

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЕВОГО ПОТОКА  
В БЕГУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. И. Ким

(Киев)

Дается формулировка задачи об устойчивости движения поршневого потока в бегущем магнитном поле. Показывается, что этот вопрос сводится к задаче об устойчивости движения при наличии постоянно действующих возмущающих сил. На основе второго метода Ляпунова излагаются достаточные критерии устойчивости движения потока по отношению к некоторым наперед заданным величинам.

Под поршневым понимается поток, состоящий из жидкометаллических сгустков (поршней) и отделяющих их газовых объемов (пробок). Реально поршни могут иметь как кольцеобразную форму (цилиндрический поток), так и вид прямого бруска (плоский поток).

Под установившимся движением поршневого потока понимается движение, при котором скорости внешнего поля и центров инерции поршней равны. Исследуется устойчивость этого движения при малых возмущениях расстояния между поршнями.

Рассматриваемая система состоит (фиг. 1) из двух плоских потоков ограниченной ширины (предельный случай элемента цилиндрических потоков с шириной, равной дуге по окружности канала). Потоки отделены один от другого стенкой толщиной  $\Delta$  и взаимно сдвинуты на расстояние  $\tau$  (поршни снабжены штриховкой). Расстояние между центрами инерции соседних поршней в каждом из потоков равно  $2\tau$ . Через поршни в направлении оси  $y$  протекает постоянный ток (в верхних поршнях токи направлены от нас, в нижних — к нам). Внешнее магнитное поле, образованное трехфазными обмотками переменного тока (далее они названы статорными), расположенными на границах ферромагнитных сред, ограничивающих потоки сверху и снизу, имеет форму бегущей волны длиной  $2\tau$  и движется в том же направлении  $x$ , что и потоки.

1. Чтобы получить простые критериальные соотношения, общие границы между газом и поршнем будем полагать плоскими, а газ рассматривать как упругую среду. Первое предположение имеет формальную силу, если время релаксации возмущенных движений поршня значительно меньше характерного времени разрушения контактной поверхности, из-за неустойчивости Рэлея — Тейлора, второе означает адиабатичность процессов в газе и для таких процессов, как сжатие и расширение в звуковой волне, оно, как известно, допустимо.

Рассмотрим движение среднего поршня (фиг. 1). Уравнение движения имеет вид (далее используется система СИ)

$$M \frac{du}{dt} = (P_- - P_+)q - F_1 - F_2 \quad (1.1)$$

Здесь  $M$  — масса поршня длиной  $l$  (размер в направлении оси  $y$ ),  $u$  — скорость поршня в лабораторной системе координат  $x, y, z$ ;  $P_-$  и  $P_+$  — давление соответственно слева и справа от поршня;  $q$  — площадь поршня по плоскости  $yz$ ;  $F_1$  — электромагнитная сила;  $F_2$  — сила трения поршня о стенки канала.

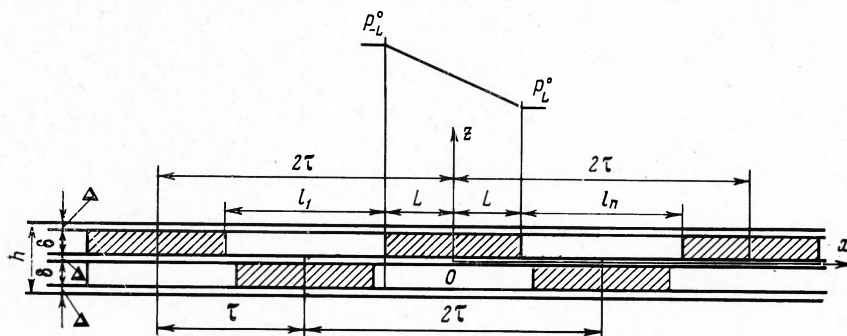
Уравнение движения газа с учетом предположения об адиабатическом характере процессов в нем запишем в обычных обозначениях

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (1.2)$$

Положим

$$\begin{aligned} P_- &= P_-^\circ + p_-, & F_1 &= F_1^\circ + f_1, & u &= u^\circ + \frac{d\vartheta}{dt} \\ P_+ &= P_+^\circ + p_+, & F_2 &= F_2^\circ + f_2, & u_\Gamma &= u^\circ + \frac{\partial\theta}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь введено упрощение предположением, что движение газа является одномерным ( $v = iu_\Gamma$ ). Основанием является тот факт, что вклад, вносимый акустическим давлением  $p_-, p_+$ , как показано далее, несуществен. По этой же причине не учитывается и изменение величины  $q$  в (1.4).



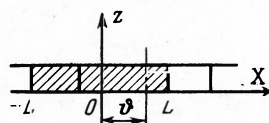
Фиг. 1

В (1.3) первые слагаемые относятся к установившемуся движению поршня, вторые представляют возмущения соответственных величин,  $\vartheta(t)$  — смещение поршня относительно его равновесного положения (под равновесным понимается положение поршня в его установившемся движении). Таким образом,  $\vartheta(t)$  определяет положение поршня в системе координат  $X, y, z$ , жестко связанной с поршнем в его установившемся движении (фиг. 2),  $\theta(t, X)$  — среднее (в смысле направленное) смещение молекул газа в той же системе координат  $X, y, z$ .

Подставляя (1.3) в (1.1) и (1.2), получим

$$M \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (p_- - p_+) q - f_1 - f_2, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} = 0 \quad (1.5)$$



Фиг. 2

Здесь

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad p_- = -\gamma P_-^\circ \left( \frac{\partial\theta}{\partial X} \right)_{-L}, \quad p_+ = -\gamma P_+^\circ \left( \frac{\partial\theta}{\partial X} \right)_L$$

Оценим отдельные величины, входящие в уравнение (1.4).

Для определения возмущения электромагнитной силы  $f_1$  рассмотрим уравнения электродинамики системы (фиг. 1) при малых скольжениях потоков относительно внешнего магнитного поля. Под скольжением  $s$  понимается

$$s = \frac{\alpha}{\omega} \frac{d\vartheta}{dt} \quad \left( \alpha = \frac{\pi}{\tau} \right)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота напряжения, приложенного к статорной обмотке.

Заменим систему из двух поршневых потоков (фиг. 1) однокомпонентным потоком с электропроводностью  $\sigma$  и током  $j_v$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \sin \frac{2\pi z}{h} \cos \alpha x, \quad j_v = j_1 \cos \alpha x$$

$$\sigma_0 = \frac{\delta}{h} \sigma_{\Pi}, \quad \sigma_1 = \frac{c_1}{\pi} \left( \cos \frac{2\pi\Delta}{h} + \cos \frac{\pi\Delta}{h} \right), \quad j_1 = \frac{\delta}{h} c_1 j_{\Pi}$$

Здесь  $\sigma_{\Pi}$  — электропроводность поршня,  $j_{\Pi}$  — плотность тока в поршне, обусловленная внешним источником,  $c_1$  — коэффициент при первом члене ряда Фурье для кривой электропроводности.

Уравнения электродинамики можно записать

$$\Delta A - \mu_0 \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu_0 j_v$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{\pm 1/2 h} = \pm F_{m_1} \sin(\omega st + \alpha x - \varphi_1) \pm F_{m_2} \sin(\alpha x - \varphi_2)$$

$$F_{m_1} = \frac{3}{2} \mu_0 w I_1, \quad F_{m_2} = \frac{3}{2} \mu_0 w I_2, \quad w = \frac{2w_{\phi}}{\tau p}$$

$$-U_m \exp[-j^\circ \omega st] = \frac{\partial \psi}{\partial t} + L_s \frac{\partial i}{\partial t} + j^\circ \omega (\psi + L_s i)$$

$$\psi = -j^\circ p w l \int_{-\tau}^{\tau} \left[ A \left( \frac{h}{2} \right) + A \left( -\frac{h}{2} \right) \right] \exp(j^\circ \alpha x) dx$$

Здесь  $A$  —  $y$ -компонента векторного потенциала,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $w_{\phi}$  — число витков в фазе статорной обмотки,  $p$  — число волн поля статора на длине канала,  $U_m$  — амплитуда статорного напряжения,  $I_1$  и  $I_2$  — составляющие тока статора, обусловленные соответственно напряжением  $U_m \exp(-j^\circ \omega st)$  и током в жидкости,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — фазовые углы величин  $I_1$  и  $I_2$  при  $t = 0$ ,  $L_s$  — индуктивность рассеяния статорной обмотки,  $j^\circ$  — мнимая единица.

Положим

$$A = S - \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2} \lambda h}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h} \operatorname{ch} \lambda z F_{m_1} \exp[-j^\circ (\omega st + \alpha x - \varphi_1)] +$$

$$+ \frac{\mu_0 i}{\alpha^2} \exp \left[ j^\circ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha x \right) \right] - \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2} \alpha h}{\alpha \operatorname{sh} \alpha h} \operatorname{ch} \alpha z F_{m_2} \exp[-j^\circ (\alpha x - \varphi_2)],$$

$$\lambda = r + j^\circ v = \alpha \left\{ \frac{1}{2} [(1 + (\epsilon s)^2)^{1/2} + 1] \right\}^{1/2} - j^\circ \alpha \left\{ \frac{1}{2} [(1 + (\epsilon s)^2)^{1/2} - 1] \right\}^{1/2} \quad (1.6)$$

Тогда

$$\Delta S - \mu_0 \sigma \frac{\partial S}{\partial t} = f(t, x, z)$$

$$f(t, x, z) = j^\circ \omega s \mu_0 (\sigma - \sigma_0) \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2} \lambda h}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h} \operatorname{ch} \lambda z F_{m_1} \exp[-j^\circ (\omega st + \alpha x - \varphi_1)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm \frac{1}{2} h \quad (1.7)$$

Величина  $S$  по  $t$  и  $x$  удовлетворяет условию периодичности. Поэтому, имея в виду (1.7) и структуру  $f(t, x, z)$ , положим

$$S = \sum_0^m a_{m0} \cos \frac{2m\pi z}{h} + \sum_0^{m,n} \cos \frac{2m\pi z}{h} [b_{mn} \cos(\omega st + n\alpha x) + c_{mn} \sin(\omega st + n\alpha x)]$$

где  $a_{m0}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$  — комплексные числа. (1.8) удовлетворяет условию полноты и поэтому в среднем он должен сходиться.

Применим идею метода Галеркина. Легко видеть, что

$$\int_0^{\zeta} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-1/2h}^{1/2h} f(t, x, z) \varphi dt dx dz = 0 \quad \left( \zeta = \frac{2\pi}{\omega s} \right)$$

где  $\varphi$  — любая из координатных функций из (1.8). Таким образом, для коэффициентов  $a_{m0}, b_{mn}, c_{mn}$  получим систему однородных алгебраических уравнений. Это указывает на то, что эти коэффициенты будут равны нулю. Следовательно,  $S = 0$ .

Фактическая величина векторного потенциала дается мнимой частью выражения (1.6), т. е. она равна

$$A = F_{m1} [a(z) \sin(\omega st + \alpha x - \varphi_1) - b(z) \cos(\omega st + \alpha x - \varphi_1)] + \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2} \alpha h}{\alpha \operatorname{sh} \alpha h} \operatorname{ch} \alpha z F_{m2} \sin(\alpha x - \varphi_2) + \frac{\mu_0 j_1}{\alpha^2} \cos \alpha x \quad (1.9)$$

где

$$a(z) = q_1 \cos v z \operatorname{ch} r z - q_2 \sin v z \operatorname{sh} r z \quad q_1 + j^\circ q_2 = \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2} \lambda h}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h}$$

$$b(z) = q_1 \sin v z \operatorname{sh} r z + q_2 \cos v z \operatorname{ch} r z,$$

Далее, положим  $(\epsilon s)^2 \ll 1, \dot{h} \ll \tau$ . Тогда получим

$$I_1 = \frac{U_m}{x_d}, \quad I_2 = \frac{2 p \omega l \tau \mu_0 \omega}{\alpha^2 x_d} j_1, \quad \varphi_1 = -\delta_c, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (1.10)$$

где

$$x_d = \omega L_s + \frac{3 \cdot 2f}{p} l (2w_\varphi)^2 \mu_0 \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h}$$

Электромагнитную силу, действующую на поршень, определим из соотношения

$$F_1 = \langle f \rangle 2Ll\delta, \quad \langle f \rangle = \frac{1}{2\tau h} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-1/2h}^{1/2h} j B_z dx dz$$

$$j = \epsilon_0 \frac{\partial A}{\partial t} - j_v, \quad B_z = \frac{\partial A}{\partial x}$$

Здесь  $\langle f \rangle$  — среднее значение плотности электромагнитной силы. Имеем

$$F_1 = F_m \sin \delta_c + C\vartheta + D \frac{d\vartheta}{dt}, \quad F_m = 3 \frac{j_1}{\pi} \frac{U_m}{x_d} \mu_0 \frac{2w_\varphi}{p} \frac{\delta}{h} Ll$$

$$C = F_m \alpha \cos \delta_c, \quad D = \left( 3w_\varphi \frac{U_m}{x_d} \right)^2 \frac{\mu_0 \epsilon \alpha}{\omega (\tau p)^2} \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h} \frac{\delta}{h} 2Ll \quad (1.11)$$

В (1.11) первый член соответствует установившемуся режиму. Таким образом, возмущение электромагнитной силы равно

$$f_1 = C\vartheta + D \frac{d\vartheta}{dt} \quad (1.12)$$

Сила трения о стенки равна

$$F_1 = \zeta \frac{\rho u^2}{2} \frac{\tau L}{h} q$$

где  $\zeta$  — коэффициент трения, определяемый по известным формулам в зависимости от числа Рейнольдса. Отсюда для возмущения силы трения получим

$$f_2 = \chi \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \chi = \zeta \rho u^0 \frac{L}{h} q \quad (1.13)$$

Таким образом, для формулировки уравнения (1.4) остается еще определить возмущения  $p_-$  и  $p_+$ . Эти величины зависят от возмущенного движения газа. Следовательно необходимо рассмотреть (1.5).

Среди решений, формально удовлетворяющих (1.5), возьмем то, которое при  $X = \mp L$  совпало бы с решением уравнения (1.4). Принимая во внимание (1.12) и (1.13), можно предположить, что это решение при мгновенных возмущениях будет иметь либо периодический, либо аperiodический характер. Поэтому решение уравнения (1.5) запишем в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} \theta_i = \theta_{1i} + \theta_{2i} = f_{1i}(a_0 t - X - L_i) \exp\left[\frac{k}{a_0}(a_0 t - X - L_i)\right] + \\ + f_{2i}(a_0 t + X + L_i) \exp\left[\frac{k}{a_0}(a_0 t + X + L_i)\right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

$(i = -, +; L_- = -L_+ = L)$

$$\begin{aligned} \theta_i = \theta_{1i} + \theta_{2i} = A_{1i} \exp\left[\frac{k_1}{a_0}(a_0 t - X - L_i)\right] + A_{2i} \exp\left[\frac{k_2}{a_0}(a_0 t - X - L_i)\right] \\ (A_{1i} = \text{const}, \quad A_{2i} = \text{const}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь и далее индексы минус (—) и плюс (+) соответственно означают области слева и справа от поршня.

Рассмотрим (1.14). Отсюда следует:

$$\left. \frac{\partial \theta_{2i}}{\partial X} \right|_{-L_i} = \lambda_i \left. \frac{\partial \theta_{1i}}{\partial X} \right|_{-L_i}$$

и далее

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial X} \right|_{-L_i} = \frac{1 + \lambda_i}{(1 - \lambda_i) a_0} \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right|_{-L_i} \quad (1.16)$$

Здесь  $\lambda_i = \text{const}$  и в общем случае  $\lambda_- \neq \lambda_+$ . Так как

$$\theta_{i|-L_i} = \vartheta$$

где  $\vartheta$  — смещение поршня, то получим

$$(p_- - p_+) q = R \frac{d\vartheta}{dt}, \quad R = \left[ \frac{1 + \lambda_-}{1 - \lambda_-} P_-^\circ - \frac{1 + \lambda_+}{1 - \lambda_+} P_+^\circ \right] \frac{\gamma}{a_0} q \quad (1.17)$$

Таким образом, уравнение (1.4) можно записать

$$M \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - D_\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = 0 \quad (D_\vartheta = R - D - \chi) \quad (1.18)$$

Отсюда получим

$$\gamma^1 = \frac{D_\vartheta}{2M}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4MC - D_\vartheta^2}}{2M}, \quad 4MC > D_\vartheta^2 \quad (1.19)$$

Здесь  $\gamma^1$  и  $\omega$  — инкремент и частота колебаний поршня при кратковременных возмущениях.

В (1.17) величина  $\lambda_i$  представляет отношение амплитуды левобегущей волны к амплитуде правобегущей волны на краях рассматриваемого поршня. Следовательно, величина  $\lambda_i$  должна зависеть от возмущенного движения соседних (слева и справа) поршней. Формально возможны два случая: соседние поршни неподвижны, т. е. смещение их относительно

установившегося движения отсутствует; соседние поршни совершают такое же движение, что и рассматриваемый, но с другой амплитудой. Интерес представляет второй случай. Для него из условий согласования колебаний соседних поршней со звуковым колебанием газа найдем

$$\lambda_i = \frac{\beta_i^2 - 1}{\exp(\pm 2\gamma l_i / a_0) - 2\beta_i \cos \omega l_i / a_0 \exp(\pm \gamma l_i / a_0) + \beta_i^2}$$

$$\beta_i \operatorname{ch} \frac{\gamma l_i}{a_0} - \cos \frac{\omega l_i}{a_0} = 0 \quad (1.20)$$

Здесь верхний знак относится к  $i = +$ , нижний — к  $i = -$ . Таким образом, при заданных расстояниях  $l_-$  и  $l_+$  между поршнями (фиг. 1) из (1.17), (1.19) и (1.20) можно получить все необходимые величины, характеризующие колебательные переходы поршня при кратковременных возмущениях. Численные расчеты (1.17), (1.19) и (1.20) показали, что вклад акустического давления  $R \, d\vartheta / dt$  мал. Так, например, при  $C = 3,98 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $D_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $P_-^0 = 250 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $P_+^0 = 238 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $M = 91 \text{ кг}$ ,  $a_0 = 440 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $l_- = l_+ = 0,75 \text{ м}$ ,  $q = 0,0375 \text{ м}^2$  имеем  $R = 40 \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-1}$ . Таким образом, акустическое давление должно играть второстепенную роль.

Апериодические переходы (1.15) поршня возможны, если  $D_0^2 > 4MC$ . При этом такие же переходы будут совершать и соседние поршни, а величина  $R$  определится по формуле

$$R = (P_-^0 - P_+^0) \frac{\gamma}{a_0} q$$

Простые оценки показывают, что роль величины  $R$  в данном случае будет более заметной, чем при колебаниях поршней.

В уравнении (1.18) не учтены силы, носящие характер постоянно действующих возмущений. Рассмотрим основные факты, с которыми связано существование таких сил. Поршни, входящие в состав потока, связаны друг с другом. Эта связь осуществляется через посредство газовых слоев, находящихся между поршнями (акустическое давление на поршни) и через электромагнитное поле.

Акустическое давление, как показано ранее, зависит от статических давлений  $P_-^0$  и  $P_+^0$ , действующих на поршни в установившемся движении потока, а в случае колебательных переходов и от расстояний  $l_-$  и  $l_+$  между поршнями. По условиям обеспечения нормальной работы устройства канал слегка расширяется вдоль длины. Поэтому в процессе движения поршня по каналу указанные величины постоянно меняются. Однако это изменение не может носить стационарный характер. Последнее связано с тем, что размер поршней вдоль  $x$  все же значителен (порядка длины полуволны поля статора), а время пребывания поршня в канале мало (порядка сотен долей сек) и может быть меньше времени релаксации механических переходных процессов (для приведенных выше числовых значений это время составляет порядка 0,1 сек). Таким образом, изменение статического давления газа, связанное с полезной работой поршня, также должно сопровождаться образованием акустических волн и давлений. Ясно, что это давление будет носить характер постоянно действующих возмущений и будет функцией  $t$ ,  $\vartheta$  и  $d\vartheta / dt$ .

Магнитное поле взаимной индукции поршней зависит от их размеров и расстояний между ними. По мере движения поршня по каналу, вследствие его расширения, эти величины непрерывно меняются, что приводит к изменению поля взаимной индукции. Кроме того, изменения этого поля и поля самоиндукции поршня связаны с ограниченностью длины канала. Таким образом, в составе сил, действующих на поршень, должны появиться дополнительные электромагнитные силы, носящие характер постоянно действующих возмущений, зависящие от  $t$ ,  $\vartheta$  и  $d\vartheta / dt$ .

Для учета постоянно действующих возмущений как акустического, так и электромагнитного происхождения в уравнение (1.18) необходимо ввести член  $f(t, \vartheta, d\vartheta / dt)$  и записать

$$M \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - D_0 \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = f\left(t, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right) \quad (1.21)$$

Аналитическое описание функции  $f(t, \vartheta, d\vartheta/dt)$  навряд ли возможно. Однако это обстоятельство не имеет существенного значения, поскольку для дальнейшего достаточно знать лишь верхние пределы этой функции. В такой постановке уравнение (1.21) справедливо для любого из поршней, поэтому далее оно называется уравнением возмущенного движения поршневого потока.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости движения поршневого потока. Заменяем (1.21) нормальной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(t, y_1, y_2), \quad \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 \quad (2.1)$$

где

$$y_1 = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad y_2 = \vartheta, \quad a_{11} = \frac{D_s}{M}, \quad a_{12} = -\frac{C}{M}, \quad a_{21} = 1, \quad f_1 = \frac{f}{M} \quad (2.2)$$

Невозмущенное движение ( $y_1 = y_2 = 0$ ) и возмущенное движение, обусловленное действием мгновенных возмущений при  $t = 0$ , определяются из (2.1) при  $f_1 = 0$ . При  $f_1 \neq 0$  и не равных нулю начальных условиях та же система дает возмущенное движение при наличии мгновенных и постоянно действующих возмущений.

Найдем критерий устойчивости движения ( $y_1 = y_2 = 0$ ) на отрезке времени  $[0, T]$  ( $T$  — время пребывания поршня в канале) относительно величин

$$\{\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}\}, \quad \bar{f}_1(t), \quad \{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)\} \quad (2.3)$$

представляющих соответственно заданные верхние границы модулей начальных возмущений, возмущающей силы и последующих возмущений. Для решения этой задачи применим второй метод Ляпунова [1-3].

Согласно этому методу получение достаточных критериев устойчивости основано на оценке сверху интеграла Коши уравнений возмущенного движения (2.1), что требует построения специальной положительно определенной функции  $V$  от  $y_1, y_2$  и ее исследования в совокупности с (2.1).

Положим

$$V = A \exp \gamma(t) = (A_{11}y_1^2 + A_{22}y_2^2 + 2A_{12}y_1y_2) \exp \gamma(t), \quad A_{12} = A_{21} \quad (2.4)$$

где  $\gamma(t)$  — некоторая вещественная на отрезке  $[0, T]$  функция, причем сразу будем считать, что  $\dot{\gamma}(t) > 0$ . Это требование, как видно из последующего, не нарушает справедливость других оценок. Величины  $A_{11}, A_{22}, A_{12}$  должны удовлетворять следующему уравнению:

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \frac{\partial V}{\partial y_1} + a_{21}y_1 \frac{\partial V}{\partial y_2} = (u_1y_1^2 + u_2y_2^2) \exp \gamma(t)$$

где  $u_1, u_2$  — произвольные функции времени, меньшие нуля.

Полагая сразу

$$u_1 = -\frac{a_{21}}{a_{12}} u_2$$

найдем

$$A_{11} = -\frac{a_{21}u_2}{a_{11}a_{12}}, \quad A_{12} = \frac{u_2}{2a_{12}}, \quad A_{22} = \left( \frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{11}}{2a_{12}a_{21}} \right) u_2 \quad (2.5)$$

Чтобы (2.4) была положительно определенной функцией, достаточно при  $u_2 < 0$  выполнения условий Гурвица

$$-a_{12}a_{21} > 0, \quad -a_{11} > 0$$

Первый из них, согласно (2.2), сводящийся к  $C > 0$ , выполняется автоматически, второй дает

$$D_3 < 0 \quad (2.6)$$

Полная производная функции  $V$  в силу уравнений (2.1) при  $f_1 = 0$  равна

$$\dot{V} = B \exp \gamma(t) = (B_{11}y_1^2 + B_{22}y_2^2 + 2B_{12}y_1y_2) \exp \gamma(t), \quad B_{12} = B_{21} \quad (2.7)$$

Здесь

$$B_{11} = \dot{\gamma}A_{11} - \frac{a_{21}}{a_{12}}u_2, \quad B_{22} = \dot{\gamma}A_{22} + u_2, \quad B_{12} = \dot{\gamma}A_{12} \quad (2.8)$$

При получении (2.7) и (2.8) было предположено, что  $u_2 = \text{const}$ . Производная  $V$  будет отрицательно определенной функцией, если

$$B_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} > 0$$

Отсюда следует:

$$\frac{|D_3|}{M} > \dot{\gamma} > 0, \quad \left(1 - \frac{M\dot{\gamma}}{|D_3|}\right)^2 - \frac{|D_3|\dot{\gamma}}{2C} \left(1 - \frac{M\dot{\gamma}}{2|D_3|}\right) > 0 \quad (2.9)$$

Если выполняются условия (2.6) и (2.9), то оценки  $X_k(0, t, \bar{y}_0)$  сверху модуля интеграла Коши  $|y_k(t)|$  уравнений (2.1) при  $f_1 = 0$

$$|y_k(t)| \leq X_k(0, t, \bar{y}_0) \leq \bar{y}_k(t) \quad (k=1,2) \quad (2.10)$$

где  $y_k(t)$ ,  $\bar{y}_k(t)$  — интегралы Коши соответственно при начальных условиях  $y_0$  и  $\bar{y}_0$  ( $y_0 < \bar{y}_0$ ), можно найти по формуле [4]

$$X_k = \left(A(\bar{y}_0) \frac{M_k}{A_n}\right)^{1/2} \exp \varphi(t, 0) \quad (k=1,2) \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(\bar{y}_0) &= A_{11}\bar{y}_{10}^2 + A_{22}\bar{y}_{20}^2 + 2A_{12}\bar{y}_{10}\bar{y}_{20} \\ A_n &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2, \quad M_1 = A_{22}, \quad M_2 = A_{11} \\ \varphi(t, 0) &= 1/2 [\gamma(0) - \gamma(t)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, получим

$$X_1 = \left[ \left( \bar{y}_{10}^2 + \Delta_1 \bar{y}_{20}^2 + \frac{|D_3|}{M} \bar{y}_{10} \bar{y}_{20} \right) \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right]^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right) \quad (2.13)$$

$$X_2 = \left[ \left( \bar{y}_{10}^2 + \Delta_1 \bar{y}_{20}^2 + \frac{|D_3|}{M} \bar{y}_{10} \bar{y}_{20} \right) \frac{1}{\Delta_2} \right]^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right) \quad (2.14)$$

$$\Delta_1 = \frac{D_3^2}{2M^2} + \frac{C}{M}, \quad \Delta_2 = \frac{D_3^2}{4M^2} + \frac{C}{M}$$

Здесь  $\dot{\gamma}_m$  — максимальное значение  $\dot{\gamma}$ , определяемое из условия (2.10).

До сих пор предполагалось, что  $f_1 = 0$ . При  $f_1 \neq 0$ , т. е. при наличии постоянно действующих возмущающих сил, критерии (2.6) и (2.9) сохраняют силу. Единственно, что нужно сделать — это учесть вклад  $f_1$  в формулах для оценок сверху интегралов Коши уравнений (2.10) и вместо (2.10) записать

$$Y_k(0, t, \bar{y}_0) \leq \bar{y}_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (2.15)$$

где  $\bar{y}_k(t)$  — интеграл Коши уравнений (2.1) при  $f_1 \neq 0$  и  $\bar{y}_0$ . Величину



$Y_k$  можно определить по формуле [4]

$$Y_k = X_k + \sum_{l=1}^2 \int_0^t Z_k^{(l)}(t, \tau) \bar{f}_l(\tau) d\tau \quad (k=1, 2) \quad (2.16)$$

$$Z_k^{(l)}(t, \tau) = z_k^{(l)}(t, \tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right) = \left(A_{li} \frac{M_k}{A_n}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right) \quad (2.17)$$

Здесь  $X_k$  даются формулами (2.13) и (2.14),  $M_k$  и  $A_n$  вычисляются по (2.12). Имеем

$$Y_1 = X_1 + \frac{2}{\dot{\gamma}_m} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right)\right] z_1^{(1)} \bar{f}_1$$

$$Y_2 = X_2 + \frac{2}{\dot{\gamma}_m} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right)\right] z_2^{(1)} \bar{f}_1$$

$$z_1^{(1)} = \Delta_1^{1/2} \Delta_2^{-1/2}, \quad z_2^{(1)} = \Delta_2^{-1/2} \quad (2.18)$$

Здесь  $\bar{f}_1 = \text{const}$  — верхний предел функции  $f_1(t, \vartheta, d\vartheta/dt)$ .

Таким образом, достаточные критерии устойчивости движения поршневого потока в бегущем магнитном поле на отрезке  $[0, T]$  относительно наперед заданных величин (2.3) даются условиями (2.6), (2.9) и (2.15), в которых верхние оценки определяются по формулам (2.13), (2.14) и (2.18).

Формулы оценок сверху (2.13), (2.14) и (2.18) интегралов Коши уравнения возмущенного движения при мгновенных возмущениях и при наличии постоянно действующих возмущающих сил содержат одни и те же величины (см. (2.11), (2.17)). Этими же величинами определяется и функция Ляпунова  $V$ . Поэтому представление о качестве указанных формул и о том насколько удачно построена функция  $V$  можно получить, например, сопоставляя результаты, доставляемые (2.13) и (2.14), с точным решением уравнений (2.1) при мгновенных возмущениях. В данной задаче такая возможность имеется.

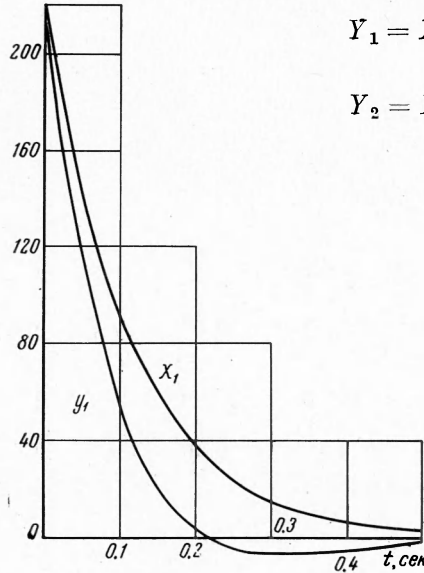
На фиг. 3 представлены результаты расчетов  $y_1$  и его оценки по формуле (2.13) при следующих данных:  $D_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $C = 3.98 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $M = 91 \text{ кг}$ ,  $P_-^0 = 250 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $P_+^0 = 238 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $a_0 = 440 \text{ м/сек}^{-1}$ ,  $l_- = l_+ = 0.75 \text{ м}$ ,  $q = 0.0375 \text{ м}^2$ ,  $\gamma^1 = -10.34 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega = 65.32 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\dot{\gamma}_m = 18 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\bar{y}_{10} = 220 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $\bar{y}_{20} = 0.05 \text{ м}$ . Величины  $\gamma^1$  и  $\omega$  вычислялись по формулам (1.17), (1.19) и (1.20),  $\dot{\gamma}_m$  определилась из условий (2.9).

Приведенное сопоставление является доказательством правильности полученных достаточных критериев устойчивости движения поршневого потока в бегущем магнитном поле.

Поступила 18 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
3. Д у б о ш и н Г. Н. Основы теории устойчивости движения. Изд-во Моск. ун-та, 1952.
4. К а р а ч а р о в К. А., П и л ю т и н А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. М., Физматгиз, 1962.



Фиг. 3