

УДК 533.2

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В СФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Р. И. Нигматулин, И. Ш. Ахатов, Н. К. Вахитова

Уфимский научный центр РАН, 450000 Уфа

Рассматривается сферически-симметричная задача о колебаниях одиночного газового пузырька в центре сферической колбы, заполненной сжимаемой жидкостью, под действием колебаний давления на стенке колбы. Получена система дифференциально-разностных уравнений, обобщающая уравнение Рэлея — Плессета на случай сжимаемой жидкости и учитывающая отражение волн давления от пузырька и стенки колбы. Проведен линейный анализ решений данной системы в случае гармонических колебаний пузырька. Проанализированы нелинейные резонансные и близкие к резонансным негармонические колебания пузырька, вызванные гармоническими колебаниями давления на стенке колбы. Исследовано влияние процесса теплопереноса на колебания пузырька.

**Введение.** Рассмотрим сферически-симметричное радиальное движение сжимаемой жидкости в сферической колбе радиуса  $R$  вокруг сферического газового пузырька, расположенного в центре колбы.

Если возмущения давления не слишком велики, так что изменением плотности жидкости можно пренебречь, а длина волны давления в жидкости много больше радиуса пузырька, то для математического моделирования колебаний пузырька обычно применяется приближение несжимаемой жидкости. При этом уравнение движения жидкости вокруг пузырька сводится к известному уравнению Рэлея — Плессета [1–3]

$$a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} w_a^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho}, \quad w_a = \frac{da}{dt}, \quad p_a = p_g(a) - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu w_a}{a}, \quad (1)$$

где  $a$  — радиус пузырька;  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  — плотность, вязкость и коэффициент поверхностного натяжения жидкости;  $w_a$  и  $p_a$  — радиальная скорость и давление в жидкости на поверхности пузырька;  $p_g$  — давление газа в пузырьке;  $p_\infty$  — давление в жидкости вдали от пузырька.

Влияние сжимаемости жидкости на колебания пузырька учитывалось ранее введением так называемых потерь на акустическое излучение [2, 3], что приводило к уравнению Херринга — Гилмора

$$a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} w_a^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho} + \frac{a}{\rho c} \frac{d(p_a - p_\infty)}{dt} \quad (2)$$

( $c$  — скорость звука в жидкости).

Подробный анализ динамики кавитационных пузырьков в ультразвуковом поле в случае как несжимаемой, так и сжимаемой жидкости проведен в [4, 5]. Приближенная теория радиальных колебаний сферического пузырька в бесконечной слабосжимаемой жидкости под воздействием акустического поля развита также в работах [6, 7]. Получено семейство уравнений, включающее уравнение (2) и другие уравнения из [2, 3] как частные случаи. Показано, что все эти уравнения эквивалентны, так как обладают одним и тем же порядком точности по числу Маха в жидкости. При их выводе предполагалось, что колебания пузырька не оказывают влияния на давление в акустическом поле на бесконечности.

Действительно, тот факт, что жидкость безгранична, позволяет рассматривать задачу о колебаниях пузырька независимо от акустической задачи в жидкости.

В настоящей работе исследуется связанная задача о колебаниях ограниченного объема жидкости и газового пузырька, при этом стенка колбы служит источником возбуждения колебаний жидкости. Показано, что колебания пузырька описываются уравнением типа Херринга — Гилмора, в котором внешнее давление (вне пузырька) связано дифференциально-разностным уравнением с изменением радиуса пузырька и давлением, задаваемым на стенке колбы. Это внешнее давление отличается как от давления на локальной бесконечности ( $p_\infty$  в уравнении (2)), так и от давления на стенке колбы  $p_R$ .

**Система уравнений для радиуса пузырька.** В случае малых чисел Маха ( $M_a = w_a/c \ll 1$ ) пространство между поверхностью пузырька и стенкой колбы можно разбить на три зоны:

1. Внешняя зона, где слабая сжимаемость жидкости существенна, но нелинейные силы инерции, возникающие из-за конвективных ускорений, пренебрежимо малы. В этой зоне движение жидкости имеет волновой характер и характеризуется конечной постоянной скоростью распространения возмущений.

2. Внутренняя зона (вблизи поверхности пузырька), где сжимаемость жидкости пренебрежимо мала. В этой зоне нелинейные силы инерции, возникающие из-за конвективных ускорений, существенны и движение жидкости происходит только вследствие сжатия и расширения пузырька.

3. Промежуточная зона, где сжимаемость жидкости и нелинейные силы инерции достаточно велики.

Для того чтобы получить уравнение для колебаний радиуса пузырька, необходимо осуществить сращивание в промежуточной зоне асимптотических решений из внешней и внутренней зон, используя условия непрерывности потока и давления. Искомое уравнение колебаний пузырька в сжимаемой жидкости в длинноволновом приближении имеет вид [8, 9]

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{p_a - p_0}{\rho} + \frac{1}{c} [2\ddot{\psi}_2(t) + \ddot{Q}(t)], \quad Q(t) = a^2\dot{a}, \quad (3)$$

где  $\psi_2$  — умноженная на радиальную координату  $r$  часть потенциала скорости жидкости, которая описывает волну, распространяющуюся от стенки колбы к пузырьку;  $p_0$  — начальное давление в колбе. Давление на стенке колбы связано с  $\psi_2$  уравнением

$$p_R(t) = p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \dot{\psi}_2 \left( t + \frac{R}{c} \right) - \dot{\psi}_2 \left( t - \frac{R}{c} \right) - \dot{Q} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (4)$$

где  $R$  — радиус колбы.

Из уравнения (3) следует выражение для давления  $p_\infty$ , которое представляет собой давление вдали от пузырька (на локальной бесконечности) в уравнении (1):

$$p_\infty = p_0 - \frac{\rho}{c} [2\ddot{\psi}_2(t) + \ddot{Q}(t)].$$

Существенно, что решение зависит от третьей производной радиуса пузырька, как отмечено в [6]. Однако для малых чисел Маха в длинноволновом приближении для слагаемого  $\ddot{Q}/c$ , определяющего влияние пузырька на отраженную волну, можно использовать асимптотическое представление без третьей производной. При этом эволюция радиуса описывается уравнением вида

$$\left( 1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) a\ddot{a} + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\dot{a}}{3c} \right) \dot{a}^2 = \left( 1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \frac{p_a - p_I}{\rho} + \frac{a}{c} \frac{d}{dt} \left[ \frac{p_a - p_I}{\rho} \right], \quad (5)$$

где  $p_I = p_0 - (2\rho/c)\ddot{\psi}_2$ . Система обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (4), (5), содержащая запаздывающие и опережающие потенциалы, замкнута при заданных плотности  $\rho$ , скорости звука  $c$ , поверхностном натяжении  $\sigma$  и вязкости  $\mu$  жидкости, уравнении состояния газа в пузырьке  $p_g(a)$ , а также давлении жидкости на стенке колбы  $p_R(t)$ .

Отметим, что сверхсжатие газа и его свечение (сонолюминесценция) могут иметь место во время коллапса пузырька, когда приближение несжимаемости жидкости в пограничном слое около пузырька несправедливо. Тем не менее пузырьковый коллапс происходит в течение очень малой части периода колебания пузырька. На этом интервале времени необходимо принимать во внимание сжимаемость жидкости около стенки пузырька, образование и распространение ударных волн в жидкости и газе [10].

**Прямая задача.** Рассмотрим задачу об эволюции радиуса пузырька  $a(t)$ , когда задано изменение давления жидкости на стенке колбы  $p_R(t)$ .

В общем случае решение прямой задачи может быть получено численным интегрированием уравнений в частных производных, описывающих движение и сжатие жидкости и газа, как это сделано в работе [10]. В [10] задача решалась при условии, что давление на стенке колбы изменялось по гармоническому закону

$$p_R(t) = \begin{cases} p_0, & t \leq 0, \\ p_0 - \Delta p_R \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Такой расчет требует больших вычислительных мощностей. Из-за длительности численного расчета эволюция радиуса была определена только для первого периода колебаний внешнего поля давления, а не для периодического режима, который имеет место после очень многих периодов колебаний.

На рис. 1 представлены результаты расчетов эволюции радиуса газового пузырька ( $a_0 = 10$  мкм) в колбе ( $R = 5$  см), заполненной водой (начальные условия  $p_0 = 1$  бар,  $T_0 = 300$  К), при изменении давления на стенке колбы по гармоническому закону (6) с амплитудой  $\Delta p_R = 0,25$  бар и частотой  $f = 45$  кГц ( $\omega = 2\pi f$ ). Первое колебание согласуется с результатом расчета, приведенным в работе [10] (пунктирная линия). Однако расчет дальнейшей эволюции радиуса пузырька показывает, что второе колебание существенно отличается от первого, третье — от второго, и только после многих колебаний ( $t \gg \omega^{-1}$ )

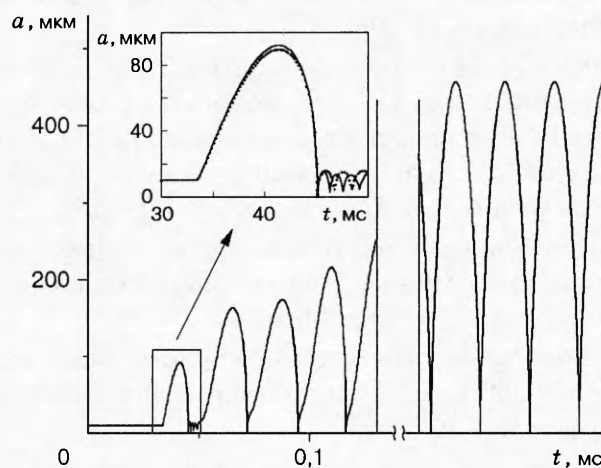


Рис. 1

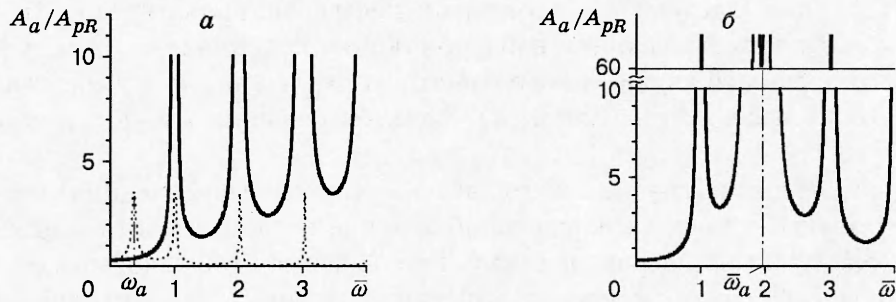


Рис. 2

реализуется периодический режим. Долгий период установления связан с большой инерцией жидкости в колбе. Именно масса жидкости ( $\sim \rho R^3$ ) задерживает реализацию периодического режима изменения давления около пузырька (на локальной бесконечности)  $p_\infty$ . Задержка периодического режима колебаний пузырька после установления его для  $p_\infty$  много меньше, так как она определяется присоединенной массой жидкости вокруг пузырька ( $\sim \rho a^3 \ll \rho R^3$ ).

Отметим, что именно периодический режим и наблюдается в экспериментах по сонолюминесценции [11], поэтому важно и интересно рассмотреть решения, описывающие периодические режимы колебаний.

**Вынужденные линейные колебания.** Задача обладает двумя характерными частотами: частотой колбового резонанса  $\omega_R = \pi c/R$ , определяемой временем распространения акустических волн  $t_R = 2R/c$  на расстояние  $2R$  от стенки колбы до ее центра и обратно, и собственной частотой свободных колебаний пузырька (частотой Миннаерта)  $\omega_a = \sqrt{3\gamma p_0/x_0^2 \rho}$ .

Рассмотрим малые вынужденные гармонические колебания вида  $A \exp(i\omega t)$  с круговой частотой  $\omega$ . Тогда функция отклика, вычисляемая как отношение относительной амплитуды колебаний радиуса пузырька  $A_a = \Delta a/a_0$  к относительной амплитуде колебаний вынуждающего давления  $A_{pR} = \Delta p_R/p_0$ , может быть представлена как функция безразмерной частоты  $\bar{\omega} = \omega(R/\pi c)$ . На рис. 2 приведена амплитудно-частотная характеристика гармонических колебаний пузырька в колбе радиуса 5 см, заполненной водой ( $a - a_0 = 10$  мкм,  $\omega_a = 2,16 \cdot 10^6$  с $^{-1}$  (сплошная линия);  $a_0 = 500$  мкм,  $\omega_a = 41,03 \cdot 10^3$  с $^{-1}$  (штриховая);  $b - a_0 = 100$  мкм,  $\omega_a = 2,06 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ ).

Как и следовало ожидать, резонанс для абсолютной величины функции отклика  $|A_a/A_{pR}|$  наблюдается при  $\bar{\omega} \approx 1, 2, 3, \dots$ . Это колбовый резонанс:  $\omega_k = 2\pi f_k = k\pi c/R = k\omega_R$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , и, когда пузырек достаточно мал, он не может существенно изменить значение резонансных частот. Так, для колбы радиуса  $R = 5$  см, заполненной водой, первая резонансная частота равна  $f_1 \approx 15$  кГц ( $\omega_1 = 94,2 \cdot 10^3$  с $^{-1}$ ).

Влияние пузырька на резонансные частоты заметно только тогда, когда частота возбуждения стенки колбы сравнима с миннаертговской частотой колебаний пузырька  $\omega_a$  (кривые на рис. 2, рассчитанные для  $a_0 = 100; 500$  мкм).

Интересно, что чем меньше пузырек, тем больше отклик  $|A_a/A_{pR}|$  (ср. кривые на рис. 2 для  $a_0 = 10$  мкм и  $a_0 = 500$  мкм). Это подтверждается сонолюминесценцией только очень мелких пузырьков ( $a_0 = 4 \div 10$  мкм).

Для вынужденных колебаний с частотами, близкими к резонансным, необходим нелинейный анализ, когда имеет место негармонический отклик радиуса пузырька большой амплитуды на внешнее воздействие  $\Delta a \sim a$ , что возможно даже для малых синусоидаль-

ных колебаний давления на стенке колбы  $\Delta p_R \ll p_0$ .

**Нелинейный анализ для резонансных частот.** Получены нелинейные периодические решения для колбового резонанса  $\omega = \omega_k = k\pi c/R$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Для периодического режима, вызванного синусоидальными колебаниями давления на стенке колбы  $p_R(t) = p_0 - \Delta p_R \sin(\omega_k t)$ , нелинейное периодическое решение имеет вид

$$a^3 = a_*^3 \left\{ 1 + c_* + \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{c} \right) \right] \right\}, \quad a_*^3 = \frac{3R^3 A_{pR} p_0}{\pi^2 k^2 \rho c^2}, \quad 0 < c_* \ll 1, \quad a_{\max}^3 \approx 2a_*^3. \quad (7)$$

Данное решение должно трактоваться как идеальный периодический режим, поскольку оно получено для предельного случая идеальной слабосжимаемой жидкости и несжимаемого пограничного слоя вокруг пузырька, что предполагает отсутствие каких-либо диссипативных механизмов.

Точное значение постоянной интегрирования  $c_*$  определяется численно из условия, что скорость стенки колбы и ее перемещение также периодические. В решении присутствует важный параметр  $a_*$ , определяющий максимальное значение радиуса пузырька  $a_{\max}$ , которое практически не зависит от начального радиуса  $a_0$  для идеального резонансного режима. Для того чтобы реализовать коллапс пузырька и сонолюминесценцию в резонансном режиме, необходимо выполнение условия  $a_{\min} \ll a_0 \ll a_{\max} \sim a_*$ . Однако следует учитывать, что минимальное значение радиуса пузырька  $a_{\min}$  нельзя рассматривать как физически реализуемое, так как во время сильного сжатия число Маха нельзя считать малым.

Идеальный периодический резонансный режим, показанный на рис. 1 справа, соответствует третьему колбовому резонансу  $f = f_3 = 45$  кГц, при этом максимальное значение радиуса  $a_{\max} = 454$  мкм, что согласуется с уравнением (7).

Для малых отклонений от резонансных частот  $\omega = \omega_k + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega_k$  ( $\omega_k = \pi k c/R$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) колебания радиуса пузырька под действием периодического возмущения описываются уравнением

$$\left( 1 - \frac{a\omega_k}{R\Delta\omega} \right) a\ddot{a} + \left( \frac{3}{2} - 2 \frac{a\omega_k}{R\Delta\omega} \right) \dot{a}^2 = \frac{p_a - p_0}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \Delta p_R \left( t + \frac{R}{c} \right) + \frac{a}{\rho c} \frac{d}{dt} \left[ p_a - p_0 - \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \Delta p_R \left( t + \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь присутствует важный безразмерный параметр, определяющий колебания пузырька в близком к резонансному режиме

$$A_* = \frac{a_0 \omega_k}{R \Delta\omega},$$

который представляет собой произведение малого  $a_0/R$  и большого  $\omega_k/\Delta\omega$  параметров. Уравнение (8) получено в предположении  $A_* \ll 1$ . В этом случае, в отличие от резонансного ( $\Delta\omega = 0$ ), давление в пузырьке определяет его колебания. При  $\Delta\omega \rightarrow 0$  ( $A_* \rightarrow \infty$ ) уравнение (8) сводится к уравнению (7) для резонансного случая.

На рис. 3 приведены результаты расчетов характерного околорезонансного режима колебаний пузырька ( $a_0 = 4$  мкм) в колбе ( $R = 5$  см), заполненной водой ( $p_0 = 1$  бар,  $T_0 = 300$  К), при изменении давления на стенке колбы по гармоническому закону (6) с амплитудой  $\Delta p_R = 0,15$  бар и частотой  $f = 26,5$  кГц. Справа сплошной линией показан идеальный периодический режим, который соответствует близкому к резонансному случаю ( $f \approx f_2$ ,  $\Delta f = -3,5$  кГц,  $\Delta\omega = -22 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>). Колебания с большей амплитудой соответствуют идеальному резонансному режиму (штриховая линия).

Кривые 1–3 на рис. 4 представляют зависимость  $a_{\min}$  и  $a_{\max}$  от сдвига частоты от частоты третьего колбового резонанса для  $a_0 = 4$  мкм при  $\Delta p_R = 0,001; 0,01; 0,02$  бар соответственно. Резонансный случай ( $\Delta\omega = 0$ ) отмечен точками. Вблизи резонансной частоты

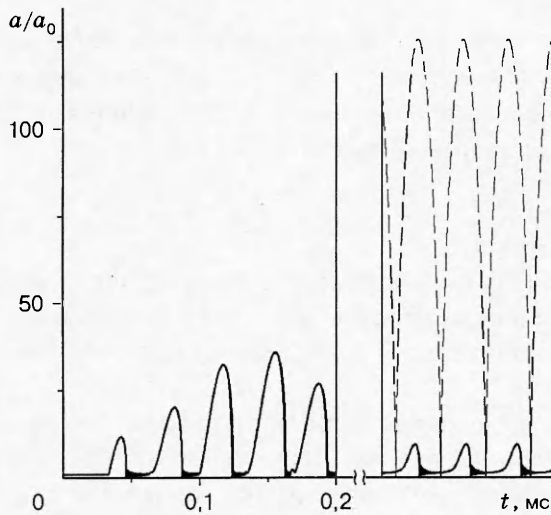


Рис. 3

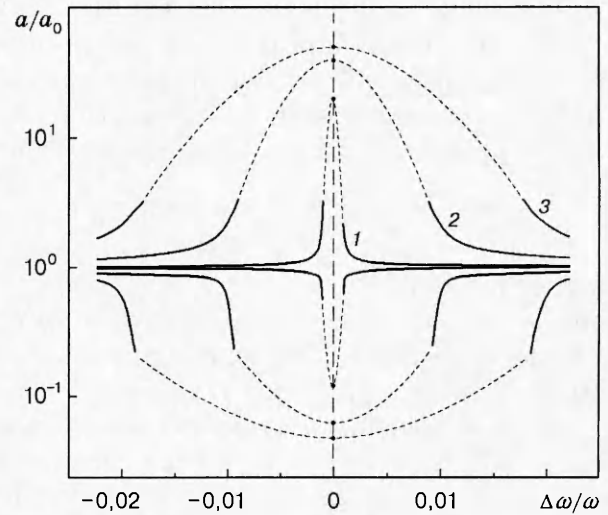


Рис. 4

кривые даны пунктирными линиями, так как уравнение (8) в этой области перестает быть справедливым.

**Эффекты теплопереноса.** Процессы теплопереноса внутри пузырька и теплообмен между пузырьком и жидкостью могут играть важную роль при колебаниях газового пузырька. Для детального анализа этих процессов используем модель, предложенную в [12] (см. также [3]). Она основана на следующих приближениях: 1) давление газа в пузырьке  $p_g$  является пространственно однородным и зависит только от времени (гомобаричность); 2) температура жидкости незначительно отличается от своего значения в невозмущенном состоянии  $T_0$ . Тогда для определения давления газа в пузырьке привлекается уравнение

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g \dot{a}}{a} + \frac{3(\gamma - 1)}{a} \lambda_g \left. \frac{\partial T_g}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad (9)$$

в котором тепловой поток на поверхности пузырька определяется из решения внутренней тепловой задачи:

$$c_{pg} \rho_g \left( \frac{\partial T_g}{\partial t} + w_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_g r^2 \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) + \frac{dp_g}{dt}, \quad w_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_g} \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} - \frac{r}{3\gamma p_g} \frac{dp_g}{dt},$$

$$p_g = c_{pg} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_g T_g, \quad T_g \Big|_{r=a} = T_0, \quad \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $c_{pg}$ ,  $\lambda_g$ ,  $\gamma$ ,  $\rho_g$  — удельная теплоемкость (при постоянном давлении), коэффициент теплопроводности, коэффициент Пуассона и плотность газа.

Система уравнений (9), (10) решалась численно совместно с уравнениями (5) для радиуса, где  $p_a = p_g - 2\sigma/a$ . Чтобы не решать задачу в полной постановке и не привлекать связь между  $p_R$  и  $p_I$ , внешнее давление для упрощения бралось в виде  $p_I = p_0 - \Delta p_I \sin(\omega t)$ .

Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (5), (9) был выбран метод Рунге — Кутты пятого порядка точности, а для распределения температуры внутри пузырька — неявная схема второго порядка по времени и пространству.

На рис. 5 показаны результаты расчета для аргонового пузырька радиуса 10 мкм, колеблющегося под действием давления  $p_I$  с частотой 21 кГц и амплитудой 1,5 бар, для одного периода колебаний этого давления ( $t_f = 2\pi/\omega$ ). На рис. 5,а видно, что в течение основной части периода, соответствующей расширению пузырька, пузырек остается

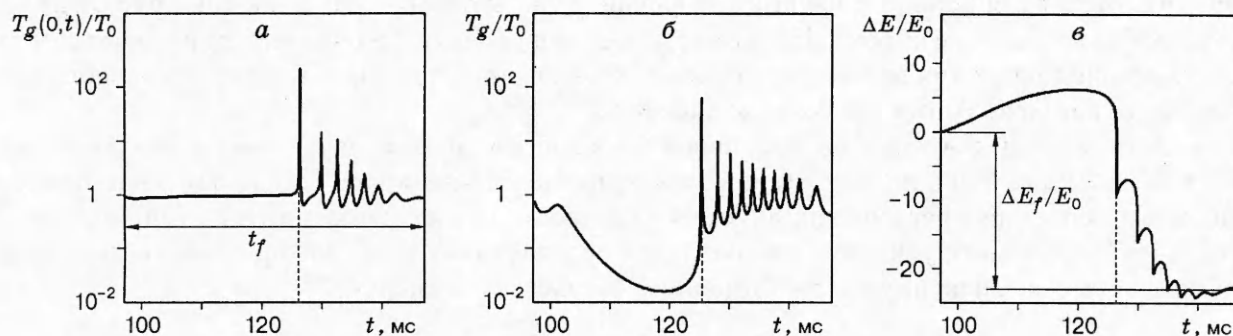


Рис. 5

изотермическим ( $T_g(0, t) \approx T_0$ ). При адиабатическом расширении газового пузырька при прочих равных условиях (рис. 5, б) температура в пузырьке достигала бы крайне малых значений ( $\sim 5$  К). При сжатии максимальная температура в центре пузырька намного выше ( $\sim 68\,000$  К), чем в адиабатическом случае ( $\sim 18\,000$  К). Для пояснения этого явления на рис. 5, в представлен суммарный тепловой поток от жидкости к пузырьку

$$\Delta E = \int_0^t 4\pi a^2 \lambda_g (\partial T / \partial r)_a dt,$$

отнесенный к внутренней энергии невозмущенного пузырька

$E_0 = (4/3)\pi a_0^3 \rho_{g0} c_{gv} T_0$ . Видно, что во время расширения пузырек забирает значительное количество энергии из окружающей его жидкости (тепловой насос). Во время сжатия пузырек отдает энергии больше, чем он забрал из жидкости до этого. Разница между полученной и отданной энергиями дает потерю энергии системы, определяемую как  $\Delta E_f / E_0$ .

Впервые этот эффект отмечался в работе [13] для более крупных пузырьков и при более низких амплитудах давления (0,93 бар), когда расширения и сжатия пузырька не были настолько сильны, как в данном случае, и разность между максимальными температурами, вычисленными с учетом решения тепловой задачи и в адиабатическом приближении, была много меньше (3000 и 1328 К).

Ожидается, что эффект теплового насоса будет играть важную роль в случае колебания малых ( $\sim 4$  мкм) сонолюминесцирующих пузырьков.

**Выводы.** 1. Процесс колебания пузырька можно разделить на две стадии. Первая стадия соответствует малым числам Маха, когда скорость поверхности пузырька намного меньше скорости звука в жидкости; вторая — моментам быстрого сильного сжатия и быстрого расширения пузырька, когда скорость поверхности пузырька сравнима и даже больше местной скорости звука в жидкости.

Первая стадия длится в течение почти всего периода колебаний ( $\sim 10^{-5}$  с), вторая же является очень кратковременной ( $\sim 10^{-8}$  с). Но в этот короткий промежуток времени происходит сверхсжатие пузырька и повышение температуры внутри него до такой степени, что возможно свечение газа.

2. Для режимов малых чисел Маха справедливы две асимптотики. Первая асимптотика следует из решения линейного волнового уравнения и описывает движение жидкости вдали от пузырька; вторая описывает движение жидкости в пограничном слое вблизи пузырька и соответствует решению уравнения Лапласа для несжимаемой жидкости.

3. Вынужденные колебания пузырька в сжимаемой жидкости при малых числах Маха могут быть описаны уравнением Рэлея — Плессета или Херринга — Гилмора. Однако внешние давления в этих уравнениях, а именно: давление на локальной бесконечности во-

круг пузырька  $p_\infty$  в первом и внешнее давление  $p_I$  во втором — отличаются друг от друга и от давления на стенке колбы. Давления  $p_\infty$  и  $p_I$  могут быть рассчитаны при известном законе изменения давления на стенке колбы из обыкновенного дифференциально-разностного уравнения, как показано в настоящей работе.

4. Амплитуды давления на локальной бесконечности  $\Delta p_\infty$  и внешнего давления  $\Delta p_I$  могут быть много больше амплитуды давления на стенке колбы  $\Delta p_R$ , что является результатом усиления сферических акустических волн при их движении от стенки колбы к пузырьку. Наибольшее усиление наблюдается при частотах колбового резонанса, частично или полностью компенсируясь расширением и сжатием пузырька.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Rayleigh Lord.** On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philos. Mag.* 1917. V. 34, N 200. P. 94–98.
2. **Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.** Кавитация. М.: Мир, 1974.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
4. **Акуличев В. А.** Пульсации кавитационных полостей // *Мощные ультразвуковые поля.* М.: Наука, 1968. Ч. 4. С. 131–166.
5. **Воротникова М. И., Солоухин Р. И.** Расчет пульсаций газовых пузырьков в несжимаемой жидкости под действием периодически изменяющегося давления // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10, № 1. С. 34–39.
6. **Prosperetti A., Lezzi A.** Bubble dynamics in a compressible liquid. Pt 1. First order theory // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 457–478.
7. **Prosperetti A., Lezzi A.** Bubble dynamics in a compressible liquid. Pt 2. Second order theory // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 185. P. 289–304.
8. **Нигматулин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К.** О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // *Докл. РАН.* 1996. Т. 348, № 6. С. 768–771.
9. **Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К., Галеева Г. Я. и др.** О слабых колебаниях газового пузырька в сферическом объеме сжимаемой жидкости // *Прикл. математика и механика.* 1997. Т. 61, вып. 6. С. 952–962.
10. **Moss W. C., Clarke D. B., White J. W., Young D. A.** Hydrodynamic simulation of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6, N 9. P. 2979–2985.
11. **Gaitan D. F., Crum L. A., Chursh C. C., Roy R. A.** Sonoluminescence and bubble dynamics for single, stable, cavitation bubble // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 91, N 6. P. 3166–3181.
12. **Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Теплообмен газового пузырька с жидкостью // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1974. № 5. С. 94–100.
13. **Kamath V., Prosperetti A.** A theoretical study of sonoluminescence // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1993. V. 94, N 1. P. 248–260.

*Поступила в редакцию 12/VIII 1998 г.,  
в окончательном варианте — 2/XI 1998 г.*