

УДК 539.3

## МЕТОД ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Р. А. Каюмов

Казанская государственная архитектурно-строительная академия, 420043 Казань

Решена задача о напряженно-деформированном состоянии многослойных оболочек. Материал слоев считается нелинейно-упругим, зависимость деформаций от перемещений — нелинейной. Перемещения представлены в виде разложения по функциям поперечной координаты, содержащим неизвестные параметры. Для получения разрешающих уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Рассмотрена методика минимизации функционала энергии. Приводится пример расчета трехслойной балки, проводится сравнение с точным решением, анализируются особенности предложенного подхода.

Уточненным теориям оболочек и пластин посвящено большое количество работ. При построении теорий используются разложения в ряды по различным системам функций, асимптотическое интегрирование, методы, основанные на ряде гипотез (обзоры по данным подходам можно найти во многих работах, например, в [1–5]). Широкое применение в технике многослойных тонкостенных элементов конструкций с неоднородными механическими свойствами по толщине привело к необходимости уточнения гипотез о распределении напряжений и деформаций в оболочках. Такие гипотезы вводятся как для всего пакета, так и для каждого слоя, поэтому порядок системы уравнений зависит от числа слоев. Одним из недостатков данного подхода является трудность оценки погрешности решения, а значит, и сравнения разных моделей оболочек. Однако в интегральном смысле это можно сделать, вычислив и сравнив полную потенциальную энергию для различных теорий.

В отличие от известных подходов в настоящей работе компоненты вектора перемещений ищутся в виде суммы произведений искомым функций. Это приводит к псевдогеометрической нелинейности задачи. Предложенный подход позволяет выбрать лучшую в отмеченном выше смысле гипотезу о распределении перемещений в многослойных оболочках.

**1.** Рассмотрим слоистую оболочку, состоящую из нелинейно-упругих слоев. Пусть имеется поверхность приведения с координатными осями  $x^1, x^2$ , по нормали к которой направлена ось  $x^3$ .

Компоненты вектора перемещений  $u_\beta$  в слое или пакете в целом ищутся в виде разложения по системе функций  $f_\beta^i(x^3)$ :

$$u_\beta = u_{\beta 0}(x^1, x^2) + \sum_{i=1}^I f_\beta^i(x^3) u_{\beta i}(x^1, x^2), \quad f_\beta^i(0) = 0, \quad \beta = 1, 2, 3. \quad (1)$$

В большинстве случаев, особенно для однородных оболочек, ограничиваются первыми двумя членами в рядах (1), причем  $f_\beta^i(x^3)$  представляют собой степенные функции

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00410).

переменной  $x^3$ . В некоторых работах применялись полиномы Лежандра. При исследовании слоистых оболочек в качестве  $f_\beta^i(x^3)$  часто используются составные функции, параметры которых априори определяются из условий жесткого контакта слоев, непрерывности поперечных касательных и нормальных напряжений. Однако поскольку относительно  $u_{\beta j}(x^1, x^2)$  задача обычно решается приближенно, то, вообще говоря, нет оснований для того, чтобы точно выполнялись уравнения равновесия на границах слоев. В настоящей работе функции  $f_\beta^i(x^3)$  задаются с точностью до некоторых констант  $C_{m\beta}$ , которые ищутся в процессе решения задачи. Предполагается, что эти функции удовлетворяют условиям непрерывности между слоями только по перемещениям.

Далее рассмотрим случай линейной аппроксимации  $f_\beta^i(x^3)$  в виде

$$f_\beta^i(x^3) = \sum_{m=1}^M C_{m\beta} f_\beta^{im}(x^3), \quad i = 1, \dots, I. \quad (2)$$

Для однозначного определения параметров  $C_{m\beta}$  и функций  $u_{\beta i}(x^1, x^2)$  на них должны быть наложены условия нормировки. Например, можно считать, что длина вектора  $\mathbf{C} = \{C_{1\beta}, \dots, C_{M\beta}\}$  равна единице:

$$C_{1\beta}^2 + C_{2\beta}^2 + \dots + C_{M\beta}^2 = 1. \quad (3)$$

Учет этого условия при выводе разрешающих уравнений для искомым неизвестных может осуществляться методом множителей Лагранжа.

К более простым выкладкам можно прийти, используя условие

$$C_{1\beta} = 1. \quad (4)$$

Перемещения представляются следующим образом:

$$u_\beta = u_{\beta 0}(x^1, x^2) + u_{\beta 1}(x^1, x^2)[f_\beta^{11}(x^3) + C_{2\beta} f_\beta^{12}(x^3) + \dots + C_{M\beta} f_\beta^{1M}(x^3)] + \\ + u_{\beta 2}(x^1, x^2)[f_\beta^{21}(x^3) + C_{2\beta} f_\beta^{22}(x^3) + \dots + C_{M\beta} f_\beta^{2M}(x^3)] + \dots$$

Здесь искомыми являются функции  $u_{\beta i}$  и параметры  $C_{m\beta}$ , а  $f_\beta^{ij}$  известны.

Если перемещения не малы, то выражения для деформаций имеют вид

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta,$$

где  $\nabla_\alpha$  обозначает ковариантное дифференцирование. Суммирование проводится по повторяющимся нижним и верхним греческим индексам.

Физические соотношения для нелинейно-упругого материала можно представить следующим образом:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial F(I_1, \dots, I_L)}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}.$$

Здесь  $F$  — упругий потенциал, зависящий от инвариантов  $I_1, \dots, I_L$  типа сверток компонент тензоров деформаций, метрического тензора, тензоров механических характеристик материала.

**2.** Уравнения для искомым функций  $u_{\beta i}$  и параметров  $C_{m\beta}$  можно получить на основе различных вариационных принципов. Для упрощения изложения используем принцип Лагранжа

$$\iiint_V \sigma^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV = \iiint_V q^\alpha \delta u_\alpha dV + \iint_S p^\alpha \delta u_\alpha dS. \quad (5)$$

Здесь  $V$  — объем, занимаемый оболочкой;  $q^\alpha$  — компоненты объемной силы;  $S$  — поверхность, на которой заданы внешние поверхностные силы  $p^\alpha$ .

Из (1), (2) следует, что относительно искомым неизвестных задача нелинейна даже в случае отсутствия физической и геометрической нелинейности, поэтому назовем рассматриваемый подход методом псевдогеометрической нелинейности. Для линеаризации задачи используем следующую процедуру. На шаге с номером  $n - 1$  функции  $u_{\beta i}^{(n-1)}$  и параметры  $C_{m\beta}^{(n-1)}$  считаем известными (здесь и далее номер итерации заключается в скобки). На следующем шаге искомые неизвестные представим в виде

$$u_{\beta i}^{(n)} = u_{\beta i}^{(n-1)} + \Delta u_{\beta i}, \quad C_{m\beta}^{(n)} = C_{m\beta}^{(n-1)} + \Delta C_{m\beta}, \quad i = 1, \dots, I, \quad m = 2, \dots, M, \quad (6)$$

где  $\Delta$  — приращение.

Уравнения для  $\Delta u_{\beta i}$  получим при  $\Delta C_{m\beta} = 0$ . Запишем соотношения для перемещений, деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(n-1)} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{(n)}^{\alpha\beta} = \sigma_{(n-1)}^{\alpha\beta} + E_{(n-1)}^{\alpha\beta\gamma\theta} \Delta\varepsilon_{\gamma\theta}. \quad (7)$$

Здесь

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n-1)} = \nabla_\alpha u_\beta^{(n-1)} + \nabla_\beta u_\alpha^{(n-1)} + \nabla_\alpha u_{(n-1)}^\gamma \nabla_\gamma u_\beta^{(n-1)},$$

$$2\Delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \Delta u_\beta + \nabla_\beta \Delta u_\alpha + \nabla_\alpha u_{(n-1)}^\gamma \nabla_\gamma \Delta u_\beta + \nabla_\alpha \Delta u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta^{(n-1)},$$

$$u_\beta^{(n-1)} = u_{\beta 0}^{(n-1)} + \sum_{i=1}^I u_{\beta i}^{(n-1)} \left[ \sum_{m=1}^M C_{m\beta}^{(n-1)} f_\beta^{im} \right], \quad \Delta u_\beta = \Delta u_{\beta 0} + \sum_{i=1}^I \Delta u_{\beta i} \left[ \sum_{m=1}^M C_{m\beta}^{(n-1)} f_\beta^{im} \right],$$

$$\sigma_{(n-1)}^{\alpha\beta} = \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad E_{(n-1)}^{\alpha\beta\gamma\theta} = \frac{\partial^2 F^{(n-1)}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial \varepsilon_{\gamma\theta}}.$$

Тогда из (5) относительно  $\Delta u_\beta$  следует вариационное уравнение

$$\iiint_V E_{(n-1)}^{\alpha\beta\gamma\theta} \Delta\varepsilon_{\gamma\theta} \delta \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} dV = - \iiint_V \sigma_{(n-1)}^{\alpha\beta} \delta \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} dV + \iiint_V q^\beta \delta \Delta u_\beta dV + \iint_S p^\beta \delta \Delta u_\beta dS. \quad (8)$$

Найдя отсюда  $\Delta u_{\beta i}$ , по формулам (7) можно вычислить функции  $\sigma_{(n)}^{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)}$ . Система уравнений относительно искомым параметров  $\Delta C_{m\beta}$  получается из (5), (6) при предположении, что  $\Delta u_{\beta i} = 0$  или функции  $u_{\beta i}^{(n)} = u_{\beta i}^{(n-1)} + \Delta u_{\beta i}$  известны. В последнем случае

$$u_\beta = u_{\beta 0}^{(n)}(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^I u_{\beta i}^{(n)}(x_1, x_2) \sum_{m=1}^M (C_{m\beta}^{(n-1)} + \Delta C_{m\beta}) f_\beta^{im}(x^3). \quad (9)$$

Используя условие нормировки (4), выражения для деформаций и напряжений запишем в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} + \sum_{m=2}^M e_{\alpha\beta}^m \Delta C_{m\beta},$$

$$\begin{aligned}
 2e_{\alpha\beta}^m &= \nabla_{\alpha} \left[ \sum_{i=1}^I f_{\beta}^{im} u_{\beta i}^{(n)} \right] + \nabla_{\beta} \left[ \sum_{i=1}^I f_{\alpha}^{im} u_{\alpha i}^{(n)} \right] + \\
 &+ \nabla_{\alpha} \left[ u_{\gamma 0}^{(n)} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=2}^M C_{j\beta}^{(n-1)} f_{\gamma}^{im} u_{\gamma i}^{(n)} \right] \nabla^{\gamma} \left[ \sum_{i=1}^I f_{\beta}^{im} u_{\beta i}^{(n)} \right] + \\
 &+ \nabla_{\alpha} \left[ \sum_{i=1}^I f_{\gamma}^{im} u_{\gamma i}^{(n)} \right] \nabla^{\gamma} \left[ u_{\beta 0}^{(n)} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=2}^M C_{j\beta}^{(n-1)} f_{\beta}^{im} u_{\beta i}^{(n)} \right], \\
 \sigma^{\alpha\beta} &= \sigma_{(n)}^{\alpha\beta} + E_{(n)}^{\alpha\beta\gamma\theta} \sum_{m=2}^M e_{\gamma\theta}^m \Delta C_{m\beta}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (5), получим уравнение для  $\Delta C_{m\beta}$

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \left[ \sigma_{(n)}^{\alpha\beta} + E_{(n)}^{\alpha\beta\gamma\theta} \sum_{m=2}^M e_{\gamma\theta}^m \Delta C_{m\beta} \right] \sum_{m=2}^M e_{\gamma\theta}^m \delta \Delta C_{m\beta} dV = \\
 = \iiint_V q^{\beta} \sum_{i=1}^I u_{\beta i}^{(n)} \sum_{m=2}^M f_{\beta}^{im} \delta \Delta C_{m\beta} dV + \iint_S p^{\beta} \sum_{i=1}^I u_{\beta i}^{(n)} \sum_{m=2}^M f_{\beta}^{im} \delta \Delta C_{m\beta} dS.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Итерационный процесс решения уравнений (8), (11) продолжается до тех пор, пока приращения  $\Delta C_{m\beta}$  и  $\Delta u_{\beta i}$  не станут малыми по некоторой норме.

Решение данным методом, вообще говоря, может и не сходиться, например, в том случае, если начальное приближение  $C_{m\beta}$  выбрано неудачно. С этой точки зрения в физически нелинейных, но геометрически линейных задачах методы минимизации потенциальной энергии упругой оболочки предпочтительнее сведения задачи к системе нелинейных уравнений (8)–(11). При геометрической нелинейности для получения начального значения для функций  $u_{\beta i}$  и параметров  $C_{m\beta}$  можно использовать пошаговый процесс по параметру продолжения (например, нагрузки). На первом шаге рассматривается геометрически линейная задача, для которой справедлива теорема о минимуме потенциальной энергии упругой системы, и методами теории оптимизации находятся  $C_{m\beta}$ . В качестве начального приближения допустимо использование и тех значений  $C_{m\beta}$ , которые можно получить из выражений для функций  $f_{\beta}^i$ , построенных другими методами [4, 5] из условий жесткого контакта слоев и непрерывности напряжений в трансверсальном направлении. На последующих шагах при решении системы (8)–(11) для сходимости процесса приращение параметра продолжения (нагрузки) необходимо брать не слишком большим. При расходимости возвращаются к предыдущему шагу и уменьшают приращение.

В случае геометрически нелинейной задачи вместо решения системы (8)–(11) можно также использовать методы оптимизации, сформулировав задачу минимизации функционала в терминах приращений  $\Delta C_{m\beta}$  при фиксированном  $u_{\beta i}^{(n)}$  и в терминах  $\Delta u_{\beta i}$  при фиксированном  $C_{m\beta}^{(n)}$ . Однако использование системы (8)–(11) предпочтительнее, так как на каждом шаге итерации при решении нелинейной задачи необходимо решать небольшую по размерности дополнительную систему уравнений (11) относительно  $\Delta C_{m\beta}$ .

Более удобным может оказаться подход, использующий комбинацию двух методик. Из системы уравнений (8) находятся  $\Delta u_{\beta i}$ , а параметры  $C_{m\beta}$  определяются из задачи

минимизации полной потенциальной энергии упругой системы  $\Pi$  (данный подход применен и при решении тестовой задачи). Выражение для  $\Pi$  имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV - \iiint_V q^\alpha u_\alpha dV - \iint_S p^\alpha u_\alpha dS.$$

Для решения задачи на минимум можно использовать известные алгоритмы теории оптимизации, в частности следующий. Для ряда значений  $C_{m\beta}$  проводится численный эксперимент, т. е. решается задача теории оболочек и вычисляются “экспериментальные” значения полной потенциальной энергии  $\Pi$ . С использованием регрессионного анализа по этим значениям  $\Pi$  строится функция регрессии  $\psi(C_{1\beta}, C_{2\beta}, \dots, C_{M\beta})$ , с помощью которой находятся значения параметров  $C_{m\beta}^*$ , минимизирующие функцию  $\psi$ . В новой окрестности  $C_{m\beta}^*$  вновь выбирается ряд значений  $C_{m\beta}$ , проводится численный эксперимент, строится новая функция регрессии  $\psi(C_{1\beta}, C_{2\beta}, \dots, C_{M\beta})$  и определяются минимизирующие ее значения параметров  $C_{m\beta}^*$  и т. д. При достаточном уменьшении окрестности значений  $C_{m\beta}^*$  получим с требуемой точностью искомые  $C_{m\beta}$ , минимизирующие полную потенциальную энергию  $\Pi$ .

**3.** Продемонстрируем предложенный подход на физически и геометрически линейной задаче об изгибе многослойной балки (единичной ширины, высоты  $2H$ , длины  $l$  под синусоидальной нагрузкой) с граничными условиями типа Навье (аналог шарнирного опирания), имеющей точное решение [6, 7]. Задача решалась способами, описанными выше. При использовании (3) вместо двух неизвестных  $C_{1\beta}, C_{2\beta}$  можно ввести одну, удовлетворяющую условию (3):  $C_{1\beta} = \sin \varphi_\beta, C_{2\beta} = \cos \varphi_\beta$ . Для условия (4) искомой неизвестной является только  $C_{2\beta}$ , так как  $C_{1\beta} = 1$ .

Примем простейшую аппроксимацию (1):  $u_1 = f_1^1(x^3)u_{11}(x^1) = [C_{11}f_1^{11}(x^3) + C_{21}f_1^{12}(x^3)]u_{11}(x^1)$ ,  $u_3 = f_{30}(x^1)$ , где  $f_1^{11} = x^3$ . Введем следующие обозначения:  $x = x^1$ ,  $z = x^3$ ,  $f(z) = f_1^{12}(x^3)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ ,  $\gamma = \varepsilon_{13}$ ,  $\sigma = \sigma^{11}$ ,  $\tau = \sigma^{13}$ ,  $u_{11}(x^1) = Uu(x)$ ,  $f_{30}(x^1) = Ww(x)$ ,  $C_1 = C_{11}$ ,  $C_2 = C_{21}$ ,  $\varphi = \varphi_1$ ,  $G = G_{13}$  — модуль сдвига,  $E = E_{11}$  — модуль Юнга, штрих обозначает дифференцирование. Тогда

$$u_1 = [C_1 z + C_2 f(z)]Uu(x), \quad u_3 = Ww(x), \quad (12)$$

где  $U, W, C_1, C_2$  — искомые константы. Выражения для деформаций и напряжений имеют вид  $\varepsilon = Uu'_x[C_1 z + C_2 f(z)]$ ,  $\gamma = Uu[C_1 + C_2 f'_z(z)] + Ww'_x$ ,  $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\tau = G\gamma$ .

В расчетах принималось, что пакет имеет симметричное строение, а нагрузка — только нормальную составляющую  $q = (q_0/2) \sin(\pi x/l)$ , приложенную на верхней и нижней поверхностях балки. В (12) можно принять  $u = \cos(\pi x/l)$ ,  $w = \sin(\pi x/l)$ .

Для упрощения задачи учтем, что в физически линейном случае в уравнении (8) можно перейти от задачи в приращениях к задаче в полных перемещениях, так как  $\sigma_{(n)}^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\theta} \varepsilon_{\gamma\theta}^{(n)}$ ,  $\delta\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)} = \delta(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n-1)} + \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}) = \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)}$ ,  $\delta\Delta u_\alpha = \delta u_\alpha^{(n)}$ .

Из (8), (11) следует система уравнений относительно  $U^{(n)}, W^{(n)}, \Delta\varphi$  или  $\Delta C_2$ . Опуская индексы  $(n)$  у  $U^{(n)}, W^{(n)}$  и  $(n-1)$  у  $\varphi^{(n-1)}$  или  $C_2^{(n-1)}$ , запишем ее в виде

$$\int_0^l \int_{-H}^H \{U(C_1 z + C_2 f)^2 (u'_x)^2 E + G[Ww'_x + Uu(C_1 + C_2 f'_z)](C_1 + C_2 f'_z)u\} dx dz = 0,$$

$$\int_0^l \int_{-H}^H \{G[Ww'_x + Uu(C_1 + C_2 f'_z)]w'_x\} dx dz = \int_0^l 2qw dx, \quad (13)$$

$$\int_0^l \int_{-H}^H \{U^2 E[C_1 z + C_2 f + \Delta C_1 z + \Delta C_2 f](u'_x)^2 f + WUGuw'_x f'_z + U^2 G[C_1 + C_2 f'_z + \Delta C_1 + \Delta C_2 f'_z] f'_z u^2\} dx dz = 0.$$

Здесь  $C_1 = \sin \varphi$ ,  $\Delta C_1 = \cos \varphi \Delta \varphi$ ,  $C_2 = \cos \varphi$ ,  $\Delta C_2 = -\sin \varphi \Delta \varphi$  в случае условия нормировки вида (3) и  $\Delta C_1 = 0$  при использовании условия (4).

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = \int_{-H}^H G(z)[C_1 z + C_2 f'_z(z)] dz,$$

$$J_2 = \int_{-H}^H E(z)[C_1 z + C_2 f(z)]^2 dz, \quad J_3 = \int_{-H}^H G(z)[C_1 z + C_2 f'_z(z)]^2 dz,$$

$$J_4 = \int_{-H}^H E(z)[f'_z(z)]^2 dz, \quad J_5 = \int_{-H}^H G(z)[f'_z(z)]^2 dz, \quad J_6 = \int_{-H}^H G(z) dz,$$

$$J_7 = \int_{-H}^H E(z) z f(z) dz, \quad J_8 = \int_{-H}^H G(z) f'_z(z) dz, \quad J_9 = \int_{-H}^H E(z) f^2(z) dz.$$

С учетом (14) из (13) получим решение в виде

$$U = q_0 l J_2 / a, \quad a = \pi(J_2^2 - \pi^2 J_1 J_2 / l^2 - J_3 J_6), \quad W = -q_0(\pi^2 J_1 + l^2 J_3) / (\pi a),$$

$$\Delta \varphi = \frac{J_8(\pi^2 J_1 + l^2 J_3) / J_2 - (C_1 J_7 + C_2 J_9)\pi^2 - (C_1 J_8 + C_2 J_5)l^2}{(C_2 J_7 - C_1 J_9)\pi^2 + (C_2 J_8 - C_1 J_5)l^2};$$

$$\Delta C_2 = [(\pi^2 J_1 + l^2 J_3)J_5 - \pi^2 J_2(J_7 + C_2 J_4) - l^2 J_2(J_8 + C_2 J_5)] / [(\pi^2 J_4 + l^2 J_5)J_2].$$

Из (15) следует, что в этой задаче итерациями можно найти  $C_2$  или  $\varphi$  независимо от  $U$ ,  $W$ .

Ниже приведены численные результаты для задачи о трехслойной балке из [6]. Полагалось, что  $h_1 = h_3 = h_2/2 = h = H/2$  (индексы 1, 2, 3 — номер слоя начиная снизу),  $4H = l$ ,  $E_1/E_2 = E_3/E_2 = 500$ ,  $G_1/G_2 = G_3/G_2 = 500$ ,  $G_i = E_i/2,6$ . В качестве  $f(z)$  принята функция

$$f = \begin{cases} z - h, & h \leq z \leq H, \\ 0, & -h \leq z \leq h, \\ z + h, & -H \leq z \leq -h. \end{cases}$$

В силу симметрии для уменьшения количества неизвестных  $C_{m\beta}$  функция  $f(z)$  выбрана так, что она определяет закон изменения перемещений в группе из двух наружных слоев. Тогда интегралы (14) при условии (4) имеют значения

$$J_1 = 2h^3[E^2 + 7E_1 + 5C_2 E_1 + C_2^2 E_1]/3, \quad J_2 = 2h[G_2 + G_1(1 + C_2)], \quad J_3 = 2h[G_2 + G_1 C_2^2],$$

$$J_4 = 2h^3 E_1/3, \quad J_5 = 2h G_1, \quad J_6 = 2h[G_2 + G_1], \quad J_7 = 5J_4/2, \quad J_8 = J_5.$$

В данной задаче можно найти  $C_2$ , решив итерациями уравнение (16) или сведя его к квадратному уравнению относительно  $C_2$ , положив в (16)  $\Delta C_2 = 0$ . В результате расчетов

Решение	$u_1 E_1 / (2q_0 H)$	$u_3 E_1 / (2q_0 H)$	$\sigma^{11} / q_0$
Точное	11,015	57,10	17,40
(15), (16)	11,044 (0,26)	57,32 (0,38)	17,35 (0,29)
[6]	10,455 (3,9)	54,8 (4,4)	17,55 (0,68)

Примечание. В скобках указана погрешность  $\Delta$ , %.

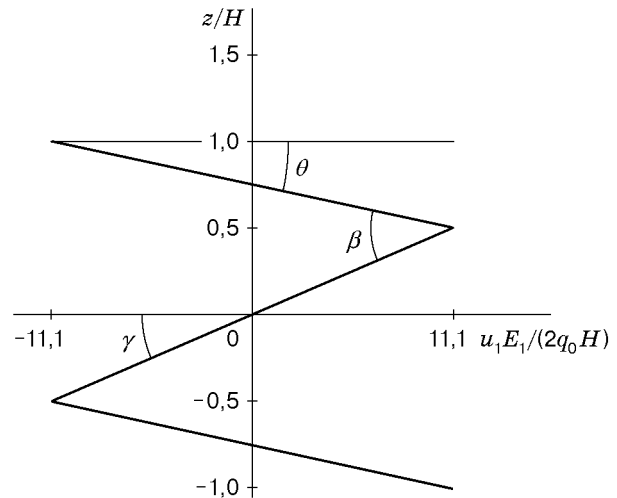


Рис. 1

получено  $C_2 = -3,032$ . В таблице приведены безразмерные значения перемещений  $u_1$  в угловой точке, перемещений  $u_3$  в центре балки, максимального напряжения  $\sigma^{11}$ . В 1-й строке даны точные значения, которые можно получить из [6], во 2-й — результаты вычислений по формулам (15), (16), в 3-й — результаты вычислений из [6]. При минимизации полной потенциальной энергии системы в этой задаче с одной неизвестной  $\varphi$  (или  $C_2$ ) можно применять простые методы. В этой задаче метод деления отрезка пополам оказался предпочтительнее метода квадратичной аппроксимации функции П.

Для получения непрерывного распределения по толщине балки поперечных касательных напряжений можно использовать способ интегрирования уравнения равновесия  $\partial\sigma/\partial x + \partial\tau/\partial z = 0$  при условии, что  $\sigma(x, z)$  известно. Поскольку при вычислениях для поперечного сдвига использовалась грубая аппроксимация в виде кусочно-постоянной функции по аргументу  $z$ , точность вычисления  $\tau$  будет невысокой. Например, в первом и третьем слоях получаем  $\tau_{\max}/q_0 = 1,73$ , в то время как точное значение равно 2,71 [6].

На рис. 1 приведена эпюра тангенциальных перемещений  $u_1 E_1 / (2q_0 H)$  при  $x = 0$ . Угол излома  $\pi - \beta$  можно выразить через  $C_1, C_2$  следующим образом:

$$\pi - \beta = \pi - \theta - \gamma = \pi - \arctg(k(C_1 + C_2)) - \arctg(kC_1), \quad k = U E_1 / (2q_0 H),$$

где  $C_1 = 1$  или  $C_1 = \sin \varphi$ ,  $C_2 = \cos \varphi$  при условии (4). Таким образом,  $C_2$  или  $\varphi$  определяют степень излома нормали.

Результаты численных экспериментов выявили следующие особенности рассматриваемой задачи.

1. Сходимость метода зависит как от начального приближения для параметров  $C_2$  или  $\varphi$ , так и от механических характеристик слоев. На рис. 2 приведены качественные зависимости  $4\Pi/(E_1 l^3)$  от параметра  $\varphi$ . Кривая 1 соответствует случаю изотропии ( $E_1 = E_2$ ,  $G_1 = G_2$ , значение  $\Pi$  увеличено в 10 раз), кривая 2 — рассмотренному выше случаю. Из рис. 2 следует, что при априорном задании  $\varphi$  без дальнейшего его уточнения для слоистой оболочки, изготовленной из материалов с различными механическими характеристиками, небольшие изменения в значениях  $\varphi$  (малые вариации распределения перемещений) могут приводить к значениям  $\Pi$ , сильно отличающимся от  $\Pi_{\min}$ . Для изотропной балки, наоборот, даже большие погрешности в задании распределения перемещений по толщине не приводят к существенным погрешностям при определении напряжений и перемещений.

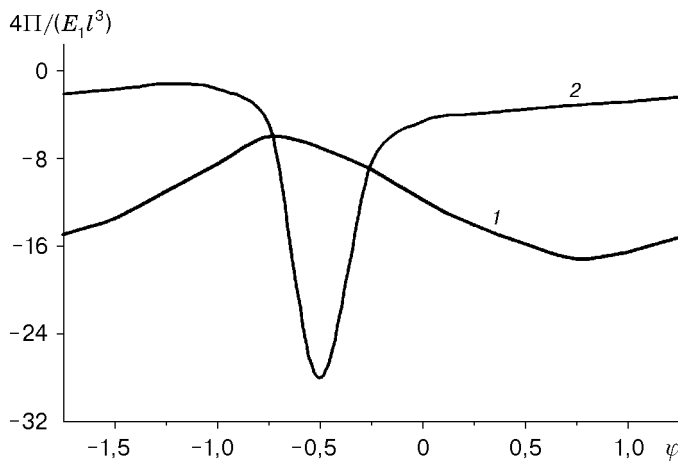


Рис. 2

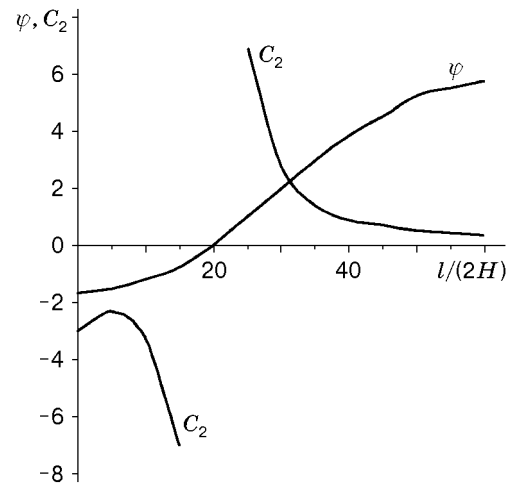


Рис. 3

При использовании системы (8)–(11) при неудачном выборе начального значения  $\varphi$  можно получить не  $\Pi_{\min}$ , а  $\Pi_{\max}$ .

2. Использование условия (4) может привести к тому, что некоторые из неизвестных  $C_2, \dots, C_M$ , рассматриваемые как функции каких-либо параметров (например, относительной толщины), могут иметь разрывы второго рода. На рис. 3 представлены зависимости  $\varphi(l/(2H))$  и  $C_2(l/(2H))$  при принятых выше значениях упругих констант. Разрыв второго рода функции  $C_2$  объясняется тем, что в рассматриваемой задаче вклад функции  $f_1^{11} = z$  в  $f_1^1$  можно уменьшить, только увеличивая  $|C_2|$ . На значения  $u_1, u_3, \sigma, \varepsilon$  разрыв не влияет. Однако для исключения подобных разрывов необходимо выбирать  $f_j^{ik}$  такими, чтобы они позволяли получать более широкий класс функций  $f_j^i$ . В рассматриваемой задаче функцию  $f(z)$  достаточно принять в виде

$$f(z) = \begin{cases} a(z - h) + h, & z \geq h, \\ z, & -h \geq z \geq h, \\ a(z + h) - h, & -h \geq z, \end{cases}$$

где  $a \neq 1$ .

Другой путь заключается в использовании условия (3), но он приводит к усложнению задачи, за исключением варианта  $M = 2$ .

Отметим, что аналогичный анализ можно провести для случаев с использованием смешанных функционалов типа Рейсснера.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.
2. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций: Обзор // Механика композит. материалов. 1998. Т. 34, № 6. С. 333–348.
3. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композит. материалов. 1988. № 2. С. 287–298.
4. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–68. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 15).



5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. О некоторых подходах к решению задач статики оболочек неоднородной структуры // Прикл. механика. 1998. Т. 34, № 10. С. 42–49.
6. Присяжнюк В. К., Зайвелев И. Б. К решению плоской задачи теории упругости для многослойного ортотропного композита // Механика композит. материалов. 1991. № 2. С. 206–214.
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.

*Поступила в редакцию 17/V 1999 г.,  
в окончательном варианте — 30/IX 1999 г.*

---