

УДК 532.51

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Рассмотрена линейная и нелинейная устойчивость двухслойного течения Пуазейля в горизонтальном канале и проведено сравнение с результатами исследования устойчивости такого течения в вертикальном канале. На первом этапе линеаризованы уравнения Навье — Стокса в обеих фазах и путем решения спектральной задачи определена динамика периодических возмущений в широком диапазоне значений числа Рейнольдса жидкости и скорости газа. Рассчитаны нейтральные и наиболее быстро растущие возмущения неустойчивой моды. На втором этапе с использованием полных уравнений Навье — Стокса для обеих жидкостей рассчитаны нелинейные волновые режимы течения Пуазейля в горизонтальном канале.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, двухслойное течение Пуазейля, нелинейные волны, устойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20210309

Введение. Задача о двухслойном течении жидкости и газа является одной из наиболее интересных и важных в гидродинамике течений с поверхностью раздела. Процессы тепло- и массопереноса в таких течениях часто используются в современных установках (компактные теплообменники, химические реакторы, холодильная техника, тепловые насосы) и технологических процессах (разделение смесей в дистилляционных колоннах, охлаждение электронных плат). Двухслойные течения широко применяются в процессах нанесения различных покрытий. Расслоенное течение вязких углеводородов и воды используется для уменьшения сопротивления при транспортировке нефти по трубам. Для развития авиации и проектирования теплозащиты спускаемых космических аппаратов также требуется исследование устойчивости двухслойных течений и волновых явлений в них.

В работе [1] впервые проведен анализ линейной устойчивости расслоенного течения Пуазейля в плоском горизонтальном канале. Задавались отношение объемных долей двух жидкостей h_1/h_2 и число Рейнольдса, зависящее от скорости межфазной поверхности. Показано, что для возникновения неустойчивых возмущений при любых числах Рейнольдса достаточно, чтобы различными были вязкости верхней и нижней жидкостей ($\mu_1/\mu_2 \neq 1$). Рассматривались только длинноволновые возмущения и использовался асимптотический метод. В работах [2, 3] с использованием численного метода для решения задачи Орра — Зоммерфельда рассмотрено поведение как длинных, так и коротких возмущений. Задача является многопараметрической, поэтому для получения качественных выводов параметр

h_1/h_2 варьировался при различных постоянных значениях других параметров. Менялись отношения плотностей ρ_1/ρ_2 и вязкостей μ_1/μ_2 , поверхностное натяжение и сила тяжести. Построенные области устойчивых (неустойчивых) возмущений на плоскости параметров $(\alpha, h_1/h_2)$ очень разнообразны (α — волновое число возмущения). Показано, что при больших значениях числа Рейнольдса одновременно существуют две моды неустойчивости: “поверхностная” и сдвиговая (мода Толлмина — Шлихтинга, приводящая к переходу к турбулентности). В работах [4, 5] рассматривалось расслоенное течение Пуазейля в наклонном канале. Задавались отношение объемных долей двух жидкостей h_1/h_2 и число Рейнольдса, зависящее от суммарного расхода двух жидкостей в канале. По мнению авторов [4, 5], неустойчивость в горизонтальном и наклонном каналах имеет различную физическую природу. Пленочные течения, исследования волновых режимов которых начаты в работах [6–8], являются частным случаем расслоенного течения Пуазейля в наклонном канале. В экспериментальных работах [7, 8] обнаружены различные волновые режимы стекания пленок жидкости при активном и пассивном влиянии газовой фазы — волны Капицы. В работах [9, 10] с использованием асимптотического подхода изучена линейная устойчивость безволнового решения Нуссельта и показано, что оно неустойчиво при значениях числа Рейнольдса $Re > Re_{cr} = 5 \operatorname{ctg}(\beta)/6$ (β — угол наклона поверхности течения). Полученные в [9, 10] неустойчивые возмущения (в дальнейшем поверхностная мода) являются длинноволновыми и на нелинейной стадии развития аналогичны волнам Капицы. В работах [11, 12] с использованием численных методов для решения уравнений Навье — Стокса рассмотрены линейная и нелинейная устойчивости течения пленки со спутным потоком газа. Значения числа Рейнольдса для жидкости и газа задавались по среднерасходным скоростям обеих фаз. Показано, что для “поверхностной” моды нейтральные кривые существенно трансформируются с увеличением скорости газа и это в существенной мере определяется углом наклона и шириной канала. При малых значениях скорости газа “поверхностная” мода соответствует волнам Капицы.

Таким образом, волновое двухслойное течение Пуазейля исследуется в горизонтальном и наклонном (или вертикальном) каналах, при этом используются различные системы безразмерных величин и определяющих параметров.

Целью настоящей работы является анализ линейной и нелинейной устойчивости двухслойного течения Пуазейля в наклонном канале в рамках одних и тех же уравнений, описывающих также течение в горизонтальном и вертикальном каналах в качестве частных случаев. С использованием полных линеаризованных уравнений Навье — Стокса анализируется наличие и число различных неустойчивых мод. В качестве независимых параметров рассматриваются среднерасходные скорости для обеих фаз, что является принципиальным отличием от работ [1–5]. Также анализируются нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения и рассчитываются стационарно бегущие волны конечной амплитуды.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Волновое течение двух несмешивающихся жидкостей между двумя наклонными плоскостями (рис. 1) описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - Z\varepsilon\rho n^2 + \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left(\frac{3(1 - \varepsilon\rho) \sin \beta \varepsilon_2^3 R}{\operatorname{Re}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{3(1 - \varepsilon\rho) \cos \beta \varepsilon_2^3 R}{\operatorname{Re}^2} + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad y = H(x, t); \quad (3)$$

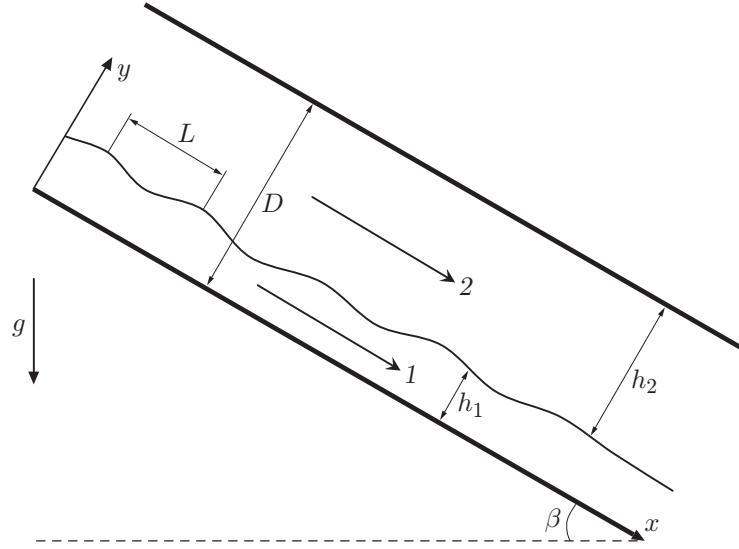


Рис. 1. Схема расслоенного течения двух жидкостей:
1 — вода (нижняя жидкость), 2 — нефть или воздух (верхняя жидкость)

$$v = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y = H(x, t); \quad (4)$$

$$u = v = 0, \quad y = 0; \quad (5)$$

$$(\sigma_{ik}^g - \sigma_{ik})n_k \tau_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\mu n} \left(\frac{\partial u^g}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^g}{\partial x} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v^g}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} \right) -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} - 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} = 0, \quad y = H(x, t); \quad (6)$$

$$(\sigma_{ik}^g - \sigma_{ik})n_k n_i - \frac{\sigma}{\hat{R}} = 0 \Rightarrow -\varepsilon_{\rho} n^2 \bar{P}^g + \bar{P} - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_{\mu n} \frac{\partial v^g}{\partial y} \right) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} +$$

$$+ \frac{\text{We} \varepsilon_2 \varepsilon^2 (\partial^2 H / \partial x^2)}{\text{Re}^2 [1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2]^{3/2}} = 0, \quad y = H(x, t); \quad (7)$$

$$u = nu^g, \quad v = nv^g, \quad y = H(x, t); \quad (8)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u^g}{\partial t} + u^g \frac{\partial u^g}{\partial x} + v^g \frac{\partial u^g}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}^g}{\partial x} - Z + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_2 \text{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 u^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^g}{\partial x^2} \right); \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial v^g}{\partial t} + u^g \frac{\partial v^g}{\partial x} + v^g \frac{\partial v^g}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}^g}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 v^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^g}{\partial x^2} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial u^g}{\partial x} + \frac{\partial v^g}{\partial y} = 0, \quad y = \frac{1}{\varepsilon_2}; \quad (11)$$

$$u^g = v^g = 0, \quad y = \frac{1}{\varepsilon_2}. \quad (12)$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости нижней жидкости (далее жидкость 1) вдоль осей x и y соответственно; u^g, v^g — компоненты вектора скорости верхней жидкости (далее жидкость 2, или “газовая” фаза) вдоль осей x и y соответственно; P, P^g — давление в жидкости и газе; $\sigma_{ik}, \sigma_{ik}^g$ — компоненты тензора напряжений в жидкой и газовой фазах; $n_k,$

τ_i — компоненты нормального и касательного векторов к волновой границе раздела $H(x, t)$; \hat{R} — радиус кривизны.

Уравнения (1)–(4) представляют собой законы сохранения импульса и массы для жидкости, а также кинематическое условие на границе раздела, уравнение (5) — условие прилипания на стенке, уравнения (6), (7) — условия равенства касательных и нормальных сил на поверхности раздела, уравнение (8) — условие прилипания на поверхности раздела. Уравнения (9), (10) представляют собой закон сохранения импульса для газовой фазы, уравнение (11) — закон сохранения массы, уравнение (12) является условием прилипания на верхней стенке канала для газовой фазы в случае плоского течения Пуазейля двух несмешивающихся жидкостей.

Уравнения (1)–(12) записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами (со знаком “*”) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{u_0 t^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, \\ \bar{P} &= \frac{\bar{P}^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0}, \quad u^g = \frac{(u^g)^*}{u_0^g}, \\ v^g &= \frac{(v^g)^*}{\varepsilon u_0^g}, \quad \bar{P}^g = \frac{(\bar{P}^g)^*}{\rho_g (u_0^g)^2}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L}, \quad \varepsilon_2 = \frac{H_0}{D}, \quad \varepsilon_\mu = \frac{\mu_g}{\mu}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{\rho_g}{\rho}, \\ \text{Re} &= \frac{u_0 H_0}{\nu}, \quad \text{Re}^g = \frac{u_0^g D}{\nu_g}, \quad n = \frac{u_0^g}{u_0} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_\mu \text{Re}^g}{\varepsilon_\rho \text{Re}}, \quad R = \frac{g D^3}{3\nu^2}, \quad \text{We} = \frac{\sigma D}{\rho \nu^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь ν , μ , ν_g , μ_g — кинематическая и динамическая вязкости жидкости и газа соответственно; ρ , ρ_g — плотность жидкости и газа; σ — поверхностное натяжение; Re , Re^g — число Рейнольдса для жидкости и газа. В качестве масштаба скорости u_0^g используем среднерасходную скорость газа U_{GS} , рассчитанную по высоте канала D . В качестве масштаба оси x используется длина волны рассматриваемых возмущений L . Выбор масштаба H_0 вдоль оси y зависит от постановки задачи. В случае если фиксируется объем жидкости в канале, $H_0 = h_1$ и значение n можно считать заданным: $n = 1$. В случае если фиксируется расход жидкости Re в канале, $H_0 = D$, высота слоя жидкости h_1 заранее неизвестна и $\varepsilon_2 = 1$. Заметим, что выражения для давления в уравнениях (1)–(12) преобразованы, из них исключены члены, линейно растущие с увеличением координаты x , а также гравитация в уравнениях для газовой фазы:

$$\begin{aligned} P^* &= \bar{P}^* + Z \rho_g (u_0^g)^2 x^*/L - \rho_g g y^* \cos \beta + \rho_g g x^* \sin \beta, \\ (P^g)^* &= (\bar{P}^g)^* + Z \rho_g (u_0^g)^2 x^*/L - \rho_g g y^* \cos \beta + \rho_g g x^* \sin \beta \end{aligned}$$

(Z — заранее неизвестная константа, определяющая перепад давления вдоль координаты x).

Заметим, что в отличие от работ [11, 12] в данной работе уравнения (1)–(12) и соотношения (13) позволяют рассматривать двухслойное течение в горизонтальном канале $\beta = 0^\circ$ как частный случай течения в наклонном канале.

Для дальнейших расчетов проводится преобразование координат $\eta = y/H(x, t)$ для жидкой фазы и $\tilde{\eta} = (1 - \varepsilon_2 y)/(1 - \varepsilon_2 H(x, t))$ для газовой фазы. В новых переменных область течения становится известной: $\eta \in [0, 1]$, $\tilde{\eta} \in [0, 1]$. В настоящей работе уравнения (1)–(12) в переменных $\eta, \tilde{\eta}$ не приводятся, детали этого преобразования изложены в [11, 12].

В настоящей работе рассматриваются линейная и нелинейная устойчивости стационарных решений $[u_b(\eta), \bar{P}_b(\eta), u_b^g(\tilde{\eta}), \bar{P}_b^g(\tilde{\eta}), H_b]$ системы уравнений (1)–(12), соответствующих безволновому течению жидкости и газа, для которого $\varepsilon = 1$:

$$u_b(x, \eta) = \alpha_1 \eta^2 + \beta_1 \eta, \quad v_b(x, \eta) = 0, \quad \bar{P}_b(\eta) = -3(1 - \varepsilon_\rho)R \cos \beta \varepsilon_2^3 H_b (\eta - 1) / \text{Re}^2, \\ u_b^g(x, \tilde{\eta}) = C \tilde{\eta}^2 + C_1 \tilde{\eta}, \quad v_b^g(x, \tilde{\eta}) = 0, \quad \bar{P}_b^g(\tilde{\eta}) = 0.$$

Для расчета толщины H_b и величин $\alpha_1, \beta_1, C, C_1, Z_b$ при фиксированных значениях параметров $\varepsilon_2, \varepsilon_\rho, \varepsilon_\mu, n, \beta, R, \text{We}, \text{Re}, \text{Re}^g$ решались следующие уравнения:

$$z^2(1 - z + \varepsilon_\mu z)[\tilde{K}(1 - z)^3 z - 12\varepsilon_\mu(1 - z - nz)] - \\ - 3(1 - z)(1 - z - \sqrt{\varepsilon_\mu} z)(1 - z + \sqrt{\varepsilon_\mu} z)[1 - z + \varepsilon_\mu z + 3\varepsilon_\mu z(1 - z - nz)] = 0, \\ \frac{2\alpha_1}{\text{Re}} \frac{1}{H_b^2} - Z_b \varepsilon_\rho n^2 + K \sin \beta = 0, \quad \frac{2\alpha_1 + \beta_1}{H_b} = \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_y (2C + C_1), \quad (14) \\ \alpha_1 + \beta_1 = n(C + C_1), \quad -Z_b + \frac{2C}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} (\tilde{\eta}_y)^2 = 0, \quad K = \frac{3(1 - \varepsilon_\rho)R \varepsilon_2^3}{\text{Re}^2}, \\ z = \varepsilon_2 H_b, \quad \tilde{K} = 3(1 - \varepsilon_\rho)R \varepsilon_2 \sin \beta / \text{Re}, \quad \tilde{\eta}_y = -\varepsilon_2 / (1 - z).$$

Система уравнений (14) получена с учетом балансных соотношений для среднерасходных скоростей в жидкости и газе:

$$\varepsilon_2 H_b \int_0^1 u_b d\eta = 1, \quad (1 - \varepsilon_2 H_b) \int_0^1 u_b^g d\tilde{\eta} = 1.$$

Подставляя

$$H = H_b + \hat{H} e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \quad u = u_b(\eta) + \hat{u}(\eta) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \\ v = \hat{v}(\eta) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \quad \bar{P} = \bar{P}_b(x, \eta) + \hat{P}(\eta) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \\ u^g = u_b^g(\tilde{\eta}) + \hat{u}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \quad v^g = \hat{v}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}, \\ \bar{P}^g = \bar{P}_b^g(x, \tilde{\eta}) + \hat{P}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{2\pi i x} + \text{к.с.}$$

(к.с. — комплексно-сопряженная величина) в уравнения (1)–(12) и линеаризуя их в окрестности стационарного решения, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений и решения задачи о линейной устойчивости стационарного решения. Заметим, что эти уравнения близки к соответствующим уравнениям из работ [11, 12]. Для аппроксимации полей скорости $[\hat{u}(\eta), \hat{v}(\eta)]$ и $[\hat{u}^g(\tilde{\eta}), \hat{v}^g(\tilde{\eta})]$ используются полиномы Чебышева $T_m(\eta_1)$, $\eta_1 = 2\eta - 1$ и $T_m(\tilde{\eta}_1)$, $\tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1$ соответственно:

$$\hat{u}(\eta) = \frac{1}{2} \hat{U}_1 + \sum_{m=2}^M \hat{U}_m T_{m-1}(\eta_1), \quad \hat{v}(\eta) = \frac{1}{2} \hat{V}_1 + \sum_{m=2}^M \hat{V}_m T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1, \\ \hat{u}^g(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2} (\hat{U}^g)_1 + \sum_{m=2}^{M^g} (\hat{U}^g)_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \hat{v}^g(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2} (\hat{V}^g)_1 + \sum_{m=2}^{M^g} (\hat{V}^g)_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1.$$

В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида:

$$A\hat{x} = \lambda B\hat{x}, \quad \hat{x} = (\hat{H}, \hat{P}^g|_{\hat{\eta}=1}, \hat{U}_m, \hat{V}_m, (\hat{U}^g)_m, (\hat{V}^g)_m)^T. \quad (15)$$

Матрицы A и B имеют размерность $2(M + M^g + 1)$, их элементы определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений [11, 12].

Для исследования устойчивости стационарного решения $[u_b(\eta), \bar{P}_b(\eta), u_b^g(\tilde{\eta}), \bar{P}_b^g(\tilde{\eta}), H_b]$ необходимо проанализировать $2(M + M^g + 1)$ собственных чисел задачи (15), варьируя волновое число возмущений $\alpha = 2\pi\varepsilon$. Решение является устойчивым, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волнового числа. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю: $\text{Real}(\lambda) = 0$. В этом случае фазовая скорость возмущения равна $c_{neut} \equiv \text{Imag}(\lambda)/\alpha$.

Следует отметить, что в настоящей работе, как и в большинстве работ, посвященных исследованию линейной устойчивости двухслойного течения жидкости в каналах, рассматриваются только двумерные возмущения, для которых справедлива теорема Сквайера. Согласно этой теореме двумерные возмущения наиболее опасны на линейной стадии и начинают нарастать при меньших по сравнению с трехмерными возмущениями значениях числа Рейнольдса. На слабонелинейной стадии развития ситуация может оказаться более сложной. Например, при рассмотрении ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя (неустойчивость Толлмина — Шлихтинга) трехмерные возмущения нарастают быстрее, чем двумерные, и результирующее течение не является двумерным [13]. Также имеет место существенное различие между вычисленным числом Рейнольдса для начала ламинарно-турбулентного перехода и его измеренным значением как для однородного течения Пуазейля в плоском канале, так и для гравитационного пленочного стекания жидкости. Причина этого определяется на слабонелинейной стадии развития. В настоящей работе рассматриваются неустойчивые возмущения поверхностной моды. В ряде экспериментов показано, что предсказанное число Рейнольдса для начала неустойчивости этой моды и результаты соответствующих измерений [14–17] полностью количественно согласуются. Таким образом, трехмерные возмущения поверхностной моды на линейной и слабонелинейной стадиях развития исключаются из рассмотрения на основе экспериментальных данных. Трехмерные возмущения этой моды должны рассматриваться на стадии исследования устойчивости сформировавшихся нелинейных двумерных структур.

В задаче (15) имеется восемь независимых параметров: $\varepsilon, h_2/h_1, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho, \beta, R, \text{We}, \text{Re}^g$ в случае заданного объема жидкости, $\varepsilon, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho, \beta, R, \text{We}, \text{Re}, \text{Re}^g$ в случае заданного расхода жидкости. Пять параметров задачи ($R, \beta, \text{We}, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho$) зависят только от физических свойств газа и жидкости и от размера канала. Заметим, что при $\sigma \neq 0, g \neq 0$ вместо параметров R и We можно использовать число Капицы $\text{Fi} \equiv (\sigma/\rho)^3/(g\nu^4)$ и отношение капиллярной постоянной к высоте канала: $R \equiv (1/3)\text{Fi}^{1/2} (D/\sqrt{\sigma/(\rho g)})^3, \text{We} \equiv \text{Fi}^{1/2} (D/\sqrt{\sigma/(\rho g)})$ (см., например, работы [11, 12]).

На рис. 2 приведены зависимости безразмерной толщины пленки жидкости $h_1/(3\nu^2 \text{Re}/(g(1-\varepsilon_\rho)))^{1/3}$ и отношения h_2/h_1 для безволнового течения (14) воды и воздуха в горизонтальном канале (за исключением линий $10, 10'$, соответствующих вертикальному каналу) от числа Рейнольдса жидкости при различных значениях средней скорости газовой фазы U_{GS} , отнесенной к высоте канала:

$$U_{GS} \equiv U_{AS} = \frac{1}{D} \int_H^D u^g dy.$$

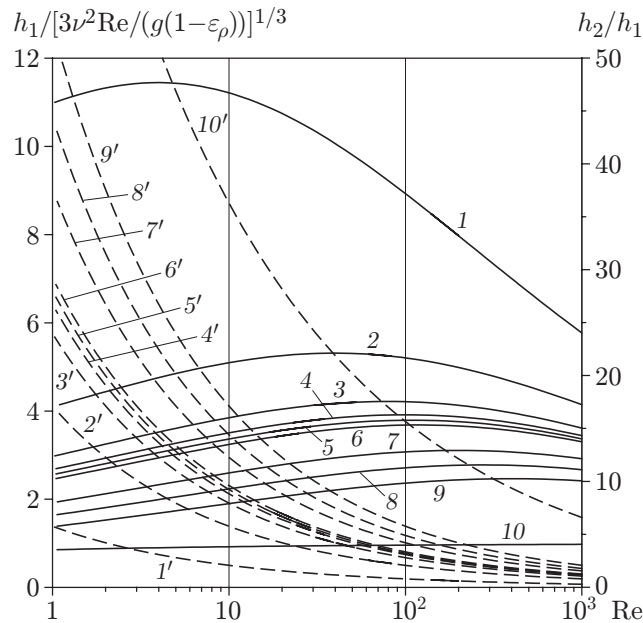


Рис. 2. Зависимости безразмерной толщины пленки воды (1–10) и отношения h_2/h_1 (1'–10') от числа Рейнольдса для воды в случае безволнового течения воздуха и воды при различных значениях осредненной скорости воздуха U_{AS} : 1, 1' — $U_{AS} = 0,1$ м/с, 2, 2' — $U_{AS} = 1,0$ м/с, 3, 3' — $U_{AS} = 2,0$ м/с, 4, 4' — $U_{AS} = 2,5$ м/с, 5, 5' — $U_{AS} = 2,75$ м/с, 6, 6' — $U_{AS} = 3,0$ м/с, 7, 7' — $U_{AS} = 5,0$ м/с, 8, 8' — $U_{AS} = 7,0$ м/с, 9, 9', 10, 10' — $U_{AS} = 10,0$ м/с; 1–9, 1'–9' — горизонтальный канал ($\beta = 0^\circ$) высотой $D = 5,0$ мм; 10, 10' — вертикальный канал ($\beta = 90^\circ$) шириной $D = 5,0$ мм

Размерная толщина жидкого слоя $h_1 = H_b^*$ сравнивается с толщиной, вычисленной по критерию Нуссельта, для случая гравитационного стекания в вертикальном канале. Размерная толщина пленки увеличивается при увеличении числа Рейнольдса Re и уменьшается при увеличении скорости газа. Наличие экстремума на кривых 2–9 на рис. 2 обусловлено сужением области газовой фазы при увеличении толщины пленки. Заметим, что в исследуемом диапазоне параметров отношение h_2/h_1 меняется в широких пределах.

Для тестирования алгоритма решения задачи (15) были построены линии нейтральной устойчивости поверхностной и сдвиговой мод, полученные ранее в работе [3], в которой рассматривалось течение Пуазейля двух жидкостей в плоском канале при их заданном объеме или отношении h_2/h_1 . На рис. 3 приведены зависимости волнового числа $\alpha = 2\pi D/L$ нейтральных возмущений от удвоенного числа Рейнольдса $Re = U_{WS}D/\nu_1$ для воды, рассчитанные для условий эксперимента [18] (U_{WS} — скорость воды, осредненная по высоте канала). Сравнение с результатами работы [3] показывает, что они хорошо согласуются с данными проведенных расчетов.

Численный алгоритм расчета нелинейных стационарно бегущих решений $[u(\xi, \eta), \bar{P}(\xi, \eta), u^g(\xi, \tilde{\eta}), \bar{P}^g(\xi, \tilde{\eta}), H(\xi)]$ уравнений (1)–(12) аналогичен алгоритму, развитому в работе [12] ($\xi = x - ct$; c — фазовая скорость). В настоящей работе ограничимся рассмотрением основных моментов. Для аппроксимации периодических по координате ξ решений использовались полиномы Чебышева и разложение в ряд Фурье:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} U_1(\xi) + \sum_{m=2}^M U_m(\xi) T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1,$$

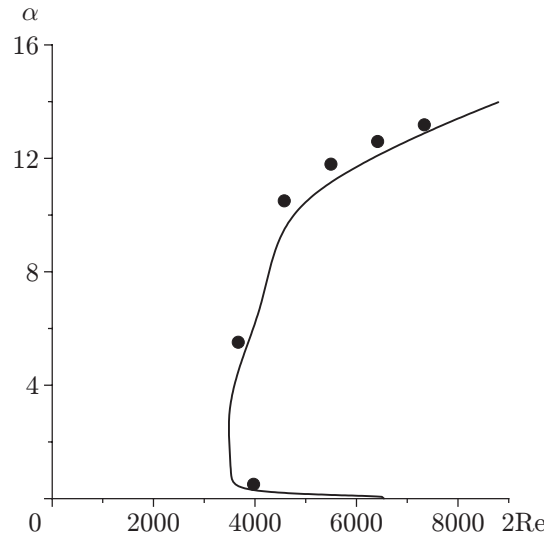


Рис. 3. Расчетные зависимости волнового числа α нейтральных возмущений от числа Рейнольдса для воды в случае течения нефти и воды ($h_2/h_1 = 1$) в горизонтальном канале высотой $D = 25,4$ мм: точки — работа [3], линия — настоящая работа

$$U_m(\xi) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} U_m^k e^{2\pi i k \xi}, \quad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$u^g(\xi, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2} (U^g)_1(\xi) + \sum_{m=2}^{M^g} (U^g)_m(\xi) T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1,$$

$$(U^g)_m(\xi) = (U^g)_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} (U^g)_m^k e^{2\pi i k \xi}, \quad ((U^g)_m^{-k})^* = (U^g)_m^k,$$

$$H(\xi) = H^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} H^k e^{2\pi i k \xi}, \quad (H^{-k})^* = H^k,$$

$$\bar{P}^g(\xi, \tilde{\eta})|_{\tilde{\eta}=1} = \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} (\bar{P}^g)^k e^{2\pi i k \xi}, \quad ((\bar{P}^g)^{-k})^* = (\bar{P}^g)^k, \quad (\bar{P}^g)^0 \equiv 0.$$

Здесь $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева; знак “*” означает комплексное сопряжение. В первую очередь задается начальное приближение для гармоник U_m^k , H^k , $(U^g)_m^k$, $(\bar{P}^g)^k$ и для величин Z и c . Поскольку начало отсчета координаты x выбирается произвольно, фазу одной из гармоник можно считать заранее известной (например, $\text{Real}(H^1) = 0$). Это позволяет получить уравнение для определения фазовой скорости c . Величина Z является неизвестной величиной вместо гармоники $(\bar{P}^g)^0$. При заданных $(M + M^g + 2)(N - 1)$ значениях гармоник U_m^k , $(U^g)_m^k$, $(\bar{P}^g)^k$, Z , c , H^k поля скоростей $v(\xi, \eta)$, $v^g(\xi, \tilde{\eta})$ и давлений

$\bar{P}(\xi, \eta)$, $\bar{P}^g(\xi, \tilde{\eta})$ однозначно определяются из уравнений (1)–(12). Далее рассчитывается невязка уравнений и с использованием итерационного метода Ньютона уточняется начальное приближение неизвестных величин $(U_m^k, H^k, (U^g)_m^k, (\bar{P}^g)^k, Z, c)$.

2. Результаты расчетов. Задача является многопараметрической, и в дальнейших расчетах ограничимся рассмотрением системы вода — воздух и одного значения высоты канала ($D = 5$ мм), являющегося горизонтальным ($\beta = 0^\circ$) (случай вертикального канала представлен только для сравнения). В расчетах варьировались значения числа Рейнольдса для жидкости и газа. На первом этапе при различных значениях среднерасходной скорости газа U_{GS} и $Re \in [1, 1000]$ рассчитывалось общее количество неустойчивых мод в задаче (15). Волновое число возмущений менялось с малым шагом в широком диапазоне ($2\pi D/L \in [0,005, 100]$) и рассчитывался спектр собственных значений задачи (15). На втором этапе рассчитывались нейтральные кривые для найденных неустойчивых мод и анализировались наиболее опасные возмущения. Затем рассчитывались нелинейные волны, длина которых соответствует длине волны наиболее опасных линейных возмущений (рис. 4–7).

В исследованном диапазоне параметров найдена только одна неустойчивая мода — “поверхностная”. Иными словами, в спектре собственных значений задачи (15) для любого фиксированного набора параметров (ε, Re, Re^g) из исследованного диапазона имеется только одно отрицательное собственное значение либо ни одного. Нейтральные кривые для горизонтального канала представлены на рис. 4. Возмущения, волновые числа которых меньше нейтральных волновых чисел, увеличиваются со временем. При уменьшении скорости газа область неустойчивых возмущений сужается и сдвигается в область больших значений числа Рейнольдса. При увеличении скорости газа нейтральная кривая

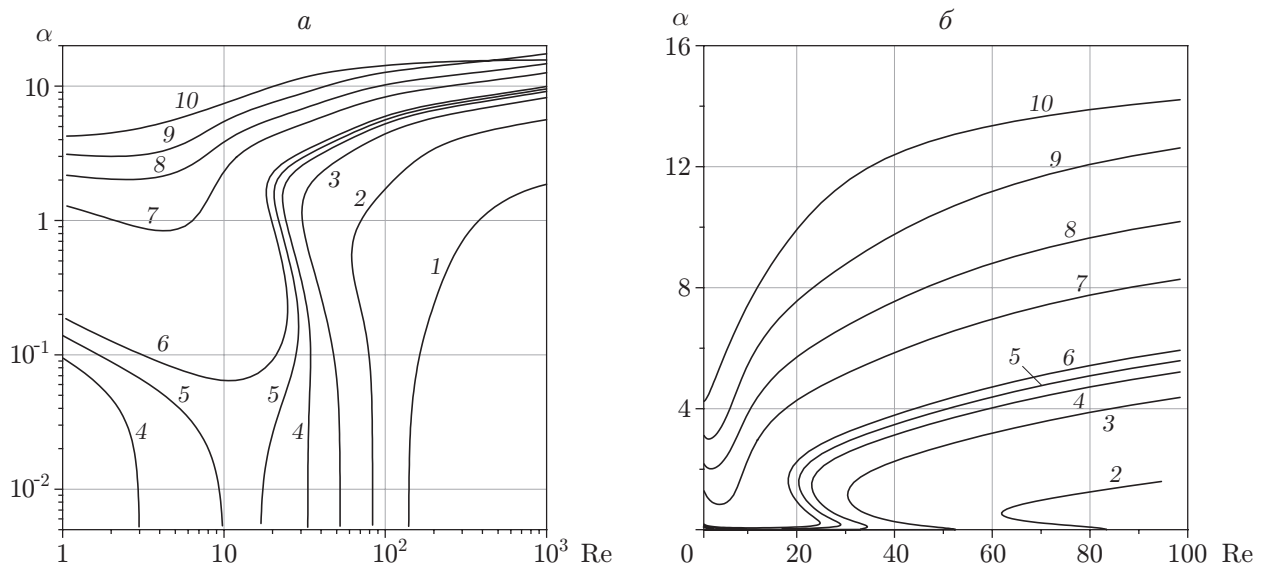


Рис. 4. Зависимость волнового числа α нейтральных возмущений от числа Рейнольдса для воды в случае течения воздуха и воды при различных значениях осредненной скорости воздуха U_{AS} :

a — $\alpha = 0,095 \div 10,000$, $Re = 1 \div 1000$, b — $\alpha = 0,095 \div 16,000$, $Re = 1 \div 100$;
 1 — $U_{AS} = 0,1$ м/с, 2 — $U_{AS} = 1,0$ м/с, 3 — $U_{AS} = 2,0$ м/с, 4 — $U_{AS} = 2,5$ м/с,
 5 — $U_{AS} = 2,75$ м/с, 6 — $U_{AS} = 3,0$ м/с, 7 — $U_{AS} = 5,0$ м/с, 8 — $U_{AS} = 7,0$ м/с,
 9, 10 — $U_{AS} = 10,0$ м/с; 1–9 — горизонтальный канал ($\beta = 0^\circ$) высотой $D = 5,0$ мм,
 10 — вертикальный канал ($\beta = 90^\circ$) шириной $D = 5,0$ мм

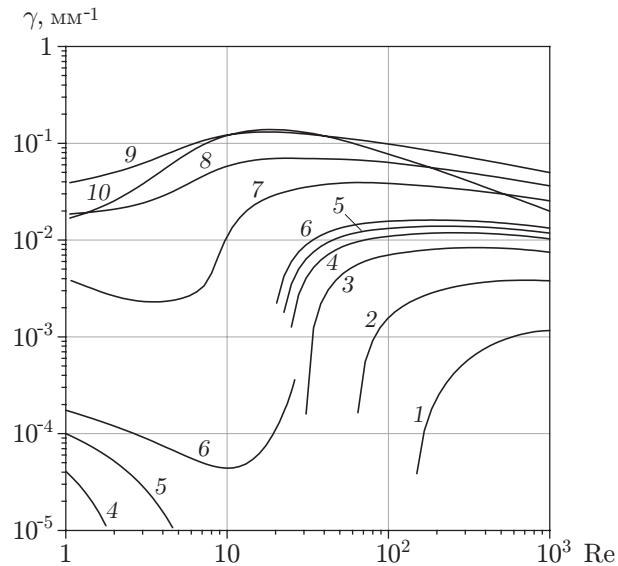


Рис. 5. Зависимость фактора роста γ от числа Рейнольдса для воды в случае течения воздуха и воды при различных значениях осредненной скорости воздуха U_{AS} :

1 — $U_{AS} = 0,1$ м/с, 2 — $U_{AS} = 1,0$ м/с, 3 — $U_{AS} = 2,0$ м/с, 4 — $U_{AS} = 2,5$ м/с, 5 — $U_{AS} = 2,75$ м/с, 6 — $U_{AS} = 3,0$ м/с, 7 — $U_{AS} = 5,0$ м/с, 8 — $U_{AS} = 7,0$ м/с, 9, 10 — $U_{AS} = 10,0$ м/с; 1–9 — горизонтальный канал ($\beta = 0^\circ$) высотой $D = 5,0$ мм, 10 — вертикальный канал ($\beta = 90^\circ$) шириной $D = 5,0$ мм

приближается к нейтральной кривой, соответствующей течению в вертикальном канале (линия 10 на рис. 4), и различие между течениями в горизонтальном и вертикальном каналах исчезает. Отметим также, что существуют скорости газа, при которых поверхностная мода имеет две области неустойчивых возмущений. На рис. 4 эти области ограничены линиями 4 при $U_{AS} = 2,5$ м/с.

В области неустойчивости на кривой зависимости инкремента $\text{Real}(-\lambda)$ от волнового числа α имеется экстремум. Существуют наиболее быстро растущие возмущения, являющиеся наиболее опасными. На рис. 5 показан рассчитанный фактор роста γ для таких возмущений, которые “нарастают вниз по потоку” по закону $\sim e^{\gamma x^*}$, $\gamma = (2\pi/L) \text{Real}(-\lambda) / \text{Imag}(\lambda)$. Возмущения развиваются на отрезке длиной несколько сантиметров при больших значениях U_{GS} (линии 8–10 на рис. 5) и на отрезке длиной несколько десятков сантиметров при уменьшении скорости газа (линии 2–6 на рис. 5).

На рис. 6 приведены зависимости основных характеристик нелинейных стационарно бегущих волн от скорости газа при различных значениях числа Рейнольдса жидкости (f^* , c^* — размерные частота и фазовая скорость для нелинейных режимов, H_{\max} , H_{\min} , $\langle H \rangle$ — максимальная, минимальная и средняя толщины слоя жидкости).

На рис. 7 представлены волновые профили. Длина волны представленных на рис. 6, 7, а, б волновых режимов соответствует длине волны наиболее опасных линейных возмущений. Частота и фазовая скорость нелинейных волн увеличиваются при увеличении скорости газа и числа Рейнольдса для жидкости (см. рис. 6). Размерная средняя толщина пленки уменьшается с увеличением скорости газа и увеличивается с ростом Re . Размерная максимальная толщина пленки уменьшается при увеличении скорости газа. Расчет волновых режимов, представленных на рис. 6, 7, а, б, продолжен при больших значениях длины волны (соответствующие профили толщины представлены на рис. 7, в, г). Ситуация аналогична

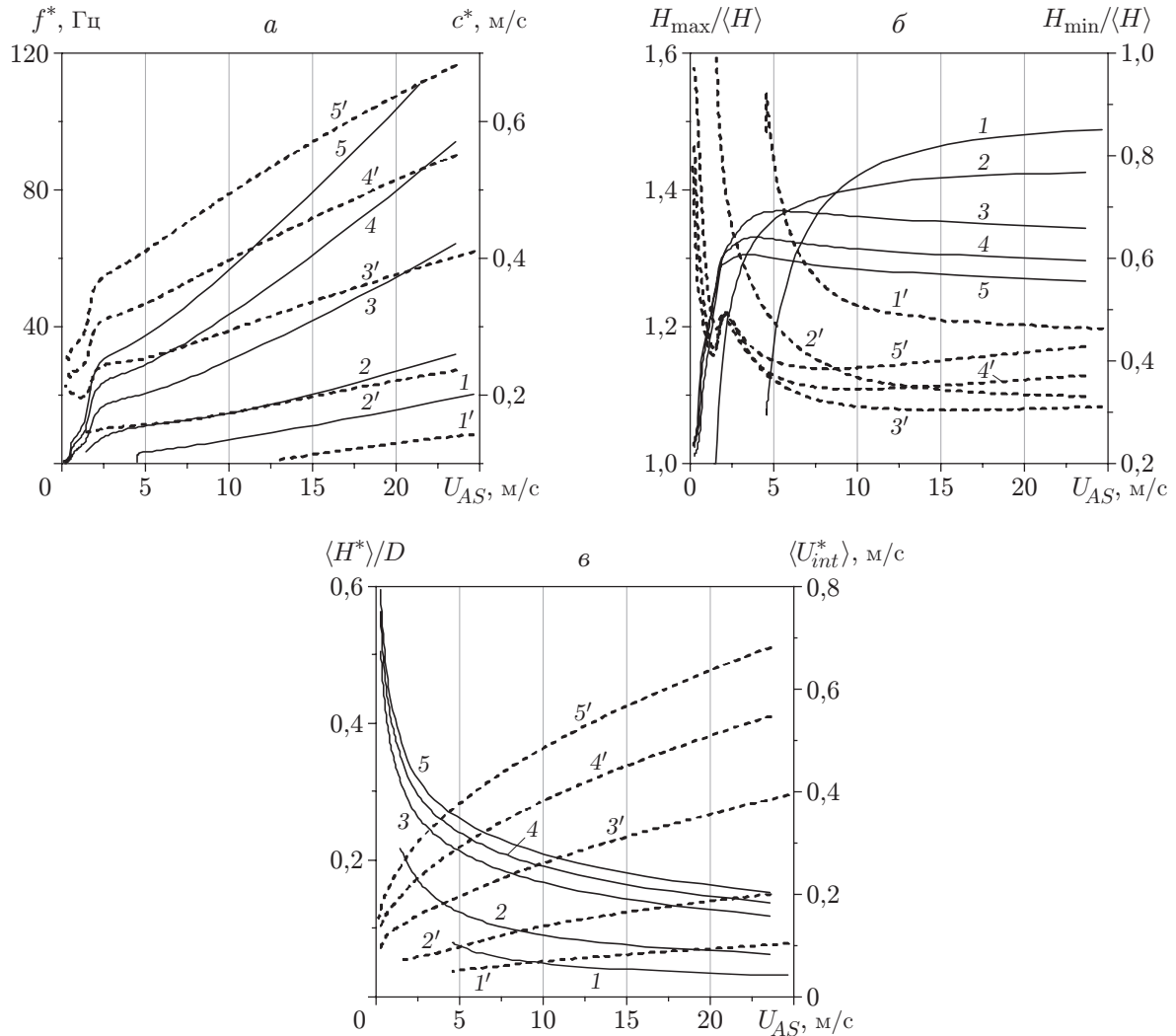


Рис. 6. Зависимости основных характеристик нелинейных волн от осредненной скорости воздуха U_{AS} в случае течения воздуха и воды в горизонтальном канале высотой $D = 5,0$ мм при различных значениях числа Рейнольдса для воды: *a* — частота (1–5) и фазовая скорость (1'–5'), *б* — максимальная (1–5) и минимальная (1'–5') толщины слоя воды, *в* — средняя толщина слоя воды (1–5) и средняя скорость жидкости на поверхности раздела (1'–5'); 1, 1' — $Re = 10$, 2, 2' — $Re = 40$, 3, 3' — $Re = 140$, 4, 4' — $Re = 220$, 5, 5' — $Re = 300$

случаю гравитационного стекания пленки вдоль вертикальной стенки, рассмотренному во многих работах. Такие режимы названы длинными волнами γ_1 -семейства. Длинные волны другого типа (“ γ_2 -семейство”) для горизонтального канала рассчитаны путем непрерывного продолжения длинных волн для случая вертикального канала, малых значений скорости газа и числа Рейнольдса при изменении параметров ε , β , Re , Re^g . Характерный волновой профиль для таких режимов представлен на рис. 7, *д*.

При больших значениях скорости газа или числа Рейнольдса появляются новые моды неустойчивых возмущений — “сдвиговые”, или волны Толлмина — Шлихтинга, приводящие к турбулентности. В спектре задачи (15) при одном наборе параметров (ε , Re , Re^g) могут существовать два или три отрицательных собственных значения.

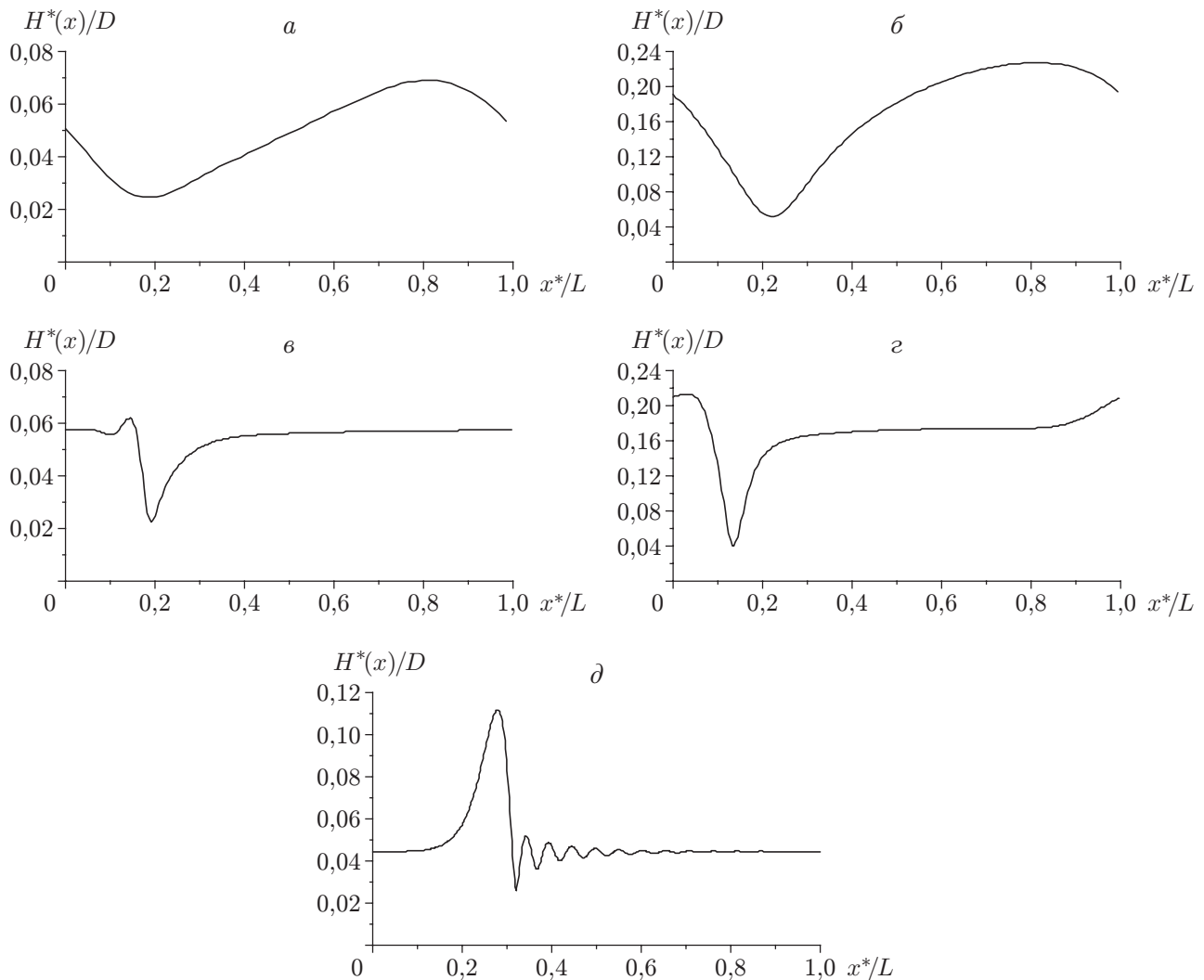


Рис. 7. Волновые профили поверхности раздела в случае течения воздуха и воды в горизонтальном канале высотой $D = 5,0$ мм при $U_{AS} = 10$ м/с, $Re = 10$ (а, в, д) и $Re = 140$ (б, г) и различных значениях длины волны:

а — $D/L = 0,37$, б — $D/L = 0,51$, в — $D/L = 0,04$, г — $D/L = 0,12$, д — $D/L = 0,05$

При изменениях физических свойств жидкости нейтральные кривые на плоскости параметров $(2\pi D/L, Re)$ могут существенно изменяться, создавая иногда “причудливые” конфигурации областей устойчивых и неустойчивых возмущений. В настоящей работе параметры R , β , We , ε_μ , ε_ρ варьировались выборочно, в широком диапазоне, без учета физичности получающихся систем жидкость — газ. Рассмотрен случай, описанный в работе [1] ($R = We = \beta = 0$, $\varepsilon_\rho = 1$, $\varepsilon_\mu \neq 1$). Если числа Рейнольдса жидкости и газа при таких вариациях оставались малыми, неустойчивой является лишь одна мода. Случай, когда газ “тяжелее” жидкости, не рассматривался, и ставилось условие $\varepsilon_\rho \leq 1$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$. В настоящей работе нейтральные кривые и другие зависимости, полученные при варьировании физических параметров жидкости и газа, не приводятся. Следует отметить, что нейтральные кривые для случая неустойчивости Капицы (гравитационное пленочное течение в вертикальном канале) и нейтральные кривые для случая неустойчивости, описанного в работе [1], трансформируются друг в друга при непрерывном изменении параметров.

Эти неустойчивости представляют собой неустойчивость поверхности раздела при течении двух вязких жидкостей. Этот вывод отличается от выводов работ [4, 5], в которых полагается, что неустойчивости в горизонтальном и наклонном каналах имеют различную физическую природу.

Заключение. С использованием полных уравнений Навье — Стокса для двух фаз рассмотрены линейная и нелинейная устойчивости двухслойного течения Пуазейля в горизонтальном и наклонном каналах. При этом в качестве независимых параметров использовались среднерасходные скорости для обеих фаз, что является принципиальным отличием от работ [1–5]. В исследованном диапазоне параметров найдена одна неустойчивая мода — “поверхностная”. Показано, что в случае вертикального канала при малых скоростях газа неустойчивые возмущения этой моды на нелинейной стадии развития аналогичны волнам Капицы. Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения этой моды в случае горизонтального канала. Обнаружено, что при увеличении скорости газа нейтральная кривая приближается к соответствующей нейтральной кривой для вертикального канала и различие между течениями в горизонтальном и вертикальном каналах исчезает. Установлено также, что в случае горизонтального канала существуют скорости газа, при которых поверхностная мода имеет две области неустойчивых возмущений. Для горизонтального канала рассчитаны стационарно бегущие волны конечной амплитуды и показано существование двух различных семейств решений. Результаты расчетов на основе полных уравнений Навье — Стокса можно использовать для дальнейшего развития и апробации упрощенных моделей, описывающих волновое двухслойное течение в горизонтальных и наклонных каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Yih C. S.** Instability due to viscosity stratification // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 337–352.
2. **Yiantsios S. G., Higgins B. G.** Numerical solution of eigenvalue problems using the compound matrix method // *J. Comput. Phys.* 1988. V. 74. P. 25–40.
3. **Yiantsios S. G., Higgins B. G.** Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31. P. 3225–3238.
4. **Tilley B. S., Davis S. H., Bankoff S. G.** Nonlinear long-wave stability of superposed fluids in an inclined channel // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 277. P. 55–83.
5. **Tilley B. S., Davis S. H., Bankoff S. G.** Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 3906–3922.
6. **Nusselt W.** Die oberflächenkondensation des wasserdampfes // *Z. Vereins Dtsch. Ingenieure.* 1916. Bd 60. S. 541–546.
7. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ч. 1. Свободное течение // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
8. **Капица П. Л., Капица С. П.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ч. 3. Опытное изучение волнового режима течения // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* 1949. Т. 19, вып. 2. С. 105–120.
9. **Benjamin T. B.** Wave formation in laminar flow down on inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 2. P. 554–574.
10. **Yih C.-H.** Stability of liquid flow down an inclined plane // *Phys. Fluids.* 1963. V. 6. P. 321–334.
11. **Трифонов Ю. Я.** Расчет линейной устойчивости расслоенного течения газа и жидкости в наклонном плоском канале // *ПМТФ.* 2018. Т. 59, № 1. С. 61–70.
12. **Trifonov Y. Y.** Linear and nonlinear instabilities of a co-current gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier — Stokes equations // *Intern. J. Multiphase Flow.* 2020. V. 122. 103159.

13. **Kachanov Y. S.** Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annual Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 411–482.
14. **Liu J., Paul J. D., Gollub J. P.** Measurements of primary instabilities of film flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.
15. **Charogiannis A., An J. S., Markides C. N.** A simultaneous planar laser-induced fluorescence, particle image velocimetry and particle tracking velocimetry technique for the investigation of thin liquid-film flows // Experiment. Therm. Fluid Sci. 2015. V. 68. P. 516–536.
16. **Isaenkov S. V., Cherdantsev A. V., Vozhakov I. S., et al.** Study of primary instability of thick liquid films under strong gas shear // Intern. J. Multiphase Flow. 2019. V. 111. P. 62–81.
17. **Schörner M., Reck D., Aksel N., Trifonov Y.** Switching between different types of stability isles in films over topographies // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 423–436. DOI: 10.1007/s00707-017-1979.
18. **Kao T. W., Park C.** Experimental investigations of the stability of channel flows. Pt 2. Two-layered co-current flow in a rectangular channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 401–423.

*Поступила в редакцию 5/VI 2020 г.,
после доработки — 28/IX 2020 г.
Принята к публикации 26/X 2020 г.*
