

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И. Е. Таранов

(Харьков)

Рассмотрено распространение малых возмущений в среде, которая может неоднородно и изотропно намагничиваться под действием электромагнитного поля. Показано, что в такой среде возможны звуковые волны того же вида, что и в среде с постоянной магнитной восприимчивостью. Однако фазовые скорости быстрых и медленных магнитозвуковых волн могут приобретать мнимые значения, так что в сильных магнитных полях возникает явление неустойчивости. Исследованы диаграммы фазовых скоростей для пара- и диамагнетиков, для среды с магнитным насыщением; рассмотрен случай несжимаемой среды.

Уравнения движения среды, которая может неоднородно и изотропно намагничиваться в электромагнитном поле, могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \rho T \frac{d}{dt} \left(s + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH \right) &= \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + \frac{\nu_m}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla (p + \psi) + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B}) + M \nabla H + \eta_1 \Delta \mathbf{v} + \left(\eta_2 + \frac{1}{3} \eta_1 \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad \left(\psi = \int_0^H \left[M - \rho \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{T, H} \right] dH \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь τ_{ik} — тензор вязких напряжений; η_1, η_2 — постоянные коэффициенты первой и второй вязкости; $\nu_m = c^2 / 4\pi\sigma$ — магнитная вязкость; принято, что $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}(\rho, T, H)$, причем функция намагниченности

$$M(\rho, T, H) \equiv \frac{H}{4\pi} [\mu(\rho, T, H) - 1]$$

считается известной (μ — магнитная проницаемость среды), и $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$.

Рассмотрим распространение малых возмущений в такой среде.

Пусть невозмущенное состояние среды характеризуется постоянными значениями ее параметров $\rho_0, \nu_0, T_0, s_0, p_0, \mathbf{B}_0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 &\equiv p_\rho, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 \equiv p_s, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_0 \equiv T_\rho, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_0 \equiv T_s \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial H} \right)_0 &\equiv \mu_H, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_0 \equiv \mu_\rho, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_0 \equiv \mu_T \end{aligned}$$

(принято, что уравнение состояния среды можно записать в формах $p = p(\rho, s), T = T(\rho, s)$).

Выберем систему отсчета так, что $\nu_0 = 0$, а вектор \mathbf{B}_0 лежит в плоскости xy .

Рассматриваются плоские волны, так что

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'(x, t), \quad T = T_0 + T'(x, t), \dots \quad (2)$$

причем квадратами возмущений ρ' , \mathbf{v}' , T' , ... будем всюду пренебрегать.

Тогда из третьего и четвертого уравнений системы (1) можно получить $Bx = B_0x$.

Поле $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu(\rho, T, H)$ в среде получит возмущение за счет неоднородности намагничивания, так что в рассматриваемом приближении это возмущение будет линейной функцией возмущений ρ' , T' , \mathbf{V}' . Учитывая, что вектор $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0 / \mu_0$ лежит в плоскости xy , получаем

$$\begin{aligned} H_x' &= -\frac{B_x \mu_\rho}{\mu^2 + \mu_H B} \rho' - \frac{B_x \mu_T}{\mu^2 + \mu_H B} T' - \frac{B_x B_y \mu_H}{\mu B (\mu^2 + \mu_H B)} B_y' \\ H_y' &= -\frac{B_y \mu_\rho}{\mu^2 + \mu_H B} \rho' - \frac{B_y \mu_T}{\mu^2 + \mu_H B} T' + \frac{\mu^2 B + \mu_H B_x^2}{\mu B (\mu^2 + \mu_H B)} B_y' \\ H_z' &= B_z' / \mu_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем индекс нуль у величин, характеризующих невозмущенное состояние среды, отброшен.

Заметим, что зависимость возмущения \mathbf{H}' от ρ' , T' , \mathbf{V}' не учитывалась в работе [2], где рассматривались волны в несжимаемой ферромагнитной жидкости. В работе [3] рассмотрены звуковые волны, исходя из системы уравнений, в которых не учитывается магнитокалорический эффект.

Подставляя в систему (1) выражения (2) и (3) и отбрасывая квадраты возмущений, получаем уравнения возмущенного движения, которые запишем в форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + x_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} = d_{ik} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \quad (4)$$

Здесь

$$u_1 \equiv \rho', \quad u_2 \equiv s', \quad u_3 = v_y', \quad u_4 = v_x', \quad u_5 = B_y', \quad u_6 = v_z', \quad u_7 = B_z'$$

не равные нулю компоненты матриц $\|x_{ik}\|$ и $\|d_{ik}\|$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} x_{14} &= \rho, \quad x_{23} = \mu \mu_T m B_x B_y [1 + T_s (s_T^* - m \mu_T^2 B^2)]^{-1} \\ x_{24} &= [\mu_T \rho m B^2 (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) - \mu \mu_T m B_y^2 - \rho (s_\rho^* + s_T^* T_\rho)] \times \\ &\quad \times [1 + T_s (s_T^* - m \mu_T^2 B^2)]^{-1} \\ x_{31} &= \mu m (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) B_x B_y, \quad x_{32} = \mu m \mu_T T_s B_x B_y \\ x_{35} &= -m (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B) B_x \\ x_{41} &= (p_\rho + \psi_\rho + \psi_T T_\rho) \rho^{-1} + m (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) (\rho \mu_\rho B^2 - \mu B_y^2) \\ x_{42} &= (p_s + \psi_T T_s) \rho^{-1} + m \mu_T T_s (\rho \mu_\rho B^2 - \mu B_y^2) \\ x_{45} &= m B_y (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B - \rho \mu_\rho) \\ x_{53} &= -B_x, \quad x_{54} = B_y, \quad x_{67} = -B_x / 4\pi \rho \mu, \quad x_{76} = -B_x \\ d_{12} &= [\lambda T_\rho / \rho T + 4\pi \rho m^2 \mu^2 \mu_T v_m B_y^2 (\mu_\rho + \mu_T T_\rho)] \times \\ &\quad \times [1 + T_s (s_T^* - m \mu_T^2 B^2)]^{-1} \\ d_{22} &= [\lambda T_s / \rho T + 4\pi \rho m^2 \mu^2 \mu_T^2 v_m T_s B_y^2] [1 + T_s (s_T^* - m \mu_T^2 B^2)]^{-1} \\ d_{25} &= -4\pi \rho m^2 \mu \mu_T v_m B_y (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B) [1 + T_s (s_T^* - m \mu_T^2 B^2)]^{-1} \\ d_{33} &= \eta_1 / \rho, \quad d_{44} = \eta_2 / \rho + 4\eta_1 / 3\rho \\ d_{51} &= -4\pi \rho \nu m B_y m (\mu_\rho + T_\rho \mu_T), \quad d_{52} = -4\pi \rho \nu m m B_y \mu_\rho T_s \\ d_{55} &= 4\pi \rho \nu m (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B), \quad d_{66} = \eta_1 / \rho, \quad d_{77} = \nu_m / \mu \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$m = [4\pi\rho\mu(\mu^2 + \mu_H B)]^{-1}$$

$$s^* = \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, H} H dH, \quad s_T^* = \left(\frac{\partial s^*}{\partial T} \right)_0, \quad s_\rho^* = \left(\frac{\partial s^*}{\partial \rho} \right)_0$$

В дальнейшем рассмотрим малые возмущения без учета диссипации, т. е. будем считать $d_{ik} = 0$. Отыскивая решение системы (4) в виде

$$u_i = u_i^0 \exp [i(kx - \omega t)],$$

получаем, что фазовая скорость волны $\lambda = \omega / k$ является собственным числом матрицы $\|x_{ik}\|$, а амплитуды u_i^0 в этой волне пропорциональны компонентам правого собственного вектора $\mathbf{r}^{(\lambda)} = (r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \dots, r_7^{(\lambda)})$, соответствующего данному значению λ ($x_{ik} r_k^{(\lambda)} = \lambda r_i^{(\lambda)}$). Величины λ суть корни характеристического уравнения

$$|x_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0 \quad (6)$$

а $r_i^{(\lambda)}$ пропорциональны соответствующим минорам матрицы $\|x_{ik} - \lambda \delta_{ik}\|$. Раскрывая определитель (6), получаем характеристическое уравнение системы (4) в виде

$$\lambda(\lambda^2 - B_x^2 / 4\pi\rho\mu)(\lambda^4 - 2C_1\lambda^2 + C_2) = 0 \quad (7)$$

где

$$2C_1 = B_y x_{45} - B_x x_{35} + \rho x_{41} + x_{23} x_{32} + x_{24} x_{42} \quad (8)$$

$$C_2 = \rho B_x \begin{vmatrix} x_{31} x_{35} \\ x_{41} x_{45} \end{vmatrix} - \rho x_{23} \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix} + (x_{23} B_y + x_{24} B_x) \begin{vmatrix} x_{32} x_{35} \\ x_{42} x_{45} \end{vmatrix}$$

Уравнение (7) имеет семь корней, дающих фазовые скорости следующих волн:

1) $\lambda^{(1)} = 0$ — энтропийная волна, не распространяющаяся относительно среды; соответствующий правый собственный вектор имеет вид

$$\mathbf{r}^{(1)} = \left(\begin{vmatrix} x_{32} x_{35} \\ x_{42} x_{45} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{35} x_{31} \\ x_{45} x_{41} \end{vmatrix}, 0, 0, \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix}, 0, 0 \right) \quad (9)$$

2) $\lambda^{(2, 3)} = \pm B_x / \sqrt{4\pi\rho\mu} \equiv \pm A_x$ — две альфеновских волны; соответствующий альфеновским волнам правый собственный вектор имеет вид

$$\mathbf{r}^{(2, 3)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -B_x / \lambda^{(2, 3)})$$

3) $\lambda_{\pm}^{(4, 5)} = \pm \sqrt{C_1 + (C_1^2 - C_2)^{1/2}}$ — две быстрые магнитозвуковые волны в магнетике и

$$\lambda_{\pm}^{(6, 7)} = \pm \sqrt{C_1 - (C_1^2 - C_2)^{1/2}}$$

— две медленные магнитозвуковые волны в магнетике.

Соответствующие этим волнам правые собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{r}^{(4, 5)} = \mathbf{r}(\lambda_{+}^{(4, 5)}), \quad \mathbf{r}^{(6, 7)} = \mathbf{r}(\lambda_{-}^{(6, 7)})$$

где вектор-функция $\mathbf{r}(\lambda)$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} r_1(\lambda) &= \rho \left(x_{41} \lambda^2 - B_x \begin{vmatrix} x_{31} x_{35} \\ x_{41} x_{45} \end{vmatrix} + x_{23} \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix} \right) \\ r_2(\lambda) &= \lambda^2 (x_{23} x_{31} + x_{24} x_{41}) - (B_x x_{24} + B_y x_{23}) \begin{vmatrix} x_{31} x_{35} \\ x_{41} x_{45} \end{vmatrix} \\ r_3(\lambda) &= \lambda \left(\lambda^2 x_{31} - B_y \begin{vmatrix} x_{31} x_{35} \\ x_{41} x_{45} \end{vmatrix} - x_{24} \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix} \right) \\ r_4(\lambda) &= \lambda \left(\lambda^2 x_{41} - B_x \begin{vmatrix} x_{31} x_{35} \\ x_{41} x_{45} \end{vmatrix} + x_{23} \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix} \right) \\ r_5(\lambda) &= \lambda^2 \begin{vmatrix} E_y E_x \\ x_{31} x_{41} \end{vmatrix} + (B_x x_{24} + B_y x_{23}) \begin{vmatrix} x_{31} x_{32} \\ x_{41} x_{42} \end{vmatrix} \\ r_6(\lambda) &= r_7(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

В случае однородно намагничивающейся среды ($\mu = 1$) формулы (5) — (10) переходят в соответствующие формулы работы [4].

Из формул (5) — (10) следуют существенные отличия рассматриваемых звуковых волн от волн в немагнитной среде.

Во-первых, в энтропийной волне испытывают возмущения не только ρ и s , но и поперечная компонента поля B_y , так что эта волна не является теперь чисто продольной.

Во-вторых, фазовые скорости $\lambda_+^{(4,5)}$ и $\lambda_-^{(6,7)}$ быстрых и медленных магнитозвуковых волн в магнетике могут приобретать чисто мнимые значения, и, следовательно, в намагничивающейся среде возможно возникновение неустойчивости подобно той, которая исследовалась [5] в плазме с поперечным и продольным давлением. При этом система (4) становится частично эллиптической, а движения среды в таком состоянии неустойчивости, по-видимому, не могут быть описаны системой (1).

Явление неустойчивости в намагничивающейся среде может возникать, если какой-либо из коэффициентов C_1 , C_2 в уравнении (7) становится отрицательным. Заметим, что в случае немагнитной среды ($\mu = 1$) имеем

$$2 C_1 = A^2 + a^2 > 0, \quad C_2 = A_x^2 a^2 \geq 0 \quad (A^2 = B^2 / 4\pi\mu)$$

так что в обычной магнитной гидродинамике явление неустойчивости не могло быть отмечено.

Приведем примеры.

В качестве первой иллюстрации распространения звуковых волн в намагничивающейся среде рассмотрим идеальный непроводящий ($\text{rot } \mathbf{H} = 0$) газ, который в слабых магнитных полях удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} (\mu - 1) / \mu &= C\rho / T \quad (\text{формула Моссоги}) \\ p &= \rho RT, \quad s = c_v \ln(p / \rho^\kappa) \quad (\kappa = c_p / c_v, R = c_p - c_v) \end{aligned}$$

Для такой среды в силу общих формул (5) получаем для отличных от нуля компонент матрицы $\|x_{ik}\|$

$$\begin{aligned} x_{14} &= \rho, \quad x_{23} = - \frac{(\mu - 1) B_x B_y}{4\pi\rho\mu T (1 + \beta)} \\ x_{24} &= \frac{(\mu - 1) B^2 (1 - \kappa + \sin^2 \vartheta)}{4\pi\rho\mu T (1 + \beta)}, \quad x_{41} = \frac{a^2}{\rho} \\ x_{42} &= (\kappa - 1)T, \quad x_{45} = - (\mu - 1) B_y / 4\pi\rho\mu, \quad x_{53} = - B_x, \quad x_{54} = B_y \end{aligned}$$

где

$$a^2 = p_\rho = \kappa p / \rho, \quad B_y = B \sin \vartheta$$

$$\alpha = H / a \sqrt{4 \pi \rho}, \quad \beta = \kappa \mu (\mu - 1) (\mu - 1) \alpha^2.$$

При этом, поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, то $v_z' = B_z' = 0$ и матрица $\|x_{ik}\|$ становится матрицей пятого порядка. В силу (8) имеем

$$2C_1 = a^2 \left[1 - \frac{\beta(2+\beta-\kappa)}{\kappa(\kappa-1)(1+\beta)} \left(\frac{(\kappa-1)^2}{2+\beta-\kappa} + \sin^2 \vartheta \right) \right], \quad C_2 = 0$$

Характеристическое уравнение в рассматриваемом примере

$$\lambda^3 (\lambda^2 - 2C_1) = 0$$

имеет три нулевых корня — $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$, а соответствующие этим корням три линейно-независимых правых вектора имеют вид

$$\mathbf{r}^{(1)} = (-\rho / \kappa c_v, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = ((\mu - 1) B_y / 4 \pi \mu a^2, 0, 0, 0, 1)$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = (0, (\mu - 1) B_y / 4 \pi \mu (\mu - 1) \rho T, 0, 0, 1)$$

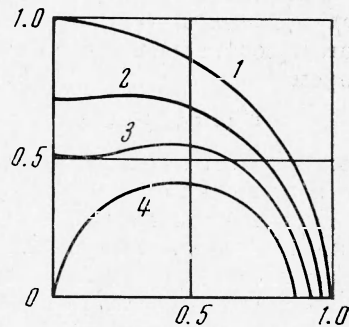
так что в этих волнах, неподвижных относительно газа, изменяются плотность, энтропия и поперечное поле B_y .

Остальные два характеристических числа

$$\lambda^{(4,5)} = \pm a \left[1 - \frac{\beta(\beta+2-\kappa)}{\kappa(\kappa-1)(1+\beta)} \left(\frac{(\kappa-1)^2}{\beta+2-\kappa} + \sin^2 \vartheta \right) \right]^{1/2} \quad (11)$$

соответствуют волнам, скорость распространения которых зависит от ориентации фронта волны по отношению к полю. Эта зависимость различна для парамагнетиков ($\mu > 1$) и диамагнетиков ($\mu < 1$).

Типичные диаграммы фазовых скоростей для парамагнетиков представлены на фиг. 1, где кривым 1—4 соответствуют значения $\beta = 0.0, 0.3, 0.5, 0.655$. Здесь и в дальнейшем при построении фазовых диаграмм принято $\kappa = 1.4$ и приводится только первый квадрант диаграмм, ибо они симметричны относительно оси $\vartheta = 0$, по которой ориентировано магнитное поле, и оси $\vartheta = \pi / 2$. Как следует из (11), намагниченный парамагнетик устойчив ($\lambda^{(4,5)}$ действительны для любых ϑ) только в случае



Фиг. 1

$$B \leq \sqrt{\frac{4\pi\mu p f_1(\kappa)}{\mu - 1}} \quad \left(f_1(\kappa) = \frac{1}{\kappa - 1} \left[\frac{2\kappa - 3}{2} + \sqrt{\left(\frac{2\kappa - 3}{2} \right)^2 + \kappa(\kappa - 1)} \right] \right)$$

Таким образом, если принять для воздуха $\mu - 1 \approx 10^{-5}$, $p \approx 10^6$ дин/см², $\kappa = 1.4$, то такое состояние намагниченности устойчиво в полях $B \leq 10^6$ гс.

Если идеальный газ обладает свойствами диамагнетика ($\mu < 1$), то его состояние всегда устойчиво в указанном выше смысле, как только $\alpha^2 \leq 4 f_2(\kappa)$, где

$$f_2(\kappa) = \frac{1}{\kappa(\kappa - 1)} \left[\frac{3 - 2\kappa}{2} + \sqrt{\left(\frac{3 - 2\kappa}{2} \right)^2 + \kappa(\kappa - 1)} \right]$$

В случае $\alpha^2 > 4f_2(\kappa)$ состояние устойчиво, если

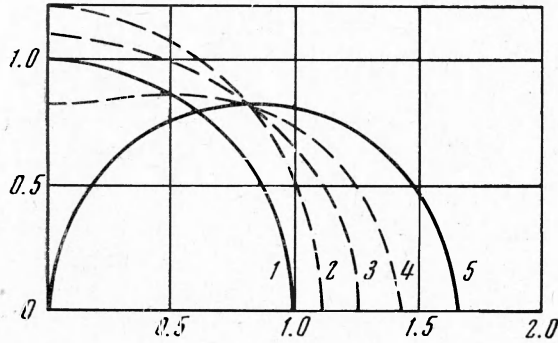
$$2\mu \leq (1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 f_2(\kappa)}), \quad 2\mu \geq (1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2 f_2(\kappa)}) \quad (12)$$

Типичные диаграммы фазовых скоростей для диамагнетиков представлены на фиг. 2, где кривым 1—5 соответствуют значения $\beta = 0, -0.5, -0.7, -0.8, -0.855$.

Пунктирные кривые представляют собой характерные диаграммы для случая $\alpha^2 \leq 4f_2(\kappa)$ и для μ , удовлетворяющего неравенствам (12), а сплошная кривая — полуокружность — дает диаграмму при

$2\mu = 1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2 f_2(\kappa)}$. Таким образом, в этом случае в устойчивом состоянии скорость распространения звуковых волн может быть больше скорости звука в немагнитном газе (кривая 1 для $\beta = 0$).

Интересно, что при очень резко выраженном диамагнетизме, когда $\beta \leq -\kappa$ и $\alpha^2 \geq 4/(\kappa - 1)$, скорость распространения волн поперек



Фиг. 2

поля становится больше продольной скорости и неограниченно растет с ростом $|\beta|$. Характерные диаграммы для этого случая даны на фиг. 3, где кривым 1—4 соответствуют значения $\beta = 0, -\kappa, -2, -5$.

Рассмотренному типу волн, распространяющихся со скоростями $\lambda^{(4,5)}$, соответствуют возмущения, описываемые вектором

$$\mathbf{r}^{(4,5)} = (\rho, x_{24}, 0, \lambda^{(4,5)}, B_y) \quad (13)$$

так что в этих волнах не изменяется только поперечная скорость v_y .

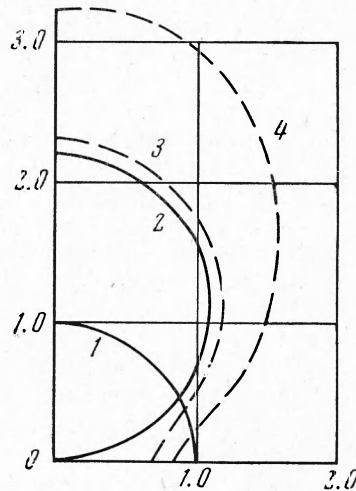
Рассмотрим второй пример. Если идеальный непроводящий газ может намагничиваться до состояния насыщения, так что намагниченность M перестает зависеть от поля, и можно принять линейную зависимость M от ρ и T , т. е.

$$M = \rho K (\theta - T),$$

$$\mu = 1 + 4\pi\rho K (\theta - T) / H \quad (\theta > T)$$

то из (5) получаем отличные от нуля компоненты матрицы $\|x_{ik}\|$

$$\begin{aligned} x_{14} &= \rho, & x_{23} &= -\frac{(\mu - 1) B_x B_y}{4\pi\rho\theta(1 - \tau)(1 - \beta')} \\ x_{24} &= \frac{(\mu - 1) B^2}{4\pi\rho\theta\mu(1 - \tau)(1 - \beta')} \left[\frac{(\mu - 1)(\kappa\tau - 1)}{\mu(1 - \tau)} + \sin^2 \vartheta \right] \\ x_{41} &= \frac{a^2}{\rho} + \frac{(\mu - 1)^2 (1 - \kappa\tau) B^2}{4\pi\rho^2\mu^2 (1 - \tau)}, & x_{42} &= (\kappa - 1) T - \frac{(\mu - 1)^2 \tau B^2}{4\pi\rho\mu^2 c_p \theta (1 - \tau)} \\ x_{45} &= -B_y (\mu - 1) / 4\pi\rho\mu, & x_{53} &= -B_x, & x_{54} &= B_y \end{aligned} \quad (14)$$



Фиг. 3

где

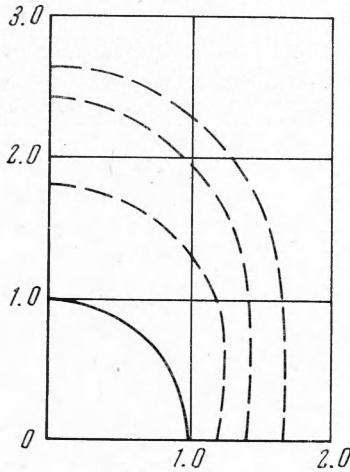
$$\tau = T / \theta, \beta' = \kappa (\kappa - 1) (\mu - 1)^2 \tau^2 (1 - \tau)^{-2} \alpha^2$$

Как и в случае магнетика, в слабых полях трехкратному корню $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ характеристического уравнения соответствуют три линейно-независимых правых вектора, которые теперь имеют вид

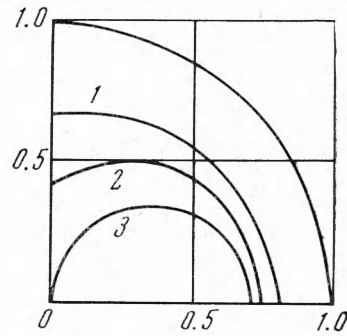
$$\mathbf{r}^{(1)} = (-x_{42} / x_{41}, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = (0, -x_{45} / x_{42}, 0, 0, 1), \quad \mathbf{r}^{(3)} = (x_{45} / x_{41}, 0, 0, 0, 1)$$

где выражения для x_{41}, x_{42}, x_{45} совпадают с записанными в (14).



Фиг. 4



Фиг. 5

Остальные два собственных вектора такие как, как в (13), но выражение для x_{24} надо брать из формул (14), а фазовые скорости имеют вид

$$\lambda^{(4,5)} = \pm a \left[1 + \frac{\beta' (\kappa \tau - 1) \mu (1 - \tau)}{(1 - \beta') (\mu - 1) \kappa (\kappa - 1) \tau^2} \left(\frac{(\mu - 1) (\kappa \tau - 1)}{\mu (1 - \tau)} + \sin^2 \vartheta \right) \right]^{1/2}$$

Соответствующие фазовые диаграммы для насыщенного магнетика представлены на фиг. 4-6.

Если $\kappa \tau > 1$, то насыщенный магнетик устойчив при

$$4\pi \rho K \theta / H \leq (\alpha \tau)^{-1} [\kappa (\kappa - 1)]^{-1/2}$$

(см. пунктирные кривые на фиг. 4) и при

$$4\pi \rho K \theta / H \geq (\kappa \tau - 1) (1 + \sqrt{1 + 4\tau (\kappa - 1) \alpha^{-2}}) [2\tau (\kappa - 1)]^{-1}$$

(см. кривые 1-3 на фиг. 5, причем кривая 1 соответствует $4\pi \rho K \theta / H = \infty$, а кривая 3 — крайнему значению этой величины из интервала устойчивости). В первом случае скорость распространения звуковых волн больше, чем в немагнитном газе, причем если $\rho K T = p^{1/2} [4\pi (\kappa - 1)]^{-1/2}$, то скорость звука становится бесконечно большой при устойчивом состоянии газа. При $p \approx 10^6$ дин/см², $T \approx 300^\circ$, $\kappa \approx 1.4$, в этом случае $\rho K \approx 10$ гс/град, что почти на три порядка превышает соответствующую характеристику искусственных ферромагнитных жидкостей [6].

В случае $\kappa \tau < 1$ при $4\pi \rho K \theta / H \leq (\alpha \tau)^{-1} [\kappa (\kappa - 1)]^{-1/2}$ магнетик устойчив, если $\alpha \leq \alpha^*$, и при

$$4\pi \rho K \theta / H \leq (1 - \kappa \tau) (1 + \sqrt{1 + 4\tau (\kappa - 1) \alpha^{-2}}) [2\tau (\kappa - 1)]^{-1}$$

если

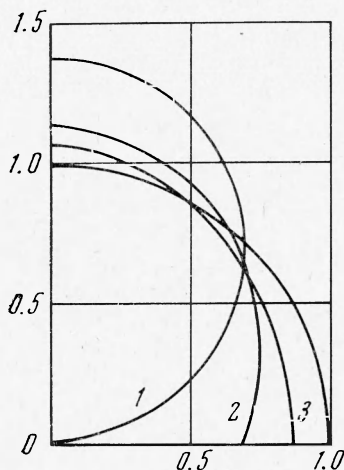
$$\alpha > \alpha^* \quad (\alpha^* = (\kappa - 1)^{1/2} \kappa^{-1/2} (1 - \kappa\tau)^{-1} [1 - \kappa(1 - \kappa\tau)^2])$$

так что диаграмма фазовых скоростей по виду аналогична диаграмме на фиг. 4.

Для значений $1 > \kappa\tau \geq (2 - \tau)^{-1}$ есть интервал устойчивости для больших значений намагниченности, а именно

$$4\pi r K\theta / H \geq \alpha^{-1} [\kappa(2 - \tau) - 1]^{-1/2}$$

Диаграмма фазовых скоростей для этого случая дана на фиг. 6 (см. кривые 1—3, причем кривая 3 соответствует $4\pi r K\theta / H = \infty$, а кривая



Фиг. 6

1—крайнему значению этой величины из рассматриваемого интервала устойчивости).

Наконец, отметим случай распространения малых возмущений в несжимаемой жидкости. Соответствующие формулы для этого случая могут быть получены из (7)—(10) путем предельного перехода при $p_p \equiv a^2 \rightarrow \infty$.

Характеристическое уравнение (для конечных λ) приобретает вид

$$\lambda (\lambda^2 - B_x^2 / 4\pi r) (\lambda^2 - x_{23}x_{32} + B_x x_{35}) = 0$$

Таким образом, в несжимаемой непроводящей среде ($x_{32} = x_{35} = x_{67} = 0$) не существует других волн малой амплитуды, распространяющихся с конечной скоростью, кроме энтропийных.

В намагниченной проводящей жидкости наряду с чисто поперечными альфеновскими волнами существуют волны, которые нельзя назвать чисто продольными или чисто поперечными.

Их скорость и соответствующий правый собственный вектор имеют вид

$$\lambda = \pm \sqrt{x_{23}x_{32} - B_x x_{35}}, \quad \mathbf{r}^{(\lambda)} = (x_{23}, \lambda, -B_x, 0, 0)$$

Здесь компоненты матрицы $\|x_{ik}\|$ могут быть получены из общих выражений (5), если известно уравнение состояния жидкости $T = T(s)$.

Поступила 25 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
2. Curtis R. A. Flows and wave propagation in ferrofluids. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 10.
3. Берковский Б. М., Баштовой В. Г. Волны в ферромагнитных жидкостях. Инж.-физ. ж., 1970, т. 18, № 5.
4. Демущкий В. П., Половин Р. В. Матричная форма магнитогиродинамических уравнений. Магнитная гидродинамика, 1969, № 1.
5. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4, pp. 765—777.
6. Neuringer J., Rosensweig R. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.