

AMS subject classification: 65L04, 65L05, 65L06

Многоточечный численный интегратор с тригонометрическими коэффициентами для начальных задач с периодическими решениями

Дж.О. Эхиги^{1,2}, С.Н. Джатор³, С.А. Окунуга²

¹College of Horticulture, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China

²Department of Mathematics, University of Lagos, Lagos 23401, Nigeria

³Department of Mathematics and Statistics, Austin Peay State University, Clarksville, TN, USA

E-mails: jehigie@unilag.edu.ng (Эхиги Дж.О.), Jators@apsu.edu (Джатор С.Н.), sokunuga@unilag.edu.ng (Окунуга С.А.)

Эхиги Дж.О., Джатор С.Н., Окунуга С.А. Многоточечный численный интегратор с тригонометрическими коэффициентами для начальных задач с периодическими решениями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 329–344.

На основе метода коллокации мы вводим унифицированный подход для получения семейства многоточечных численных интеграторов с тригонометрическими коэффициентами для численного решения периодических начальных задач. Представлен практический трехточечный численный интегратор, коэффициенты которого являются обобщением классических линейных многошаговых методов, коэффициенты которых являются функциями оценки угловой частоты ω . Метод коллокации дает непрерывный метод, из которого восстанавливаются основной и вспомогательные методы и выражаются в виде блочно-матричной конечно-разностной формулы, которая интегрирует дифференциальное уравнение второго порядка по неперекрывающимся интервалам без предикторов. Представлены и исследованы некоторые свойства численного интегратора. Приводятся численные примеры для иллюстрации точности метода.

DOI: 10.15372/SJNM20170308

Ключевые слова: *блочный метод, периодическое решение, тригонометрические коэффициенты, метод коллокации.*

Ehigie J.O., Jator S.N., Okunuga S.A. A multi-point numerical integrator with trigonometric coefficients for initial value problems with periodic solutions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 329–344.

Based on a collocation technique, we introduce a unifying approach for deriving a family of multi-point numerical integrators with trigonometric coefficients for the numerical solution of periodic initial value problems. A practical 3-point numerical integrator is presented, whose coefficients are generalizations of classical linear multistep methods such that the coefficients are functions of an estimate of the angular frequency ω . The collocation technique yields a continuous method, from which the main and complementary methods are recovered and expressed as a block matrix finite difference formula which integrates a second order differential equation over non-overlapping intervals without predictors. Some properties of the numerical integrator are investigated and presented. Numerical examples are given to illustrate the accuracy of the method.

Keywords: *block method, periodic solution, trigonometric coefficients, collocation technique.*

1. Введение

Прямое интегрирование начальных задач второго порядка с периодическими решениями было главной проблемой численных исследований в течение многих лет. Начальные задачи второго порядка вида

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (1)$$

где $y \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — гладкая функция, а d — размерность системы, решения которой являются по своей природе периодическими, использовались многими учеными, занимающимися прикладной математикой для моделирования задач науки и техники. Многие физические явления проявляют колебания, например системы периодического вида, резонансы, распространение волн, вибрации, брасселяторные системы квантовой физики, небесной механики и химии.

Джатор [20] рассматривает некоторый общий класс методов для решения задачи (1). Во многих случаях, вследствие осцилляторных характеристик решений, классическими методами в большинстве случаев невозможно достичь очень точных результатов для задач с осциллирующими решениями. Именно поэтому исследователи пытались найти численные методы, учитывающие осцилляторные характеристики решений.

Численные методы с тригонометрическими коэффициентами были введены Гаучи [15], а затем — Лиучем [24]. Многие такие обобщения обсуждались в статьях Патерностера [27, 28], Берге и Иксару [18], Джатора с соавторами [21] и Ванга с соавторами [34] и приводимых в них ссылках, где коэффициенты численных методов являются функциями угловой частоты. Рамос с соавторами [29] отметили, что многоточечные методы имеют преимущества, поскольку они самозапускающиеся, и, таким образом, не требуют использования других методов для получения стартовых решений. В данной статье вводится многоточечный тригонометрически совместимый метод с использованием многошагового метода коллокации, для которого приближенный интерполирующий многочлен является линейной комбинацией полиномиальных и тригонометрических членов.

Имея в виду частоту задачи периодического обыкновенного дифференциального уравнения, мы искали новый класс многоточечных тригонометрически совместимых методов, являющихся расширением и обобщением их классической формы при некотором параметре $v = \omega h$ (см. [22]). Этот класс методов предложен для уменьшения стоимости вычислений, чтобы реализация была поблочной, в противоположность популярным предиктор–корректор схемам, которые уменьшают устойчивость метода. Многоточечный алгоритм состоит из некоторых основных и вспомогательных методов, генерирующих несколько численных решений за одну реализацию (см. [1, 2, 9]). Пионерская работа была проведена Шампайном и Уоттсом [30].

Данная статья организована следующим образом: в следующем пункте мы конструируем многоточечный численный интегратор с тригонометрическими коэффициентами и представляем процедуру реализации. В пункте 3 представлены алгебраический порядок и локальная ошибка усечения. Анализ устойчивости проводится в п. 4. В пункте 5 приводятся некоторые численные эксперименты для демонстрации эффективности нового метода по сравнению с некоторыми методами в существующей литературе. Заключительные замечания даны в п. 6.

2. Разработка многоточечного численного интегратора

В данном пункте мы представляем процедуру получения многоточечного численного интегратора. В статье Ламбера [22] классический линейный многошаговый метод для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k = +1, \quad (2)$$

где $y_{n+j} \approx y(x_n + jh)$, $f_{n+j} \approx y''(x_n + jh)$ и $f_{n+j} \equiv f(x_n + jh, y_{n+j})$. Используя многошаговый метод коллокации [8, 9, 20, 21, 25], мы получим непрерывную линейную многошаговую формулу, такую что метод точно интегрирует (1) при помощи любой линейной комбинации базисных функций в множестве

$$\{\cos \omega x, \sin \omega x\} \cup \{1, x, x^2, \dots, x^k\}. \quad (3)$$

2.1. Конструирование k -точечного блочного численного интегратора

При наличии базисной функции предположим, что имеется интерполирующий многочлен

$$Y(x) = A \cos \omega(x - x_n) + B \sin \omega(x - x_n) + \sum_{j=0}^k a_j (x - x_n)^j, \quad (4)$$

где A, B и a_j , $j = 0, 1, \dots, k$, — коэффициенты, являющиеся однозначно неопределенными, а ω — частота. Необходимо, чтобы интерполирующая функция прошла через точки $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), \dots, (x_{n+k}, y_{n+k})$. Поэтому потребуем, чтобы она удовлетворяла соотношениям:

$$Y(x_{n+i}) = y_{n+i}, \quad i = 0, 1, \quad Y''(x_{n+i}) = f_{n+i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (5)$$

То есть аппроксимирующий многочлен (4) применяется к точкам x_n и x_{n+1} , а его вторая производная применяется к точкам x_{n+i} , $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Уравнение (5) приводит к системе $k+3$ уравнений с $k+3$ неопределенными коэффициентами и решается численно для определения коэффициентов A, B и a_j , $j = 0, 1, \dots, k$. Кроме того, мы подставляем однозначно неопределенные коэффициенты (в большинстве случаев очень громоздкие) снова в (4), и полученное в результате уравнение упрощается и собирается в непрерывное представление основного метода в виде

$$Y(x) = \bar{\alpha}_0(x, \omega) y_n + \bar{\alpha}_1(x, \omega) y_{n+1} + h^2 \sum_{j=0}^k \bar{\beta}_j(x, \omega) f_{n+j}, \quad (6)$$

тогда как производная $Y'(x)$ по x принимает вид:

$$Y'(x) = \frac{d}{dx} \left(\bar{\alpha}_0(x, \omega) y_n + \bar{\alpha}_1(x, \omega) y_{n+1} + h^2 \sum_{j=0}^k \bar{\beta}_j(x, \omega) f_{n+j} \right), \quad (7)$$

где ω — частота. Коэффициенты $\bar{\alpha}_j(x, \omega)$ и $\bar{\beta}_j(x, \omega)$ являются непрерывными тригонометрическими коэффициентами численного интегратора. Предположим, что $y_{n+j} = Y(x_n +$

jh) — численная аппроксимация точного решения $y(x_{n+j})$, тогда как $f_{n+j} = Y''(x_n+jh)$ — аппроксимация $y''(x_{n+j})$.

Уравнение (6) генерирует основные методы, а уравнение (7) — вспомогательные методы, необходимые для учета других точек вдоль интервала интегрирования. Для получения предлагаемого многоточечного численного интегратора с тригонометрическими коэффициентами уравнение (6) определяется в точках $x = x_{n+i}, i = 2, 3, \dots, k$, а уравнение (7) — в точках $x = x_n$ и $x = x_{n+k}$, что составляет всего $k + 1$ формул.

Используя работы Фатунла [12], Охиги и Окунуга [10], дающие блочное представление блочной многшаговой формулы функциональной подгонки, мы определяем следующие векторы:

$$\begin{aligned} Y_{m-1} &= [y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n, hy'_n]^\top, & F_{m-1} &= [f_{n-k+1}, f_{n-k+2}, \dots, f_n, hf'_n]^\top, \\ Y_m &= [y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots, y_{n+k}, hy'_{n+k}]^\top, & F_m &= [f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \dots, f_{n+k}, hf'_{n+k}]^\top. \end{aligned}$$

Метод k -точечной функциональной подгонки обычно представляется в виде блочной матрицы в следующем виде:

$$(\mathcal{A} \otimes I)Y_m = (\mathcal{B} \otimes I)Y_{m-1} + h^2(\mathcal{C} \otimes I)F_{m-1} + h^2(\mathcal{D} \otimes I)F_m, \quad (8)$$

где для системы d уравнений начальной задачи (1) I обозначает $d \times d$ единичную матрицу, \otimes — символ для произведения Кронекера матриц, а \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} и \mathcal{D} — квадратные матрицы размерности $(k + 1) \times (k + 1)$ с тригонометрическими коэффициентами вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{1,1}(v) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{2,1}(v) & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{k,1}(v) & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -\alpha_{k+1,1}(v) & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,0}(v) & -1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2,0}(v) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k,0}(v) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,0}(v) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_{1,0}(v) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{2,0}(v) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k,0}(v) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k+1,0}(v) & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(v) & \dots & \beta_{1,k}(v) & 0 \\ \beta_{2,1}(v) & \dots & \beta_{2,k}(v) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{k,1}(v) & \dots & \beta_{k,k}(v) & 0 \\ \beta_{k+1,1}(v) & \dots & \beta_{k+1,k}(v) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Непрерывные тригонометрические коэффициенты для (8) определяются из (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(v) &= \bar{\alpha}_j(x, \omega) \Big|_{(x=x_{n+i}, \omega=\frac{v}{h})}, & j &= 0, 1, & i &= 2, 3, \dots, k, \\ \beta_{i,j}(v) &= \bar{\beta}_j(x, \omega) \Big|_{(x=x_{n+i}, \omega=\frac{v}{h})}, & j &= 0, 1, 2, \dots, k, & i &= 2, 3, \dots, k, \end{aligned}$$

тогда как остальные коэффициенты получаются из (7):

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}(v) &= \bar{\alpha}'_j(x, \omega) \Big|_{(x=x_{n+i-1}, \omega=\frac{v}{h})}, & j &= 0, 1, & i &= 1, k + 1, \\ \beta_{i,j}(v) &= \bar{\beta}'_j(x, \omega) \Big|_{(x=x_{n+i-1}, \omega=\frac{v}{h})}, & j &= 0, 1, 2, \dots, k, & i &= 1, k + 1. \end{aligned}$$

Замечание 2.1. При наличии подходящим образом полученных тригонометрических коэффициентов для (8), определяющих данный k -точечный метод, численное решение по реализации (1) дает $k + 1$ численных решений $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y'_k\}$. Численное решение y'_k включено в блок, поскольку оно необходимо для получения численных результатов для следующего блока на интервале интегрирования.

2.2. Трехточечный численный интегратор

В данном подпункте мы представляем практический трехточечный численный интегратор для прямого интегрирования начальных задач с периодическими решениями. Для простоты рассмотрим следующую скалярную начальную задачу:

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (9)$$

Пусть $k = 3$, как представлено в подпункте 2.1, определяет коэффициенты в (6) и (7) соответственно. Пусть $v = \omega h$. Тогда мы определим (6) в точках $x = \{x_{n+2}, x_{n+3}\}$ и (7) в точках $x = \{x_n, x_{n+3}\}$.

Основные методы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= \alpha_{2,0}(v)y_n + \alpha_{2,1}(v)y_{n+1} + h^2\beta_{2,0}(v)f_n + h^2\beta_{2,1}(v)f_{n+1} + h^2\beta_{2,2}(v)f_{n+2} + h^2\beta_{2,3}(v)f_{n+3}, \\ y_{n+3} &= \alpha_{3,0}(v)y_n + \alpha_{3,1}(v)y_{n+1} + h^2\beta_{3,0}(v)f_n + h^2\beta_{3,1}(v)f_{n+1} + h^2\beta_{3,2}(v)f_{n+2} + h^2\beta_{3,3}(v)f_{n+3}, \end{aligned}$$

а вспомогательные методы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} hy'_n &= \alpha_{1,0}(v)y_n + \alpha_{1,1}(v)y_{n+1} + h^2\beta_{1,0}(v)f_n + h^2\beta_{1,1}(v)f_{n+1} + h^2\beta_{1,2}(v)f_{n+2} + h^2\beta_{1,3}(v)f_{n+3}, \\ hy'_{n+3} &= \alpha_{4,0}(v)y_n + \alpha_{4,1}(v)y_{n+1} + h^2\beta_{4,0}(v)f_n + h^2\beta_{4,1}(v)f_{n+1} + h^2\beta_{4,2}(v)f_{n+2} + h^2\beta_{4,3}(v)f_{n+3}. \end{aligned}$$

Объединенные методы имеют блочный вид:

$$\mathcal{A}Y_m = \mathcal{B}Y_{m-1} + h^2\mathcal{C}F_{m-1} + h^2\mathcal{D}F_m, \quad (10)$$

где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и \mathcal{D} для $k = 3$ — это 4×4 матрицы с коэффициентами, которые являются функцией v вида

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{1,1}(v) & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{2,1}(v) & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_{3,1}(v) & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{4,1}(v) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{1,0}(v) & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_{2,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{4,0}(v) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{1,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{2,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{3,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{4,0}(v) & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(v) & \beta_{1,2}(v) & \beta_{1,3}(v) & 0 \\ \beta_{2,1}(v) & \beta_{2,2}(v) & \beta_{2,3}(v) & 0 \\ \beta_{3,1}(v) & \beta_{3,2}(v) & \beta_{3,3}(v) & 0 \\ \beta_{4,1}(v) & \beta_{4,2}(v) & \beta_{4,3}(v) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Y_{m-1} &= [y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, hy'_n]^\top, & F_{m-1} &= [f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, hf'_n]^\top, \\ Y_m &= [y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, hy'_{n+3}]^\top, & F_m &= [f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, hf'_{n+3}]^\top. \end{aligned}$$

Матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и \mathcal{D} имеют коэффициенты $\alpha_{i,j}(v)$ ($i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1$) и $\beta_{i,j}(v)$ ($i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, 3$), задаваемые в следующем виде:

$$\alpha_{1,0}(v) = -1, \quad \alpha_{1,1}(v) = 1,$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,0}(v) &= \frac{-5 \sin(v) v^2 - 6 \sin(v) + 6 \sin(2v) - 6v \cos(2v)}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\ &= -\frac{97}{360} - \frac{107}{10080} v^2 - \frac{629}{907200} v^4 - \frac{4633}{79833600} v^6 - \frac{399383}{72648576000} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1}(v) &= \frac{\left(\begin{array}{l} -12 \sin(2v) + 6v \cos(v) + 2 \sin(v) v^2 \\ +12v \cos(2v) + 5 \sin(2v) v^2 + 6 \sin(v) \end{array} \right)}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\ &= -\frac{19}{60} + \frac{29}{1680} v^2 + \frac{137}{151200} v^4 + \frac{859}{13305600} v^6 + \frac{68879}{12108096000} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,2}(v) &= \frac{\left(\begin{array}{l} 6 \sin(v) + 6 \sin(2v) - 5 \sin(v) v^2 \\ -12v \cos(v) - 2 \sin(2v) v^2 - 6v \cos(2v) \end{array} \right)}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\ &= \frac{13}{120} - \frac{3}{1120} v^2 + \frac{3}{11200} v^4 + \frac{19}{422400} v^6 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,3}(v) &= \frac{-6 \sin(v) + 6v \cos(v) + 2 \sin(v) v^2}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\ &= -\frac{1}{45} - \frac{1}{252} v^2 - \frac{109}{226800} v^4 - \frac{257}{4989600} v^6 - \frac{96373}{18162144000} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\alpha_{2,0}(v) = -1, \quad \alpha_{2,1}(v) = 2,$$

$$\begin{aligned} \beta_{2,0}(v) &= \frac{-2 \cos(v) - v^2 + 2}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{240} v^2 + \frac{1}{6048} v^4 + \frac{1}{172800} v^6 + \frac{1}{5322240} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{2,1}(v) &= \frac{4 \cos(v) + 2 \cos(v) v^2 - 4}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{120} v^2 - \frac{1}{3024} v^4 - \frac{1}{86400} v^6 - \frac{1}{2661120} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{2,2}(v) &= \frac{-2 \cos(v) - v^2 + 2}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{240} v^2 + \frac{1}{6048} v^4 + \frac{1}{172800} v^6 + \frac{1}{5322240} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\beta_{2,3}(v) = 0,$$

$$\alpha_{3,0}(v) = -2, \quad \alpha_{3,1}(v) = 3,$$

$$\begin{aligned} \beta_{3,0}(v) &= \frac{-4 \cos(v) - 2 v^2 + 4}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{120} v^2 + \frac{1}{3024} v^4 + \frac{1}{86400} v^6 + \frac{1}{2661120} v^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\beta_{3,1}(v) = \frac{4 \cos(v) v^2 + 6 \cos(v) - v^2 - 6}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{4} - \frac{1}{80} v^2 - \frac{1}{2016} v^4 - \frac{1}{57600} v^6 - \frac{1}{1774080} v^8 + \dots, \\
\beta_{3,2}(v) &= 1, \\
\beta_{3,3}(v) &= \frac{-2 \cos(v) - v^2 + 2}{2 \cos(v) v^2 - 2 v^2}, \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{240} v^2 + \frac{1}{6048} v^4 + \frac{1}{172800} v^6 + \frac{1}{5322240} v^8 + \dots, \\
\alpha_{4,0}(v) &= -1, \quad \alpha_{4,1}(v) = 1, \\
\beta_{4,0}(v) &= \frac{-6 \sin(v) + 6 \sin(2v) - 6v \cos(v) + 4 \sin(v) v^2}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\
&= \frac{19}{180} + \frac{41}{5040} v^2 + \frac{293}{453600} v^4 + \frac{2287}{39916800} v^6 + \frac{199571}{36324288000} v^8 + \dots, \\
\beta_{4,1}(v) &= \frac{\begin{pmatrix} -12 \sin(2v) + 6v \cos(2v) + 12v \cos(v) \\ +6 \sin(v) + 11 \sin(v) v^2 - 4 \sin(2v) v^2 \end{pmatrix}}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\
&= \frac{97}{120} - \frac{1}{672} v^2 - \frac{131}{302400} v^4 - \frac{193}{3801600} v^6 - \frac{128417}{24216192000} v^8 + \dots, \\
\alpha_{4,2}(v) &= \frac{\begin{pmatrix} 6 \sin(v) - 6v \cos(v) - 12v \cos(2v) \\ +6 \sin(2v) + 4 \sin(v) v^2 - 11 \sin(2v) v^2 \end{pmatrix}}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\
&= \frac{37}{30} - \frac{3}{140} v^2 - \frac{3}{2800} v^4 - \frac{13}{184800} v^6 - \frac{3953}{672672000} v^8 + \dots, \\
\beta_{4,3}(v) &= \frac{-6 \sin(v) + 6v \cos(2v) + 11 \sin(v) v^2}{12 \sin(v) v^2 - 6 \sin(2v) v^2} \\
&= \frac{127}{360} + \frac{149}{10080} v^2 + \frac{779}{907200} v^4 + \frac{1019}{15966720} v^6 + \frac{413033}{72648576000} v^8 + \dots.
\end{aligned}$$

Замечание 2.2. Отметим, что когда $v \rightarrow 0$ эти коэффициенты приводят к ошибкам вследствие вычитания почти равных чисел, которые могут влиять на численные результаты. Поэтому используется эквивалент ряда Тейлора для задач с небольшой частотой [31]. Также заметим, что коэффициенты $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ сводятся к коэффициенту соответствующего классического линейного многошагового метода при $v \rightarrow 0$.

2.3. Реализация

Для реализации многоточечного численного интегратора с угловой подгонкой ω интервал интегрирования $[a, b]$ делится с равным шагом h , $N \in \mathbb{Z}$, $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$, так что $N = \frac{b-a}{h}$. Следовательно, число блоков 3-точечного численного интегратора с тригонометрическими коэффициентами есть $M = \frac{N}{3}$. Для получения численных решений для первого блока с использованием (10) при $m = 1$, $n = 0$, $x_0 = a$ и y_0 первые численные решения $\{y_1, y_2, y_3, y'_3\}^T$ генерируются одновременно в подынтервале интегрирования $[x_1, x_3] = [a + h, a + 3h]$. Для получения численного решения для второго блока, $m = 2$, $n = 3$, с использованием предыдущей информации y_3 и z_3 множество $\{y_4, y_5, y_6, y'_6\}^T$ будет получено одновременно в подынтервале $[x_4, x_6] = [a + 4h, a + 6h]$.

Этот процесс повторяется для $m = 3, 4, 5, \dots, M$ и $n = 6, 9, 12, \dots, 3(M - 1)$, чтобы соответственно получить численные решения (1) во всей области интегрирования в неперекрывающихся подынтервалах $\{[x_1, x_3], [x_4, x_6], \dots\}$ без предикторов, в отличие от моделей предиктор–корректор (ПК). Это делает возможным “самостарт” численного метода и требует лишь задания начальных значений y_0 и y'_0 .

Для нелинейных систем метод Ньютона обычно реализуется символически с использованием численных свойств программного обеспечения Maple. Уравнение (10) обычно образует систему нелинейных уравнений $G(Y_m) = 0$, где Y_m представляет численный результат для каждого блока. Он будет получен с использованием итерационного процесса

$$Y_m^{(k+1)} = Y_m^{(k)} - J^{-1}(G(Y_m)^{(k)})[G(Y_m)^{(k)}], \quad (11)$$

где I — квадратная матрица размерности $(k + 1) \times (k + 1)$, $G(Y_m) = IY_m - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}Y_{m-1} - h^2\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}F_{m-1} - h^2\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}F_m = 0$, $J^{-1}(G(Y_m)^{(k)})$ — якобиан $G(Y_m)$, вычисляемый при $Y_m^{(k)}$, а $G(Y_m)^{(k)}$ — вычисление $G(Y_m)$ при $Y_m^{(k)}$ (см. [22]).

3. Локальная ошибка усечения и порядок метода

Теперь установим основную локальную ошибку усечения (10). Поскольку многоточечный численный интегратор состоит из обобщенных линейных многошаговых методов с тригонометрическими коэффициентами, мы можем связать предлагаемый трехточечный численный интегратор (10) с линейным разностным оператором $\mathcal{L}_\omega[y(x_n); h]$, когда $y(x)$ является теоретическим решением задачи, задаваемой как

$$\mathcal{L}_\omega[y(x_n); h] = [\mathcal{L}_\omega^{y_{n+2}}, \mathcal{L}_\omega^{y_{n+3}}, \mathcal{L}_\omega^{y'_n}, \mathcal{L}_\omega^{y'_{n+3}}]^\top, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega^{y_{n+2}}[y(x_n); h] &= y(x_n + 2h) - \alpha_{2,0}(v)y(x_n) - \alpha_{2,1}(v)y(x_n + h) - \\ &h^2 \sum_{j=0}^3 \beta_{2,j}(v)y''(x_n + jh), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega^{y_{n+3}}[y(x_n); h] &= y(x_n + 3h) - \alpha_{3,0}(v)y(x_n) - \alpha_{3,1}(v)y(x_n + h) - \\ &h^2 \sum_{j=0}^3 \beta_{3,j}(v)y''(x_n + jh), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega^{hy'_n}[y(x_n); h] &= hy'(x_n + h) - \alpha_{1,0}(v)y(x_n) - \alpha_{1,1}(v)y(x_n + h) - \\ &h^2 \sum_{j=0}^3 \beta_{1,j}(v)y''(x_n + jh), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega^{hy'_{n+3}}[y(x_n); h] &= hy'(x_n + 3h) - \alpha_{4,0}(v)y(x_n) - \alpha_{4,1}(v)y(x_n + h) - \\ &h^2 \sum_{j=0}^3 \beta_{4,j}(v)y''(x_n + jh). \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что $y(x_n)$ достаточно дифференцируема, используем разложения в ряды Тейлора $y(x + jh)$, $y'(x + jh)$ и $y''(x + jh)$ в точке x_n , и подставим коэффициенты $\alpha_{ij}(v)$ и $\beta_{ij}(v)$ в уравнения (13)–(15) и (16) соответственно (см. [10, 22, 29]). Тогда мы получим алгебраический порядок и локальную ошибку усечения (см. таблицу 1).

Таблица 1. Алгебраический порядок и локальная ошибка усечения (Л.Т.Е)

Метод	Алгебраический порядок (p)	$\mathcal{L}_\omega[y(x_n); h]$
$\mathcal{L}_\omega^{y_{n+2}}[y(x_n); h]$	4	$-\frac{1}{240}h^6 (y^{(6)}(x) + \omega^2 y^{(4)}(x))$
$\mathcal{L}_\omega^{y_{n+3}}[y(x_n); h]$	4	$-\frac{1}{80}h^6 (y^{(6)}(x) + \omega^2 y^{(4)}(x))$
$\mathcal{L}_\omega^{hy'_n}[y(x_n); h]$	4	$\frac{7}{480}h^6 (y^{(6)}(x) + \omega^2 y^{(4)}(x))$
$\mathcal{L}_\omega^{hy'_{n+3}}[y(x_n); h]$	4	$-\frac{11}{480}h^6 (y^{(6)}(x) + \omega^2 y^{(4)}(x))$

Из таблицы 1 видно, что порядок предлагаемого метода — по крайней мере $p \geq 4$. Поэтому мы можем смело утверждать, что метод является совместимым, поскольку его алгебраический порядок $p \geq 4$ (см. [22]).

4. Анализ устойчивости метода

При анализе устойчивости этого нового метода следует исходить из теории устойчивости Коулмана [6] и Коулмана и Иксару [7].

Применим новый метод (10) к скалярному тестовому уравнению

$$y'' = -\lambda^2 y. \tag{17}$$

Положим $z = \lambda h$ и используем элементарную алгебру. Тогда блочная схема (10) примет следующий вид:

$$\Lambda^{(0)} Y_m = \Lambda^{(1)} Y_{m-1}, \tag{18}$$

где

$$\Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} -\alpha_{1,1}(v) + z^2\beta_{1,1}(v) & z^2\beta_{1,2}(v) & z^2\beta_{1,3}(v) & 0 \\ -\alpha_{2,1}(v) + z^2\beta_{2,1}(v) & 1 + z^2\beta_{2,2}(v) & z^2\beta_{2,3}(v) & 0 \\ -\alpha_{3,1}(v) + z^2\beta_{3,1}(v) & z^2\beta_{3,2}(v) & 1 + z^2\beta_{3,3}(v) & 0 \\ -\alpha_{4,1}(v) + z^2\beta_{4,1}(v) & z^2\beta_{4,2}(v) & z^2\beta_{4,3}(v) & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

и

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{1,0}(v) - z^2\beta_{1,0}(v) & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_{2,0}(v) - z^2\beta_{2,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,0}(v) - z^2\beta_{3,0}(v) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{4,0}(v) - z^2\beta_{4,0}(v) & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Следовательно, если переписать (18) в виде $Y_m = R(z; v)Y_{m-1}$, то $R(z; v) = [\Lambda^{(0)}]^{-1}[\Lambda^{(1)}]$ — матрица усиления, определяющая область устойчивости метода.

С некоторыми модификациями определений в статьях [6, 7, 21] мы даем следующие определения.

Определение 4.1 [21]. Область $\Gamma = (z, v)$ является областью устойчивости, если в этой области спектральный радиус $\rho(R(z, v)) \leq 1$.

Определение 4.2 [7]. Если λ и ω такие, что $z = \lambda h$ и $v = \omega h$, основной интервал периодичности метода — это самый большой интервал $(0, b^2)$, такой что $|R(z; v)| < 1$ для $0 < z < b$, если $|R(z; v)| < 1$ для всех $z > 0$, то метод является P -устойчивым.

График устойчивости $z - v$, построенный для трехточечного численного интегратора с тригонометрическими коэффициентами, представлен на рисунок 1.

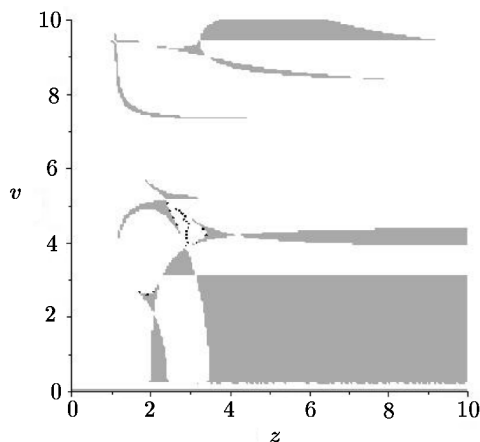


Рис. 1. $z - v$ график для трехточечного численного интегратора: $k = 3$

Замечание 4.1 (Замечание по P -устойчивости). Здесь отметим, что трехточечный численный интегратор с тригонометрическими коэффициентами, полученный в п. 2.1, не является P -устойчивым, поскольку интервал периодичности $(0, b^2)$ является конечным для $|R_{nm}(z^2; v)| < 1$.

5. Экспериментальные задачи

Для иллюстрации вычислительной эффективности нового метода применим его к некоторым линейным и нелинейным задачам с периодическими решениями и сравним наши результаты с результатами методов, существующих в литературе. Вычислительная эффективность метода демонстрируется с использованием графика максимальной абсолютной ошибки (точности) в зависимости от числа функциональных вычислений (NFCN). Отметим также, что для любого блока m получено три численных результата на интервале интегрирования без предикторов. Оценки частоты, используемые при реализации этого метода, взяты из ссылок в других статьях, хотя может использоваться метод выбора частоты, который изучался Иксару с соавторами [19] и Рамосом и Виго-Агиаром [33].

Задача 5.1 (Нелинейная задача Штремеля–Вайнера [25]). Рассмотрим начальную задачу второго порядка, задаваемую так:

$$\begin{aligned} y'' &= (y - z)^3 + 6368y - 6384z + 42 \cos 10x, & y(0) &= 0.5, & y'(0) &= 0, \\ z'' &= -(y - z)^3 + 12768y - 12784z + 42 \cos 10x, & z(0) &= 0.5, & z'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

с точным решением $y(x) = z(x) = \cos 4x - \frac{\cos 10x}{2}$.

Численные результаты, полученные при помощи нового метода на интервале $[0, 10]$, сравниваются с трехстадийным методом тригонометрической подгонки [25] (TIRK3), методом RADAU5 в книге Хайрера и Ваннера [16] и блочным методом тригонометрической подгонки типа Нумерова (TBNM) [21]. Точность определяется с использованием глобальных ошибок конечной точки для y -компоненты (Err), тогда как вычислительная эффективность используется в терминах вызовов функции (NFCN). Подробные численные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2. Численные результаты при $\omega = 4$

Новый метод		TBNM [21]		TIRK3 [25]		RADAU5	
NFCN	Err	NFCN	Err	NFCN	Err	NFCN	Err
600	$3.0 \cdot 10^{-5}$	602	$2.1 \cdot 10^{-4}$	907	$2.5 \cdot 10^{-4}$	853	$2.2 \cdot 10^{-4}$
1200	$1.9 \cdot 10^{-6}$	1202	$1.3 \cdot 10^{-5}$	1288	$6.6 \cdot 10^{-6}$	1208	$4.4 \cdot 10^{-4}$
1500	$7.8 \cdot 10^{-7}$	1602	$4.1 \cdot 10^{-6}$	1682	$7.0 \cdot 10^{-6}$	1639	$6.0 \cdot 10^{-6}$

Замечание 5.1. Из табл. 2 видно, что новый метод в общем работает лучше, чем методы TBNM [21], TIRK3 [25] и вычисления с использованием кода RADAU5 в [16] с наименьшим числом функциональных вычислений. Точность представлена в зависимости от процессорного времени для метода тригонометрической подгонки Нумерова (см. статью Джатора [21]). С точки зрения процессорного времени (CPU time) наш метод быстрее (см. рис. 2). Это обусловлено тем фактом, что многоточечные методы функциональной подгонки дают три численных результата при любой блочной реализации.

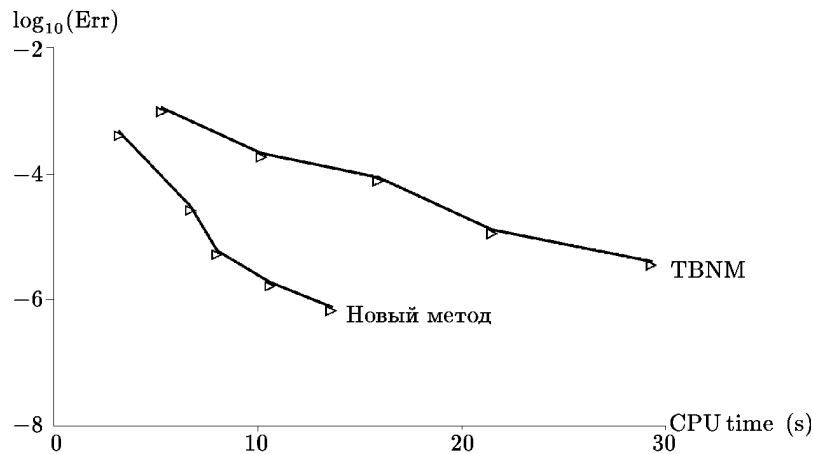


Рис. 2. Кривые эффективности для задачи 5.1

Задача 5.2 (Нелинейная возмущенная система, см. статью Фанга с соавторами [11]). Также проверим численную работу нашего метода с использованием нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка, задаваемых в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_1'' + 25y_1 + \epsilon(y_1^2 + y_2^2) &= \epsilon\phi_1(x), & y_1(0) &= 1, & y_1'(0) &= 0, \\ y_2'' + 25y_2 + \epsilon(y_1^2 + y_2^2) &= \epsilon\phi_2(x), & y_2(0) &= 1, & y_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

с

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \sin(5x + x^2) + 2\cos(x^2) + (25 - 4x^2)\sin(x^2), \\ \phi_2(x) &= 1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \sin(5x + x^2) - 2\sin(x^2) + (25 - 4x^2)\cos(x^2) \end{aligned}$$

с точным решением, задаваемым как

$$y_1(x) = \cos(5x) + \epsilon \sin(x^2), \quad y_2(x) = \sin(5x) + \epsilon \cos(x^2).$$

Эта система, представляющая периодическое движение постоянной частоты с небольшим возмущением переменной частоты, решается в области $[0, 10]$ при $\epsilon = 10^{-3}$. Численные

результаты, полученные при помощи нашего метода и сравниваемые с методами тригонометрической подгонки Рунге–Кутты–Нистрема пятого порядка, представленные в статьях Франко [14] и Фанга с соавторами [11] с получением максимальной глобальной ошибки ($\text{Err} = \max |y(x) - y_n|$), имеются в табл. 3.

Таблица 3. Численные результаты при $\omega = 5$

Новый метод		Франко [14]			Фанг с соавторами [11]		
M	$-\log_{10}(\text{Err})$	N	непригодные	$-\log_{10}(\text{Err})$	N	непригодные	$-\log_{10}(\text{Err})$
17	3.42	42	15	2.82	29	6	2.78
30	6.04	86	7	4.96	88	9	5.33
52	11.56	260	5	7.16	262	8	7.85

Замечание 5.2. На основании табл. 3 наш новый метод превосходит другие численные методы с подходящим фиксированным размером шага. Несмотря на то, что предполагается, что методы Рунге–Кутты–Нистрема лучше работают, поскольку они точны, когда решения представляют собой линейную комбинацию тригонометрических функций, реализуемых на переменном шаге, наш метод все же работает лучше при меньшем числе блоков.

Задача 5.3 (Волновое уравнение Франко [13]). Задача, представляющая струну, колеблющуюся со скоростью ω , задается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\omega^2 - 2)u = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 5, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(1-x), \quad u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где начальные условия и граничные условия Дирихле подобраны таким образом, что решение задается путем $u(x, t) = x(1-x)\cos\omega t$.

Преобразуем (23) с помощью полудискретизации по пространственной переменной с использованием центральной разностной схемы второго порядка с параметром $\Delta x = \frac{1}{20}$ и преобразуем (23) в систему ОДУ следующего вида:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + k \mathbf{U} = 0, \quad (24)$$

где \mathbf{U} — 19-мерный вектор с элементами $(u_1, u_2, \dots, u_{19})$, а K — матрица (положительно определенная) жесткости с 19 различными собственными значениями в области [61, 223]. Численные вычисления при $\omega = 5$ для $t_{\text{end}} = 5$ сравнивались с методами $M_4\left(\frac{1}{300}, \frac{1}{56}\right)$, представленными в работе Франко [13], методами $M_4\left(\frac{1}{300}, 0\right)$, разработанными в статье Чаула и Рао [4], методом $M_4(0, 0)$ из работы Чаула [3] и очень сложным кодом LSODE для начальных задач, реализованном Хайндмаршем [17]. Рисунок 3 представляет ошибку нормы при $t = 5$ в логарифмическом масштабе в зависимости от вычислительной эффективности методов в терминах функциональных вычислений (NFCN).

Замечание 5.3. Из рис. 3 следует, что новый многоточечный алгоритм функциональной подгонки более эффективен, чем другие методы с уменьшенными функциональными вычислениями относительно накопленной ошибки при $t = 5$.

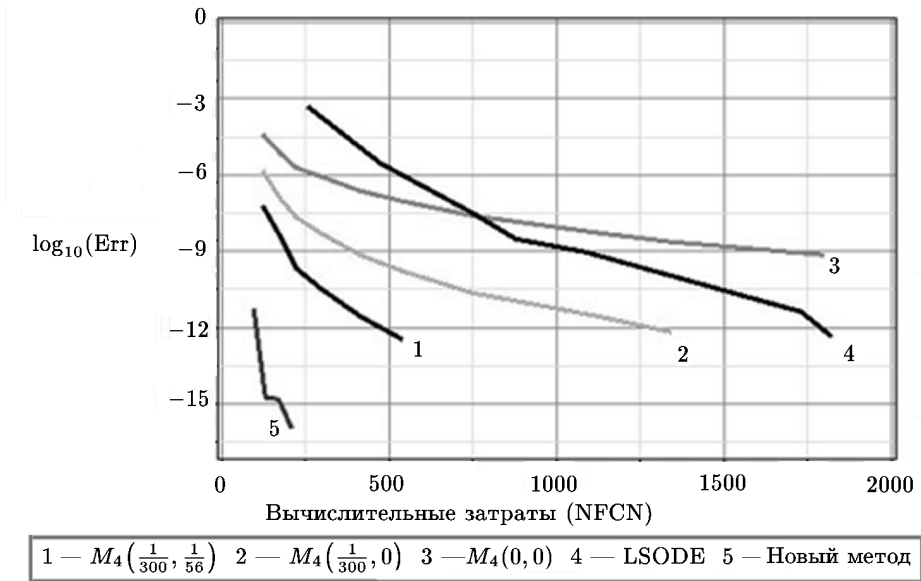


Рис. 3. График $\log_{10}(\text{Err})$ в зависимости от вычислительных затрат (NFCN)

Задача 5.4 (Линейная задача Крамаржа, см. статью Нгуэна с соавторами [25]). Также решим линейную задачу Крамаржа с многоточечным алгоритмом функциональной подгонки. Уравнение было решено для подтверждения устойчивости метода

$$y'' = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 2(\alpha - 1) \\ 1 - \alpha & 1 - 2\alpha \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 100, \quad (25)$$

с точным решением $y(t) = (2 \cos t, -\cos t)$.

Собственные значения дифференциального уравнения — это -1 и α . Решение (25) имеет две частоты: 1 и $\sqrt{\alpha}$, но начальные условия исключают высокочастотную компоненту $\sqrt{\alpha}$. Для $\alpha = 2500$ численные результаты, полученные нашим новым методом для различных размеров шага, сравниваются с гибридными методами тригонометрической подгонки Нгвейна и Джатора [26] и неявным методом тригонометрической подгонки Рунге–Кутты из статьи Нгуэна с соавторами [25], посвященной задачам Крамаржа. Перейдем к табл. 4, где численные результаты рассматриваются с точки зрения абсолютной ошибки для $h = \left\{ \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5} \right\}$, чтобы показать, что метод неустойчив для $h \in [0, 1.04]$.

Таблица 4. Численные результаты при $\omega = 1$

Новый метод			Нгвейн и Джатор [26]			Нгуэн с соавторами [25]		
M	Ошибка	FNC_s	N	Ошибка	FNC_s	N	Ошибка	FNC_s
4	$2.12 \cdot 10^{-19}$	32	10	$8.3 \cdot 10^{-15}$	144	73	$3.3 \cdot 10^{-12}$	327
10	$1.22 \cdot 10^{-19}$	80	30	$5.0 \cdot 10^{-14}$	364	142	$0.9 \cdot 10^{-11}$	707
14	$5.55 \cdot 10^{-15}$	112	40	$7.2 \cdot 10^{-14}$	484	170	$3.7 \cdot 10^{-12}$	811

Замечание 5.4. Из таблицы 4 ясно, что наш новый метод самый точный из трех методов. Отметим, что наш метод также требует меньшего числа вызовов функции и меньшего числа шагов для достижения точности на задаче 5.4, а табл. 5 показывает, что метод становится неустойчивым при уменьшении h . Это означает, что метод эффективен для большего размера шага и поэтому интегрирование задачи происходит быстрее.

Таблица 5. Численные результаты при $\omega = 1$

x	$h = \frac{\pi}{2}$	$h = \frac{\pi}{3}$	$h = \frac{\pi}{4}$	$h = \frac{\pi}{5}$
2π	$0.356 \cdot 10^{-15}$	$0.830 \cdot 10^{-15}$	$0.701 \cdot 10^{-15}$	$0.165 \cdot 10^{-15}$
4π	$0.705 \cdot 10^{-15}$	$0.430 \cdot 10^{-16}$	$0.129 \cdot 10^{-13}$	$0.275 \cdot 10^{-12}$
6π	$0.160 \cdot 10^{-14}$	$0.132 \cdot 10^{-12}$	$0.112 \cdot 10^{-10}$	$0.486 \cdot 10^{-8}$
8π	$0.152 \cdot 10^{-14}$	$0.181 \cdot 10^{-10}$	$0.201 \cdot 10^{-7}$	$0.218 \cdot 10^{-5}$
10π	$0.224 \cdot 10^{-12}$	$0.271 \cdot 10^{-9}$	$0.277 \cdot 10^{-5}$	$0.222 \cdot 10^{-2}$

6. Выводы

Представлена процедура получения многоточечного численного интегратора с тригонометрическими коэффициентами с использованием многошагового метода коллокации. Получен трехточечный численный интегратор. Показано, что метод работает лучше при использовании подходящей оценки частоты задачи. Представлены некоторые свойства метода, такие как алгебраический порядок, локальная ошибка усечения и область устойчивости. Реализация некоторых начальных задач с периодическими решениями показала, что при меньшем числе шагов наш метод эффективен и имеет хорошую точность по сравнению с некоторыми другими методами, описанными в литературе. Кроме того, предлагаемый многоточечный численный интегратор применяется по блокам. Он самозапускается и реализуется без предикторов. Таким образом, нам не нужно использовать другие методы для получения стартовых решений.

В будущем могут быть построены многоточечные методы высокого порядка с использованием подхода, представленного в данной статье. Кроме того, общий многоточечный численный интегратор может быть усовершенствован путем включения некоторых гибридных точек, так что условия общего порядка могут быть получены с использованием подхода В-рядов, описанного Ли и Вангом [23]. Будет также изучен вопрос различного выбора оценок частоты, исследовавшийся в работах Иксару с соавторами [19] и Рамоса и Виго-Агуара [33], используемого для выбора наилучшей подходящей частоты для многоточечных методов с тригонометрическими коэффициентами.

Благодарности

Авторы благодарны покойному проф. А.Б. Софолувэ за его идею и предложения. Авторы выражают искреннюю благодарность анонимным рецензентам за конструктивные комментарии и ценные предложения.

Литература

1. **Aceto L., Ghelardoni P., and Magherini C.** PGSCM: a family of P-stable boundary value methods for second-order initial value problems // J. of Comput. and Appl. Math. — 2012. — Vol. 236, iss. 16. — P. 3857–3868.
2. **Brugnano L., Trigiante D.** Solving Differential Problems by Multistep Initial and Boundary Value Methods. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
3. **Chawla M.M.** Canonical Runge–Kutta–Nyström methods: Thesis Ph. D. — de Valladolid: Universidad de Valladolid, 1992.

4. **Chawla M.M., Rao P.S.** A Numerov-type method with minimal phase-lag for the integration of second order periodic initial-value problems. II: explicit methods // *J. of Comput. and Appl. Math.* — 1986. — Vol. 15. — P. 329–337.
5. **Chawla M.M., Rao P.S., and Neta B.** Two-step fourth-order P-stable methods with phase lag of order six for $y' = f(t, y)$ // *J. of Comput. and Appl. Math.* — 1986. — Vol. 6. — P. 233–236.
6. **Coleman J.P.** Numerical methods for $y'' = f(x, y)$ via rational approximations for the cosine // *IMA J. of Numerical Analysis.* — 1989. — Vol. 9. — P. 145–165.
7. **Coleman J.P., Ixaru L.G.** P-stability and exponential fitting methods for $y'' = f(x, y)$ // *IMA J. of Numerical Analysis.* — 1996. — Vol. 16. — P. 179–199.
8. **Ehigie J.O., Okunuga S.A., and Sofoluwe A.B.** 3-point block methods for direct integration of second order ordinary differential equations // *Advances in Numerical Analysis.* — 2011 — Vol. 2011. — (Article ID 513148). — DOI: 10.1155/2011/513148.
9. **Ehigie J.O., Jator S.N., Sofoluwe A.B., and Okunuga S.A.** Boundary value technique for initial value problems with continuous second derivative multistep method of Enright // *Comput. and Appl. Math.* — 2014. — Vol. 33. — P. 81–93. — DOI: 10.1007/s40314-013-0044-4.
10. **Ehigie J.O., Okunuga S.A.** A stiffly stable second derivative block multistep formula with Chebyshev collocation points for stiff problems // *Int. J. of Pure and Appl. Math.* — 2014. — Vol. 96, № 4. — P. 457–481.
11. **Fang Y., Song Y., and Wu X.** A robust trigonometrically fitted embedded pair for perturbed oscillators // *J. of Comp. and Appl. Math.* — 2009. — Vol. 225, iss. 2. — P. 347–355.
12. **Fatunla S.O.** Block methods for second order IVPs // *Int. J. of Comp. Math.* — 1991. — Vol. 41. — P. 55–63.
13. **Franco J.M.** An explicit hybrid method of Numerov-type for second-order periodic initial value problems // *J. of Comp. and Appl. Math.* — 1995. — Vol. 59. — P. 79–90.
14. **Franco J.M.** Runge–Kutta–Nyström methods adapted to the numerical integration of perturbed oscillators // *Comp. Physics Communications.* — 2002. — Vol. 147, iss. 3. — P. 770–787.
15. **Gautschi W.** Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials // *Numerische Mathematik.* — 1961. — № 3. — P. 381–397.
16. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems. Second Revised Edition. — Germany: Springer Verlag, 1996.
17. **Hindmarsh A.C.** Odepack, a systematized collection of ODE solvers // *Scientific Computing / R.S. Stepleman et al.* — North-Holland, Amsterdam, 1983. — Vol. 1. — P. 55–64.
18. **Ixaru L.Gr., Vanden Berghe G.** Exponential Fitting. — Kluwer: Academic Publishers, 2004.
19. **Ixaru L.Gr., Vanden Berghe G., and De Meyer H.** Frequency evaluation in exponential fitting multistep algorithms for ODEs // *J. of Comput. and Appl. Math.* — 2002. — Vol. 140, iss. 1–2. — P. 423–434.
20. **Jator S.N.** Solving second order initial value problems by a hybrid multistep methods without predictors // *Appl. Math. and Comput.* — 2010. — Vol. 217. — P. 4036–4046.
21. **Jator S.N., Swindle S., and French R.** Trigonometrically fitted block Numerov type method for $y'' = f(x, y, y')$ // *Numer. Algor.* — 2013. — Vol. 62, № 1. — P. 13–26.
22. **Lambert J.D.** Computational Methods in Ordinary Differential Equations. — New York: John Wiley and Sons, 1973.
23. **Li J., Wang X.** Multistep hybrid methods for special second-order differential equations $y'' = f(t, y(t))$ // *Numer. Algor.* — 2016. — Vol. 73, iss. 3. — P. 711–733. — DOI: 10.1007/s11075-016-0114-y.
24. **Lyche T.** Chebyshevian multistep methods for ordinary differential equations // *Numerische Mathematik.* — 1972. — Vol. 19. — P. 65–75.

25. **Nguyen H.S., Sidje R.B., and Cong N.H.** Analysis of trigonometrically fitted implicit Runge–Kutta methods // J. of Comput. and Appl. Math.—2007.— Vol. 198, iss. 1.— P. 187–207.
26. **Ngwane F.F., Jator S.N.** Solving oscillatory problems using a block hybrid trigonometrically fitted method with two off-step point // Electronic J. of Differential Equations.— 2013.— Vol. Conference 20.— P. 119–132.
27. **Paternoster B.** Runge–Kutta (Nyström) methods for ODEs with periodic solutions based on trigonometric polynomials // Appl. Numer. Math.—1998.— Vol. 28.— P. 401–412.
28. **Paternoster B.** Present state-of-the-art in exponential fitting. A contribution dedicated to Liviu Ixaru on his 70th birthday // Comput. Physics Communications.— 2012.— Vol. 183, № 12.— P. 2499–2512.
29. **Ramos H., Kalogiratou Z., Monovalis Th., and Simos T.E.** An optimized two-step hybrid block method for solving general second order initial value problem // Numer. Algor.— 2016.— Vol. 72, iss. 4.— P. 1089–1102.— DOI: 10.1007/s11075-015-0081-8.
30. **Shampine L.F., Watts H.A.** Block implicit one-step methods // Math. of Comput.— 1969.— Vol. 23.— P. 731–740.
31. **Simos T.E.** An exponentially-fitted Runge–Kutta method for the numerical integration of initial-value problems with periodic or oscillating solutions // Comput. Physics Communications.— 1998.— Vol. 115, iss. 1.— P. 1–8.
32. **Simos T.E., Dimas E., and Sideridis A.B.** A Runge-kutta method for the numerical integration of special second-order periodic initial-value problems // J. of Comput. and Appl. Math.— 1994.— Vol. 51, iss. 3.— P. 317–326.
33. **Vigo-Aguiar J., Ramos H.** On the choice of the frequency in trigonometrically-fitted methods for periodic problems // J. of Comput. and Appl. Math.— 2015.— Vol. 277, iss. 15.— P. 94–105.
34. **Wang Z., Zhao D., Dai Y., and Wu D.** An improved trigonometrically fitted P-stable Obrechhoff method for periodic initial-value problems // Proc. of the Royal Society A.— 2005.— Vol. 461.— P. 1639–1658.

*Поступила в редакцию 23 мая 2016 г.,
в окончательном варианте 6 февраля 2017 г.*