10. **Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры.— М.; Л.: Физматгиз, 1963.
11. **Солодовников В. Н.** Изгиб консоли со встроенным концом // Динамика упруго-пластических систем.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987.— Вып. 80.

г. Новосибирск *Поступила 30/VIII 1988 г.*

УДК 517.946:531.36

К. С. Матвийчук

О ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА С ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе впервые решена задача о технической устойчивости на конечном, бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости [1—18] пространственного движения магистрального трубопровода с прямолинейной осью при свободном или шарнирном его закреплении, через который протекает жидкость при заданном давлении [19—22]. Трубопровод имеет по всей длине переменную регулярную площадь сечения [21]. Жидкость считается идеальной. Изучаемая динамическая система описывается нелинейной краевой задачей, включающей систему трех дифференциальных уравнений в частных производных [23—25] с переменными коэффициентами, которые получены на основе применения теории плоских сечений длинных цилиндрических оболочек (пустотелых стержней) в предположении, что поперечные движения слабо влияют на продольные. Указаны достаточные условия технической устойчивости по заданной векторной мере, выраженные через параметры, содержащие заданные давление в жидкости и скорость жидкости на входе трубопровода. Заранее задаваемый как угодно большой конечный промежуток времени динамического поведения трубопровода зависит от малого параметра, который в свою очередь зависит от основных параметров системы, в том числе от внутреннего давления движущейся жидкости и ее скорости на входе трубы. Найдены условия, при которых заведомо наступает потеря устойчивости системы с фиксированным давлением внутри жидкости. Соответствующее критическое значение скорости жидкости на входе трубопровода выражено через основные параметры динамического процесса. Для решения задачи применен прямой метод Ляпунова [20, 25—27] совместно с методом сравнения [6—18,28].

Проблема устойчивости магистральных трубопроводов имеет важное практическое значение, ей посвящены многие научные исследования [19—22, 27]. Так как такие задачи весьма сложны, то во многих работах прибегают к упрощающим предположениям и свойства устойчивости таких систем в большинстве случаев изучаются на основе применения различных методов непосредственного интегрирования. Однако нет сведений об исследованиях по технической устойчивости трубопроводов. Достаточные условия устойчивости в смысле Ляпунова сходных систем получены в [20, 27]. Результаты настоящей работы существенно отличаются от свойств устойчивости [20, 27] не только тем, что условия технической устойчивости рассматриваемого динамического процесса изучаются в пространственной нелинейной постановке и на любом конечном, наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния процесса не зависят от условий мажорации последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. Предложенный здесь подход можно применить для изучения технической устойчивости в более сложных задачах о динамике трубопроводов, не прибегая к упрощающим предположениям, например в случае искривленных с различными способами граничных закреплений трубопроводов, при наличии параметрических нагружений или турбулентности транспортируемой по трубопроводу жидкости и др. При этом необязательность условий отрицательной определенности полной производной функционала Ляпунова в силу исходной краевой задачи в данном подходе в отличие от устойчивости в смысле Ляпунова расширяет область значений на параметры исследуемого процесса. Метод сравнения позволяет полнее учесть факторы, влияющие на устойчивость.

1. Нелинейная краевая задача о движении трубопровода с протекающей жидкостью. Рассматриваем длинную гибкую трубу с протекающей по ней идеальной жидкостью при условиях, указанных ниже. Считаем, что трубопровод представляет однородное изотропное тело, как оболочка деформируется геометрически нелинейно [24]. Введем обозначения: $m_1(s)$ — масса единицы длины трубы, зависящая от скалярной координаты s точек осевой линии трубы; $m_2(s)$ — масса жидкости, отнесенная к единице длины трубы; ρ_1, ρ_2 — плотности материала трубы и жидкости; $F_1(s)$, $F_2(s)$ — площади произвольного сечения трубы и отверстия в ней;

l — длина трубы; h — усредненная ее толщина; P — давление в жидкости; $\mathbf{f}$ — вектор, характеризующий распределение силы взаимодействия между трубопроводом и жидкостью, который в случае трубы с переменной по координате s площадью отверстия равен [21] $\mathbf{f} = -P(\partial F_2(s)/\partial s)\mathbf{e}_1 + \tilde{f}_2\mathbf{e}_2 + \tilde{f}_3\mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы текущей во времени конфигурации системы при малых деформациях; $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ направлены по главным осям поперечного сечения трубы; $\mathbf{w} = w\mathbf{e}_1$ — вектор относительной скорости жидкости, при этом учтем, что $w_0F_{20} = mF_2(s)$, $m_{20}w_0 = m_2w$; при малой деформации и конечных углах поворота базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ текущей конфигурации трубы считаем взаимно ортогональными и направленными по главным осям инерции трубопровода для любой точки его осевой линии; $\mathbf{q}$ — вектор внешних распределенных сил, приложенных к трубе; γ_1, γ_2 — векторы распределенных сил, вызванных силовыми полями соответственно для трубы и жидкости; $\mathbf{Q}^{(1)}$ — вектор внутренних усилий: $\mathbf{Q}^{(1)} = Q_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + Q_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + Q_3^{(1)}\mathbf{e}_3$; $Q_1^{(1)}$ — осевое усилие; $Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}$ — перерезывающие усилия; $\mathbf{M}$ — вектор внутренних моментов: $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$; M_1 — крутящий момент; M_2, M_3 — изгибающие моменты; $\mathbf{v}$ — вектор абсолютной скорости центра тяжести элемента ds трубопровода; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; $\mathbf{e}_{10}$, $\mathbf{e}_{20}$, $\mathbf{e}_{30}$ — ортогональная система единичных векторов при невозмущенном равновесном состоянии системы; вектор $\mathbf{e}_{10}$ направлен вдоль осевой линии в сторону движения жидкости; считаем, что $\mathbf{e}_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$) не зависят от s, что будет отвечать рассмотрению невозмущенного трубопровода с прямолинейной осью; $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — распределенный момент, действующий на трубопровод, стационарный по s, при этом напомним, что поток идеальной несжимаемой жидкости не создает моментов, действующих на трубопровод.

Для записи нелинейных скалярных уравнений движения трубопровода с протекающей жидкостью воспользуемся [21] соответствующим векторным уравнением для усилий и векторным уравнением равновесия моментов системы в общем виде

$$(1.1)\qquad [m_1(s) + m_2(s)]\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_2(s)\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}w + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma},$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(1)} - [PF_2(s) + m_2(s)w^2(s)]\,\mathbf{e}_1,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2,\quad \boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\right);$$

$$(1.2)\qquad \partial\mathbf{M}/\partial s = \mathbf{Q}\times\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\mu}.$$

Спроектируем систему (1.1), (1.2) на орты ортогонального базиса $\mathbf{e}_{10}$, $\mathbf{e}_{20}$, $\mathbf{e}_{30}$ невозмущенного состояния трубы, используя линейную аппроксимацию вектора перемещений согласно известному подходу [24]. Так как рассматривается длинная труба, допускаем, что продольные движения системы будут существенно влиять на изгибные движения, но не наоборот. Таким образом, после надлежащих преобразований с помощью соответствующих соотношений связи [24] получаем в безразмерных величинах нелинейную систему уравнений движения, записанную через перемещения:

$$(1.3)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\tilde{w}_1\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\,\partial s} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}\left[1 - (\tilde{p}_1 + \tilde{w}_1^2)\right] + f_1(s)^{-1}\frac{\partial f_1(s)}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \tilde{q}_1 + \tilde{\gamma}_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2\tilde{w}_i\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\,\partial s} = -\frac{\partial^4 u_i}{\partial s^4} - (\tilde{p}_i + \tilde{w}_i^2)\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} + A_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) +$$

$$+ A_i^{(2)}\frac{\partial f_1(s)}{\partial s}\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_i}{\partial s}(\bar{q}_i + \bar{\gamma}_i) + \tilde{q}_i + \tilde{\gamma}_i,\quad i = 2, 3.$$

Трубопровод рассматривается при граничных условиях, отвечающих свободному или шарнирному закреплению его концов [22, 23]:

(1.4) $$u_j(t, 0) = u_j(t, 1) = 0, \ j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}(t, 0) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}(t, 1) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и начальных условиях

(1.5) $$u_j(t, s)\big|_{t=t_0} = k_j(s), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial u_j(t, s)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = g_j(s), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь $\rho = \{m_{20}f_2(s)/[m_{10}f_1(s) + m_{20}f_2(s)]\}^{1/2}$; $\tilde{p}_1 = PF_{20}f_2(s)/EF_{10}f_1(s)\delta$; $\tilde{p}_2 = PF_{20}f_2(s)l/EI_3(s)\delta$; $\tilde{p}_3 = PF_{20}f_2(s)l^2/EI_2(s)\delta$; $\tilde{q}_1 = q_1l^2/EF_{10}f_1(s)h\delta$; $\tilde{q}_2 = q_2l^4/EI_3(s)h\delta$; $\tilde{q}_3 = q_3l^4/EI_2(s)h\delta$; $\bar{q}_2 = q_1l^3/EI_3(s)\delta$; $\bar{q}_3 = q_1l^3/EI_2(s)\delta$; $\tilde{\gamma}_1 = \gamma^{(1)}\, l^2/EF_{10}f_1(s)h\delta$; $\tilde{\gamma}_2 = \gamma^{(2)}l^4/EI_3(s)h\delta$; $\tilde{\gamma}_3 = \gamma^{(3)}l^4/EI_2(s)h\delta$; $\bar{\gamma}_2 = \gamma^{(1)}\, l^3/EI_3(s)\delta$; $\bar{\gamma}_3 = \gamma^{(1)}l^3/EI_2(s)\delta$; $\tilde{w}_1 = w_0(m_{20}/Ef_1(s)f_2(s)\delta)^{1/2}$; $\tilde{w}_2 = w_0l(m_{20}/Ef_2(s)I_3(s)\delta)^{1/2}$; $\tilde{w}_3 = w_0l(m_{20}/Ef_2(s)I_2(s)\delta)^{1/2}$; $A_2^{(1)} = F_{10}f_1(s)\,hl/I_3(s)$; $A_2^{(2)} = F_{10}lh/I_3(s)$; $A_3^{(1)} = F_{10}f_1(s)\,lh/I_2(s)$; $A_3^{(2)} = F_{10}lh/I_2(s)$; $\delta = (1-\nu)\,[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$; $I_2(s)$, $I_3(s)$ — соответствующие моменты инерции поперечного сечения трубы. Площади пересечения трубы и полости в ней $F_1(s) = F_{10}f_1(s)$, $F_2(s) = F_{20}f_2(s)$. Кроме того, $m_i(s) = \rho_iF_i(s) = \rho_iF_{i0}f_i(s) = m_{i0}f_i(s)$, $i = 1, 2$. Нуль в индексах относится к величинам на входе трубы. Так как $f_1(s)$, $f_2(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$ — функции переменного s, то уравнения (1.3) имеют переменные по s коэффициенты, что порождает дополнительные трудности в изучении исходного процесса.

Предполагаем, что при заданных функциях $k_j(s)$, $g_j(s)$ в (1.5), удовлетворяющих необходимым условиям согласования на границе трубопровода, у краевой задачи (1.3)—(1.5) есть однозначное решение в классе непрерывных функций по t, s, имеющих непрерывные производные по t, s необходимых порядков.

2. Достаточные условия технической устойчивости. В качестве порождающей системы [15, 16] для (1.3) берем нелинейную однородную (т. е. при $q_j = 0$, $\gamma^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, 3$) систему, соответствующую системе (1.3), и рассмотрим ее с краевыми условиями (1.4), (1.5). Порождающая система имеет тривиальное решение $u_j(t, s) \equiv 0$ ($j = 1, 2, 3$), которое полагаем отвечающим невозмущенному равновесному состоянию трубы. Исследуем техническую устойчивость динамического поведения системы при возмущениях, описываемых краевой задачей (1.3)—(1.5). Для этого далее воспользуемся вторым методом Ляпунова и одновременно методом сравнения. Выберем векторный функционал

(2.1) $$V[u_1, u_2, u_3, t] = \{V_j[u_j, t], j = 1, 2, 3\},$$

$$V_1[u_1, t] = \int_0^t ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 - (\tilde{p}_1 + \tilde{w}_1^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$V_i[u_i, t] = \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}\right)^2 - (\tilde{p}_i + \tilde{w}_i^2)\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2\right], \quad i = 2, 3.$$

Полную производную для (2.1) в силу краевой задачи (1.3)—(1.5) после надлежащих упрощений запишем в виде

(2.2) $$\frac{dV_1[u_1, t]}{dt} = 2\int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial(\tilde{p}_1 + \tilde{w}_1^2)}{\partial s} + f_1(s)^{-1}\frac{\partial f_1(s)}{\partial s}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(2\frac{\partial\left(\tilde{w}_1\rho\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)}{\partial s} + \tilde{q}_1 + \tilde{\gamma}_1\right)\right],$$

$$\frac{dV_i[u_i,t]}{dt}=2\int_0^1 ds\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}\left[\frac{\partial u_i}{\partial s}\left(\frac{\partial(\widetilde{p}_i+\widetilde{w}_i^2)}{\partial s}+A_i^{(1)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}+A_i^{(2)}\frac{\partial f_i(s)}{\partial s}\frac{\partial u_i}{\partial s}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\bar{q}_i+\bar{\gamma}_i\right)+A_i^{(1)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}\frac{\partial u_i}{\partial s}+2\frac{\partial}{\partial s}\left(\widetilde{w}_i\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\right]+\frac{\partial u_i}{\partial t}(\widetilde{q}_i+\widetilde{\gamma}_i)\right\},\quad i=2,3.$$

Рассмотрим векторную меру

(2.3) $$\rho(u)=\{\rho_1(u_1),\rho_2(u_2),\rho_3(u_3)\},\ \rho_1(u_1)=$$

$$=\sup_s(u_1)^2+\int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$\rho_i(u_i)=\sup_s(u_i)^2+\sup_s\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\right)^2+\int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2\right],\quad i=2,3.$$

Используя неравенства [20]

$$\int_0^1 ds\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}\right)^2\geqslant\pi^2\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2\geqslant\pi^4\int_0^1 ds u_j^2,\ \int_0^1 ds\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}\right)^2\geqslant\sup_s\left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2,$$

$$\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2\geqslant\sup_s u_j^2,\quad j=1,2,3,$$

находим оценку снизу для $V_j[u_j,\ t]$ ($j=1,\ 2,\ 3$) вдоль решения задачи (1.3)—(1.5):

(2.4) $$2V_1[u_1(t,s),t]\geqslant 2\int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2-(\widetilde{p}_1+\widetilde{w}_1^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2\right]+$$

$$+\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2-\int_0^1 ds\,(\widetilde{p}_1+\widetilde{w}_1^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\geqslant[1-(p_1+w_1^2)]\sup_s(u_1)^2+$$

$$+[1-(p_1+w_1^2)]\int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right]\equiv[1-(p_1+w_1^2)]\,\rho(u_1(t,s)),$$

$$3V_i[u_i(t,s),t]\geqslant\pi^2\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\right)^2-(p_i+w_i^2)\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\right)^2+2\int_0^1 ds\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}\right)^2-$$

$$-\frac{2}{\pi^2}(p_i+w_i^2)\int_0^1 ds\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}\right)^2+[1-(p_i+w_i^2)]\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant[1-(p_i+w_i^2)]\,\rho_i(u_i(t,s)),\ i=2,3,$$

$$p_j=\sup_s(\widetilde{p}_j),\ w_j=\sup_s(\widetilde{w}_j),\quad j=1,2,3.$$

Отсюда имеем

(2.5) $$V_1[u_1(t,\ s),\ t]\geqslant 2^{-1}[1-(p_1+w_1{}^2)]\rho_1(u_1(t,s)),$$

$$V_i[u_i(t,\ s),\ t]\geqslant 3^{-1}[1-(p_i+w_i{}^2)]\rho_i(u_i(t,\ s)),\ i=2,\ 3.$$

Таким образом, функционалы $V_j[u_j(t,\ s),\ t]$ ($j=1,\ 2,\ 3$) положительно определены относительно меры $\rho(u)$, если выполняются условия $0\leqslant p_j+w_j{}^2<1$, $j=1,\ 2,\ 3$. Мы исследуем случай

(2.6) $$0<p_j+w_j{}^2<1,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Тогда величины $\mu_j = 1 - (p_j + w_j^2)$ $(j = 1, 2, 3)$ имеют смысл малого положительного параметра: $\mu_j \in (0, 1]$ $(j = 1, 2, 3)$, с помощью которых зададим заранее как угодно большой, но конечный промежуток времени T, в течение которого рассмотрим динамическое поведение системы (1.3)—(1.5), а именно, положим $T = [t_0, L\bar{\mu}^{-1}]$, где $t_0 \geqslant 0$, L — заданная как угодно большая постоянная, в общем зависящая от параметров, характеризующих надежность трубопровода [24, 27]; выберем $\bar{\mu}^{-1} = \min\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1}\}$. Используя свойство монотонности произведения для любых натуральных величин, для (2.5) получаем

$$\text{(2.7)} \qquad \frac{1}{(\mu_1 + t)^2} V_1[u_1(t, s), t] \geqslant \frac{\mu_1}{2(\mu_1 + t)^2} \rho_1(u_1(t, s)),$$

$$\frac{1}{(\mu_i + t)^2} V_i[u_i(t, s), t] \geqslant \frac{\mu_i}{3(\mu_i + t)^2} \rho_i(u_i(t, s)), \quad i = 2, 3.$$

Обозначим правые части в (2.2) вдоль решения исходной краевой задачи (1.3)—(1.5) соответственно через $N_j(t, s)$, $j = 1, 2, 3$. Используя (2.2), (2.5), (2.7), образуем функции

$$\text{(2.8)} \quad \overline{\Phi}_1(t, \tilde{p}_1, \tilde{w}_1) = N_1(t, s) - \frac{\mu_1}{2(\mu_1 + t)^2} \rho_1(u_1(t, s)), \overline{\Phi}_i(t, \tilde{p}_i, \tilde{w}_i) =$$

$$= N_i(t, s) - \frac{\mu_i}{3(\mu_i + t)^2} \rho_i(u_i(t, s)), \quad i = 2, 3.$$

Справедливы неравенства

$$\text{(2.9)} \qquad \overline{\Phi}_1(t, \tilde{p}_1, \tilde{w}_1) \leqslant N_1(t, s) - \frac{\mu_1}{2(\mu_1 + t)^2} \sup_s |u_1(t, s)|^2,$$

$$\overline{\Phi}_i(t, \tilde{p}_i, \tilde{w}_i) \leqslant N_i(t, s) - \frac{\mu_i}{3(\mu_i + t)^2} \sup_s |u_i(t, s)|^2, \quad i = 2, 3.$$

Пусть $\Phi_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j)$ — известные ограниченные непрерывные функции переменного t, зависящие от $\tilde{p}_j$, $\tilde{w}_j$, как от параметров, которые мажорируют правые части неравенств (2.9). В частности, вдоль решения задачи (1.3)—(1.5) можно положить $\Phi_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j) = \sup_s |N_j(t,s)| - \frac{\mu_j}{\beta(\mu_j + t)^2} \times \sup_s |u_j(t, s)|$, $j = 1$, $\beta = 2$; $j = 2, 3$, $\beta = 3$.

Вдоль решения исходной краевой задачи (1.3)—(1.5) получаем

$$\text{(2.10)} \quad \frac{dV_j[u_j(t, s), t]}{dt} \leqslant \frac{1}{(\mu_j + t)^2} V_j[u_j(t, s), t] + \Phi_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Неравенства (2.10) позволяют рассмотреть систему из трех линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений сравнения достаточно простого вида [6—18, 28]

$$\text{(2.11)} \qquad \frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{(\mu_j + t)^2} y_j + \Phi_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j), \quad j = 1, 2, 3$$

при начальных условиях

$$\text{(2.12)} \qquad y_j(t_0) = y_j^0 \geqslant V_j[u_j(t_0), t_0], \; j = 1, 2, 3.$$

Отметим, что однородная система уравнений, соответствующая системе (2.11), распадается на три независимых скалярных дифференциальных уравнения первого порядка. Следовательно, каждое уравнение в (2.11) интегрируется независимо от остальных двух. Очевидно, в (2.12) имеем

$$(2.13)\qquad V_1[u_1(t_0), t_0] = \int_0^1 ds \left\{\left(\frac{\partial k_1(s)}{\partial s}\right)^2 [1-(\tilde p_1 + \tilde w_1^2)] + g_1^2(s)\right\},$$

$$V_i[u_i(t_0), t_0] = \int_0^1 ds \left\{\left(\frac{\partial^2 k_i(s)}{\partial s^2}\right)^2 - [\tilde p_i + \tilde w_i^2]\left(\frac{\partial k_i(s)}{\partial s}\right)^2 + g_i^2(s)\right\}, \quad i = 2, 3$$

в предположении, что функции $k_j(s)$, $g_j(s)$ $(j = 1, 2, 3)$ обладают необходимыми свойствами регулярности по $s \in [0, 1]$. Для системы (2.11), учитывая ее свойства, находим непрерывное на промежутке T решение

$$(2.14)\qquad y_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j) = \exp[-1/(\mu_j + t)] \int_{t_0}^t d\tau \exp[1/(\mu_j + \tau)]\, \Phi_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j) +$$

$$+ y_j^0 \exp[1/(\mu_j + t_0)] \exp[-1/(\mu_j + t)], \quad j = 1, 2, 3,$$

зависящее от параметров $\tilde p_j$, $\tilde w_j$. Согласно известной теореме о дифференциальных неравенствах (см. [28]), имеем при $t \in T$ вдоль решения исходной краевой задачи (1.3) — (1.5) систему оценок

$$(2.15)\qquad V_j[u_j(t, s), t] \leqslant y_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j),\ j = 1, 2, 3.$$

Учитывая свойства непрерывности функций $y_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ на выбранном промежутке времени T, из (2.15) получим техническую устойчивость на конечном промежутке времени рассматриваемой системы по заданной мере $\rho(u)$.

Если функции $\Phi_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j)$ таковы, что интегралы $\int_0^t \exp[1/(\mu_j+\tau)] \times \Phi_j(\tau, \tilde p_j, \tilde w_j)\, d\tau$ $(j = 1, 2, 3)$ являются непрерывными ограниченными функциями на любом временном промежутке $T \subseteq T_1 \equiv [t_0, +\infty)$ и имеют рост на каждом $T \subseteq T_1$ не быстрее, чем соответственно функции $\exp[1/(\mu_j + t)]$, то, как видно из (2.14), исходная система (1.3)—(1.5) технически устойчива по мере $\rho(u)$ на бесконечном промежутке времени, т. е. в этом случае можно указать наперед заданные непрерывные ограниченные функции $B_j(t)$, определенные на каждом $T \subseteq T_1$ такие, что имеют место оценки

$$(2.16)\qquad \int_{t_0}^t d\tau \exp[1/(\mu_j + \tau)]\, \Phi_j(\tau, \tilde p_j, \tilde w_j) \leqslant B_j(t) \exp[1/(\mu_j + t)], \quad j = 1, 2, 3$$

при удовлетворении неравенств

$$B_j(t) + y_j^0 \exp[1/(\mu_j + t)] \exp[-1/(\mu_j + t)] \geqslant 0,$$
$$j = 1, 2, 3.$$

Кроме того, если выполняется условие

$$(2.17)\qquad \exp[1/(\mu_j + t)] \geqslant \int_{t_0}^t \exp[1/(\mu_j + \tau)]\, \Phi_j(\tau, \tilde p_j, \tilde w_j)\, d\tau, \quad j = 1, 2, 3$$

при всех $T \subseteq T_1$, то исходная система (1.3)—(1.5) также технически устойчива по заданной мере на бесконечном промежутке времени T_1, ибо в этом случае при $t \to +\infty$

$$(2.18)\qquad y_j(t, \tilde p_j, \tilde w_j) \to 1 + y_j^0 \exp[1/(\mu_j + t_0)],$$
$$j = 1, 2, 3.$$

Если исходная система (1.3) —(1.5) технически устойчива на T_1 и, кроме того, выполняются условия

(2.19) $$y_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \ j = 1, 2, 3,$$

то система (1.3)—(1.5) технически асимптотически устойчива по мере $\rho(u)$. В частности, условие (2.19) будет выполнено, если справедливо

(2.20) $$\exp\left[-1/(\mu_j + t)\right]\int_{t_0}^{t}\exp\left[1/(\mu_j + \tau)\right]\Phi_j\left(\tau, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j\right)d\tau \to$$

$$\to -y_j^0\exp\left[1/(\mu_j + t_0)\right], \ t \to +\infty, \ j = 1, 2, 3.$$

Итак, (2.16)—(2.20) совместно с (2.6) представляют достаточные условия соответствующих свойств технической устойчивости рассматриваемого трубопровода.

Найдем критическую скорость жидкости $w_0^{\text{кр}}$ на входе трубопровода при заданном давлении в жидкости. Учитывая, что $1 - (p_k + w_k{}^2) \leqslant \leqslant 1 - (\tilde{p}_k + \tilde{w}_k{}^2)$, решим систему уравнений

(2.21) $$\tilde{p}_j + \tilde{w}_j{}^2 = 1, \ j = 1, 2, 3.$$

Из (2.21) находим

$$w_0^{\text{кр}} = \{f_2(s)\left[3EF_{10}f_1(s)I_2(s)I_3(s)\delta - PF_{20}f_2(s)(I_2(s)I_3(s) + \right.$$

$$\left. + l^2F_{10}f_1(s)\left[I_2(s) + I_3(s)\right])\right]\}^{1/2}\{m_{20}\left[I_2(s)I_3(s) + l^2F_{10}f_1(s)(I_2(s) + I_3(s))\right]\}^{-1/2}.$$

Следовательно, полученные достаточные условия технической устойчивости по заданной мере $\rho(u)$ не выполняются, если

(2.22) $$p_j + w_j{}^2 \geqslant 1, \ j = 1, 2, 3.$$

Если при начальных условиях (2.12) и заданных оценках функций $y_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j)$ справедливы неравенства

(2.23) $$V_j[u_j(t, s), t] > y_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

хотя бы для одного момента t в рассматриваемом соответственно конечном или бесконечном промежутке времени, то, очевидно, система (1.3)—(1.5) будет технически неустойчивой в конечном или бесконечном интервале времени. В частности, как вытекает из оценок (2.15), одно из условий технической неустойчивости системы (1.3)—(1.5) есть

(2.24) $$y_j(t, \tilde{p}_j, \tilde{w}_j) \to +\infty \quad (j = 1, 2, 3)$$

при $t \in T$ или $t \in T_1$. Например, если в (2.14) начальный момент $t_0 = 0$, то (2.24) может иметь место при $\mu_j \to 0$ $(j = 1, 2, 3)$ при любых $t \in T$ или $t \in T_1$.

Легко видеть, что влияние заданного давления в протекающей стационарно жидкости подобно действию осевого сжимающего усилия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. **Карачаров К. А., Пилютик А. Г.** Введение в техническую теорию устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1972.
3. **Байрамов Ф. Д.** О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1974.— № 2.
4. **Сиразетдинов Т. К.** Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последействием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложение.— Новосибирск: Наука, 1981.
5. **Кириченко Н. Ф.** Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972.
6. **Матвийчук К. С.** Замечания к методу сравнения для системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой // Укр. мат. журн.— 1982.— Т. 34, № 4.
7. **Матвийчук К. С.** Принцип сравнения для уравнений системы связанных тел с элементами демпфирования // Там же.— № 5.

8. **Матвийчук К. С.** К исследованию технической устойчивости системы связанных тел с элементами демпфирования // Прикл. механика.— 1983.— Т. 19, № 5.
9. **Матвийчук К. С.** О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 11.
10. **Матвийчук К. С.** О технической устойчивости некоторых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика.— 1985.— Т. 21, № 8.
11. **Матвийчук К. С.** О технической устойчивости нелинейных динамических систем с медленными и быстрыми движениями // ДАН УССР. Сер. А.— 1986.— № 2.
12. **Матвийчук К. С.** О неравенствах для решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— № 5 (39).
13. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 2.
14. **Матвийчук К. С.** Исследование устойчивости прямолинейных трубопроводов с транспортируемой жидкостью // Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф.— Ивано-Франковск, 1985.
15. **Матвийчук К. С.** Об условиях устойчивости нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Вычисл. и прикл. математика.— 1986.— № 58.
16. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 11.
17. **Матвийчук К. С.** Условия технической устойчивости нелинейных эволюционных систем // Вычисл. и прикл. математика.— 1988.— № 66.
18. **Матвийчук К. С.** О технической устойчивости параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1987.— № 26.
19. **Феодосьев В. И.** О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб.— 1951.— Т. 10.
20. **Мовчан А. А.** Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // ПММ.— 1965.— Т. 29, № 4.
21. **Светлицкий В. А.** Механика трубопроводов и шлангов.— М.: Машиностроение, 1982.
22. **Стейн Р. А., Тобринер М. В.** Колебания трубы с протекающей по ней жидкостью // Прикл. механика.— 1970.— № 4.
23. **Скоробогатько В. Я.** Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев: Наук. думка, 1980.
24. **Власов В. В.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
25. **Зубов В. И.** Методы А. М. Ляпунова и их применение.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
26. **Валеев К. Г., Финин Г. С.** Построение функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1981.
27. **Leipholz H.** Stability of elastic systems.— Alphen aan den Rijn: Sijthoff et Noordhoff, 1980.
28. **Szarski J.** Differential inequalities.— Warszawa: PVN, 1967.

г. Киев *Поступила 7/VI 1988 г., в окончательном варианте — 19/VIII 1988 г.*

УДК 620.171.5

В. П. Тырин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

Анализируются способы определения коэффициента интенсивности напряжений K_{I} по экспериментально найденным перемещениям в области вершины трещины. Для измерения перемещений используется метод голографической интерферометрии при записи голограмм по схеме на встречных пучках. С целью повышения качества голограмм и точности рекомендуется на поверхность конструкции наносить высокочастотный металлизированный растр. Описана методика нахождения K_{I} по раскрытию трещины. Приведены примеры исследования тарировочного образца и оребренной панели с усталостной трещиной.

Коэффициент интенсивности напряжений при изучении конструкций с трещинами может быть найден по экспериментально измеренным перемещениям в области вершины трещины [1—3]. Для этого используются