде изолиний.



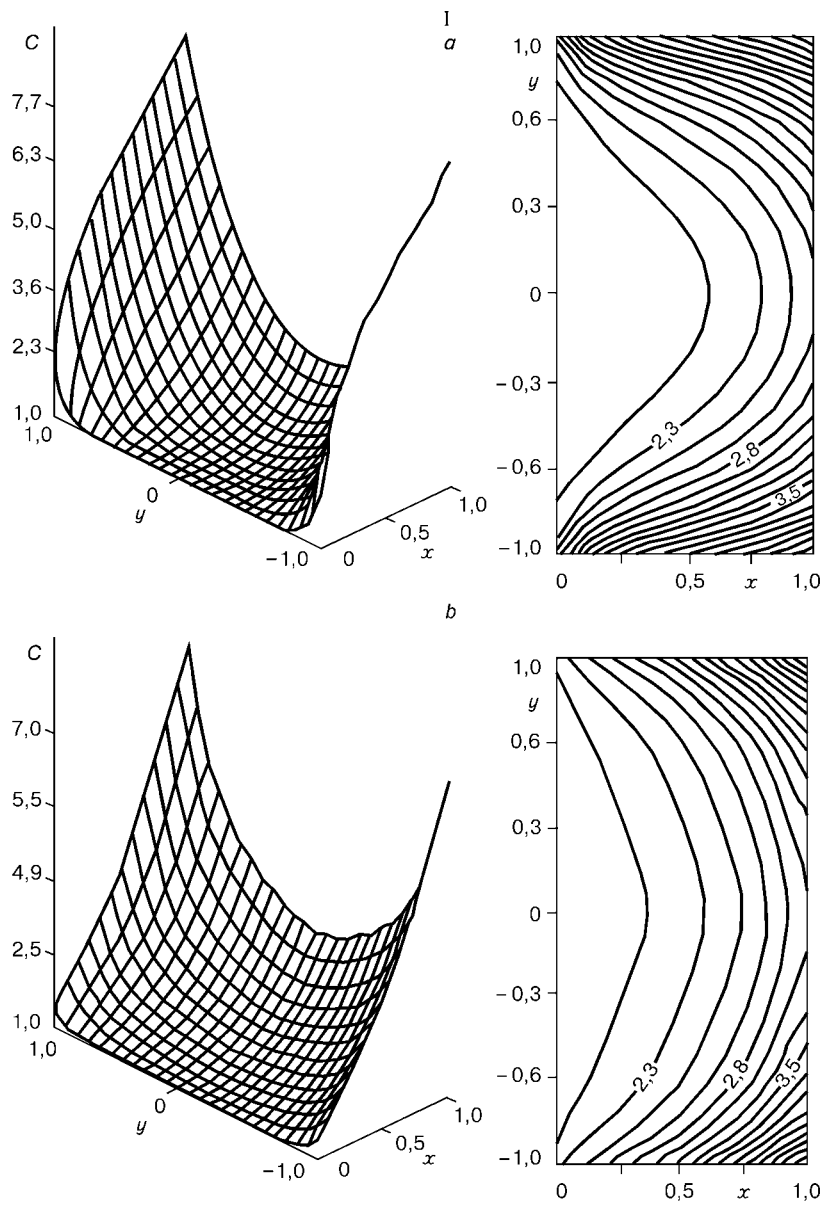


Рис. 4. Распределение поля концентрации в фильтрационном канале при различных параметрах турбулизации при  $S = 1$  (a), 11 (b).

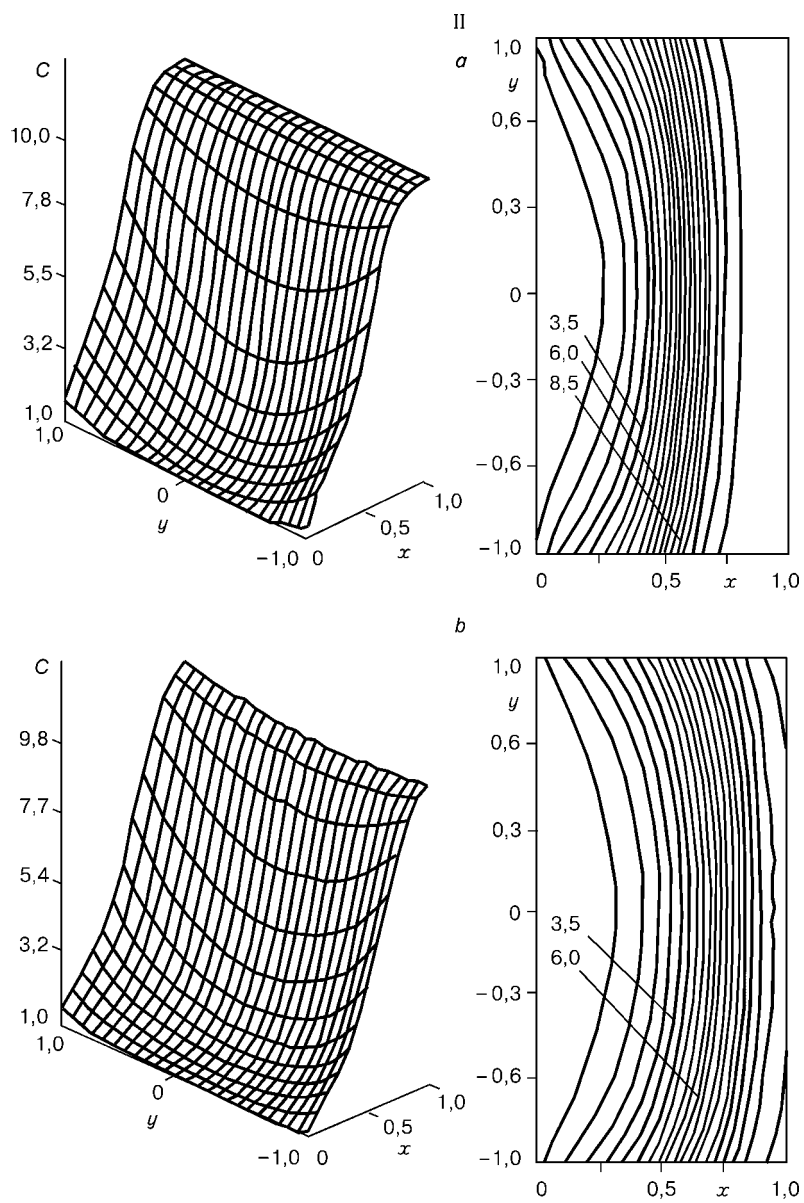


Рис. 4. Продолжение (с учетом влияния обратноосмотического давления).

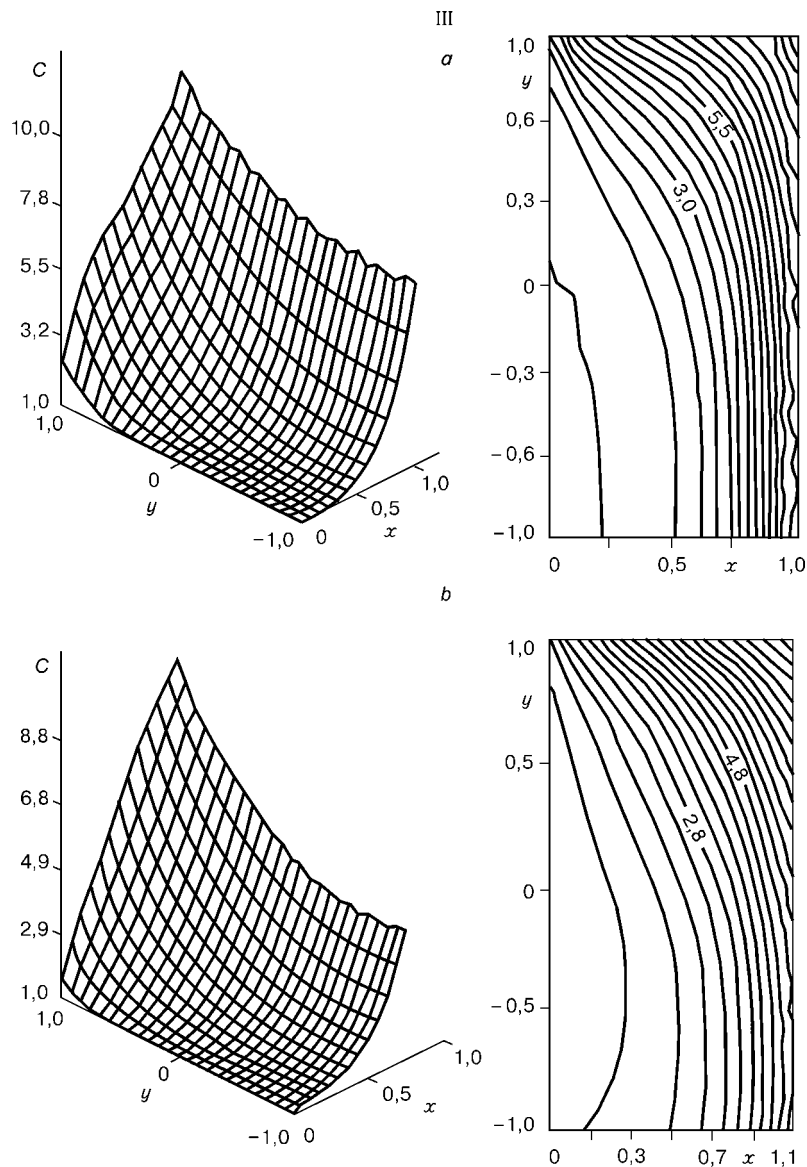


Рис. 4. Окончание (с одной полупроницаемой стенкой).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дытнерский Ю.М. Баромембранные процессы. Теория и расчет. — М.: Химия, 1986.
2. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплопередача и сопротивление пакетов труб. — Л.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов. — М.: Иностран. лит., 1962.
4. Турбулентность: Сборник трудов / Под ред. П. Бредшоу. — М.: Машиностроение, 1980.
5. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизованных потоков. — Киев: Наук. думка, 1985.
6. Мотулевич В.П., Пенжиев Н.М., Шишаков К.В. Аналитическое исследование концентрационной поляризации солей в плоских элементах мембранной фильтрации // Тр. Ин-та матем. и механики АНТ. — Ашхабад: Ылым, 1994. — С. 275 – 294.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

*Статья поступила в редакцию 2 октября 1997 г.,  
в доработанном виде — 23 декабря 1998 г.*