УДК 539.3:534.26

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ АНИЗОТРОПНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

Л. А. Толоконников

Тульский государственный университет, 300600 Тула

Рассматривается задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Уравнения движения упругого слоя сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, краевая задача для которой решена двумя способами: с помощью сведения к задачам с начальными условиями и методом степенных рядов. Получены аналитические выражения, описывающие акустические поля вне слоя. Представлены результаты расчетов коэффициента прозрачности для трансверсально-изотропных слоев, неоднородных по толщине.

Отражение и прохождение звуковых волн через плоский неоднородный упругий слой исследовалось в работе [1]. При этом упругий слой полагался изотропным. Прохождение звука через анизотропный слой изучалось в работах [2, 3]. В них рассматривался случай однородного трансверсально-изотропного упругого слоя. Работа [4] посвящена исследованию прохождения звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В данной работе решается задача о прохождении плоской монохроматической звуковой волны через плоский неоднородный упругий слой, материал которого обладает анизотропией общего типа.

1. Рассмотрим анизотропный неоднородный плоский слой толщиной $2h$, модули упругости и плотность материала которого описываются непрерывными дифференцируемыми функциями координаты x_3. При этом система прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 выбрана таким образом, что ось x_1 лежит в средней плоскости слоя, а ось x_3 направлена вниз по нормали к поверхности слоя. Полагаем, что верхняя и нижняя поверхности слоя граничат с идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $x_3 < -h$ на упругий слой падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\psi_i = \exp\{i[k_{11}x_1 + k_{13}(x_3 + h) - \omega t]\}, \tag{1.1}$$

где $k_{11} = k_1 \sin\theta_1$, $k_{13} = k_1 \cos\theta_1$ — проекции волнового вектора $\boldsymbol{k}_1$ на оси координат x_1 и x_3 соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в верхнем полупространстве; ω — круговая частота; θ_1 — угол падения плоской волны. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Определим отраженную от слоя и прошедшую через слой волны, а также найдем поле смещений внутри упругого слоя.

2. Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном слое описывается

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-01045).

общими уравнениями движения упругой среды [5]

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{2.1}$$

где $\rho = \rho(x_3)$ — плотность материала слоя; u_i — проекция вектора смещения $\boldsymbol{u}$ на ось x_i; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, которые в общем случае анизотропии связаны с компонентами тензора деформаций следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl}\varepsilon^{ki}. \tag{2.2}$$

Здесь $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(x_3)$ — модули упругости анизотропного материала; $\varepsilon_{kl} = (1/2)(\partial u_k/\partial x_l + \partial u_l/\partial x_k)$.

В дальнейшем будем пользоваться двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik}, где $i,\ k = 1, 2, \ldots, 6$. При этом значениям индексов $1, 2, \ldots, 6$ соответствуют пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Поскольку волновой вектор падающей волны лежит в плоскости x_1, x_3 и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2, а неоднородность материала слоя проявляется лишь по оси x_3, то от координаты x_2 не должны зависеть ни отраженное, ни прошедшее в полупространство $x_3 > h$, ни возбужденное в упругом слое поля. Заметим также, что согласно закону Снеллиуса [6] зависимость составляющих вектора смещения от координаты x_1 будет иметь вид $\exp(ik_{11}x_1)$. Поэтому проекции вектора смещения будем искать в виде

$$u_i = U_i(x_3)\exp(ik_{11}x_1). \tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.2) в уравнения (2.1) с учетом (2.3), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(x_3)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$:

$$A\boldsymbol{U}'' + B\boldsymbol{U}' + C\boldsymbol{U} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3)^{\mathrm{T}}, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_{55} & \lambda_{54} & \lambda_{53} \\ \lambda_{45} & \lambda_{44} & \lambda_{43} \\ \lambda_{35} & \lambda_{34} & \lambda_{33} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda'_{55} + 2s\lambda_{51} & \lambda'_{54} + s(\lambda_{56} + \lambda_{14}) & \lambda'_{53} + s(\lambda_{55} + \lambda_{13}) \\ \lambda'_{45} + s(\lambda_{41} + \lambda_{65}) & \lambda'_{44} + 2s\lambda_{46} & \lambda'_{43} + s(\lambda_{45} + \lambda_{63}) \\ \lambda'_{35} + s(\lambda_{31} + \lambda_{55}) & \lambda'_{34} + s(\lambda_{36} + \lambda_{54}) & \lambda'_{33} + 2s\lambda_{35} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} s\lambda'_{51} + s^2\lambda_{11} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{56} + s^2\lambda_{16} & s\lambda'_{55} + s^2\lambda_{15} \\ s\lambda'_{41} + s^2\lambda_{61} & s\lambda'_{46} + s^2\lambda_{66} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{45} + s^2\lambda_{65} \\ s\lambda'_{31} + s^2\lambda_{51} & s\lambda'_{36} + s^2\lambda_{56} & s\lambda'_{35} + s^2\lambda_{55} + \rho\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $s = ik_{11}$, а штрихи обозначают производные по координате x_3.

Отраженная и прошедшая звуковые волны являются решениями уравнений Гельмгольца [6] $\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0$, $j = 1,\ 2$, где $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в нижнем полупространстве. Потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн будем искать в виде

$$\psi_1 = A_1 \exp\{i[k_{11}x_1 - k_{13}(x_3 + h)]\}, \qquad \psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{21}x_1 + k_{23}(x_3 - h)]\}, \tag{2.5}$$

где k_{21}, k_{23} — проекции волнового вектора $\boldsymbol{k}_2$ на оси x_1 и x_3; $k_{21}^2 + k_{23}^2 = k_2^2$. При этом согласно закону Снеллиуса $k_{21} = k_{11}$.

Коэффициенты A_1 и A_2 подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на обеих поверхностях плоского слоя, отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления:

$$\begin{aligned}
&-i\omega u_3 = v_{1n}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_1 \quad \text{при} \quad x_3 = -h, \\
&-i\omega u_3 = v_{2n}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_2 \quad \text{при} \quad x_3 = h,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $v_{1n} = \partial(\psi_i + \psi_1)/\partial x_3$, $p_1 = i\omega\rho_1(\psi_i + \psi_1)$ и $v_{2n} = \partial\psi_2/\partial x_3$, $p_2 = i\omega\rho_2\psi_2$ — нормальные компоненты скоростей частиц жидкости и акустические давления в верхнем и нижнем полупространствах соответственно.

Подставим выражения (1.1), (2.2), (2.3) и (2.5) в граничные условия (2.6). В результате получим выражения для коэффициентов A_1 и A_2:

$$A_1 = 1 + (\omega/k_{13})U_3(-h), \qquad A_2 = -(\omega/k_{23})U_3(h) \tag{2.7}$$

и шесть условий для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (2.4):

$$(\boldsymbol{AU}' + \boldsymbol{EU})_{x_3=-h} = \boldsymbol{D}; \tag{2.8}$$

$$(\boldsymbol{AU}' + \boldsymbol{FU})_{x_3=h} = 0, \tag{2.9}$$

где

$$\boldsymbol{E} = s\begin{pmatrix} \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \\ \lambda_{41} & \lambda_{46} & \lambda_{45} \\ \lambda_{31} & \lambda_{36} & \lambda_{35} + \dfrac{i\rho_1\omega^2}{sk_{13}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = s\begin{pmatrix} \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \\ \lambda_{41} & \lambda_{46} & \lambda_{45} \\ \lambda_{31} & \lambda_{36} & \lambda_{35} - \dfrac{i\rho_2\omega^2}{sk_{23}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = (0; 0; -2i\rho_1\omega)^{\mathrm{T}}.$$

Из формул (2.7) следует, что коэффициент отражения A_1 и коэффициент прозрачности A_2 могут быть вычислены лишь после определения значений функции $U_3(x_3)$ на поверхностях слоя.

3. Для определения поля смещений в упругом слое необходимо решить краевую задачу (2.4), (2.8), (2.9). Сведем эту задачу к задачам с начальными условиями. Пусть $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_6$ образуют фундаментальную систему решений уравнений (2.4) на интервале $(-h, h)$. Тогда решением $\boldsymbol{U}$ краевой задачи будет любая линейная комбинация

$$\boldsymbol{U} = \sum_{j=1}^{6} C_j \boldsymbol{U}_j. \tag{3.1}$$

Подставляя выражение (3.1) в краевые условия (2.8), (2.9), получим систему шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$:

$$\sum_{j=1}^{6} C_j(\boldsymbol{AU}_j' + \boldsymbol{EU}_j)_{x_3=-h} = \boldsymbol{D}, \qquad \sum_{j=1}^{6} C_j(\boldsymbol{AU}_j' + \boldsymbol{FU}_j)_{x_3=h} = 0. \tag{3.2}$$

Определив коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_6$, по формуле (3.1) найдем функции U_1, U_2, U_3. Теперь составляющие вектора смещения будут определяться выражениями (2.3), а акустические поля вне упругого слоя — (2.5), (2.7).

Рассмотрим порядок построения фундаментальной системы решений для уравнений (2.4). Условием существования фундаментальной системы решений для уравнений (2.4), определенных и непрерывных на интервале $(-h, h)$, является непрерывность на этом интервале коэффициентов системы (2.4). Это условие выполняется, если непрерывны не только функции $\rho(x_3)$ и $\lambda_{ik}(x_3)$, но и первые производные $\lambda'_{ik}(x_3)$. Кроме того, в указанном интервале должен быть отличен от нуля $\det A$. Тогда в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать любые шесть решений задачи Коши для системы (2.4) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми. Такими начальными условиями можно выбрать следующие:

$$\boldsymbol{U}_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{U}'_j = (\delta_{4j}, \delta_{5j}, \delta_{6j})^{\mathrm{T}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 6, \tag{3.3}$$

где j — порядковый номер задачи Коши; δ_{ij} — символ Кронекера. При этом начальной точкой может являться любая точка $[-h, h]$. Решение задач Коши можно провести каким-либо численным методом.

4. Построим приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.4), (2.8), (2.9). Применим метод степенных рядов [7]. При этом необходимо выполнение требований, чтобы на $[-h, h]$ функция $\rho(x_3)$ была непрерывна со своей первой производной, а функции $\lambda_{ik}(x_3)$ были непрерывны и имели непрерывные производные до второго порядка включительно и $\det A \neq 0$.

Запишем краевую задачу в безразмерных величинах: $x = x_3/h$, $\boldsymbol{U}^*_j = \boldsymbol{U}_j/h$, $\lambda^*_{ik} = \lambda_{ik}/\lambda_0$, $\rho^* = \rho/\rho_0$, где λ_0 и ρ_0 — некоторые характерные упругая постоянная и плотность. В дальнейшем вернемся к четырем индексам для обозначения модулей упругости, что позволит более компактно записать выводимые соотношения. Предположим, что модули упругости и плотность материала слоя имеют вид многочленов относительно x (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\lambda^*_{ijkl}(x) = \sum_{m=0}^{R} \lambda^{(m)}_{ijkl} x^m, \qquad \rho^*(x) = \sum_{m=0}^{R} \rho^{(m)} x^m, \tag{4.1}$$

где $\lambda^{(m)}_{ijkl}$ и $\rho^{(m)}$ — коэффициенты многочленов; R — максимальная степень используемых многочленов.

С учетом указанных выше ограничений решение системы (2.4) можно искать в виде

$$U^*_i = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}_i x^n \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.2}$$

причем ряды (4.2) будут сходящимися на $[-1, 1]$.

Получим рекуррентные соотношения для нахождения коэффициентов $U^{(n)}_i$. Для этого запишем систему (2.4) в координатной форме (в безразмерном виде)

$$\sum_{i=1}^{3} (A^*_{ki} U^{*\,''}_i + B^*_{ki} U^{*\,'}_i + C^*_{ki} U^*_i) = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{4.3}$$

На основании выражений (4.1) безразмерные элементы матриц A^*, B^*, C^* запишем в виде многочленов

$$A^*_{ki} = \sum_{m=0}^{R} A^{(m)}_{ki} x^m, \qquad B^*_{ki} = \sum_{m=0}^{R} B^{(m)}_{ki} x^m, \qquad C^*_{ki} = \sum_{m=0}^{R} C^{(m)}_{ki} x^m, \tag{4.4}$$

где

$$A^{(m)}_{ki} = \lambda^{(m)}_{k3i3}, \qquad B^{(m)}_{ki} = sh(\lambda^{(m)}_{k3i1} + \lambda^{(m)}_{k1i3}) + (m+1)\lambda^{(m+1)}_{k3i3},$$

$$C^{(m)}_{ki} = sh\Big[(m+1)\lambda^{(m+1)}_{k3i1} + sh\lambda^{(m)}_{k1i1} + \frac{\omega^2 h}{s\lambda_0} \rho_0 \rho^{(m)} \delta_{ki}\Big].$$

Заметим, что при $m > R$ $\lambda_{ijkl}^{(m)} = 0$, $\rho^{(m)} = 0$.

Подставляя выражения (4.2) и (4.4) в уравнение (4.3) и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях x, получим уравнения для определения коэффициентов $U_i^{(n)}$. Разрешая последние относительно $U_i^{(n+2)}$, находим

$$\boldsymbol{U}^{(n+2)} = -\frac{A^{(0)-1}}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{R_1} [G^{(m)}\boldsymbol{U}^{(n+1-m)} + C^{(m)}\boldsymbol{U}^{(n-m)}], \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{U}^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)})^{\text{т}}$, $G^{(m)} = (G_{ki}^{(m)})_{3\times 3}$, $C^{(m)} = (C_{ki}^{(m)})_{3\times 3}$, $G_{ki}^{(m)} = (n+1-m)\times [(n+1)\lambda_{k3i3}^{(m+1)} + sh\,(\lambda_{k3i1}^{(m)} + \lambda_{k1i3}^{(m)})]$, $R_1 = \min(R, n)$.

Рекуррентное соотношение (4.5) позволяет вычислить все коэффициенты разложений (4.2) за исключением $U_i^{(0)}$ и $U_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Коэффициенты $U_i^{(0)}$ и $U_i^{(1)}$ легко определить, если использовать сведе́ние краевой задачи к задачам Коши с начальными условиями (3.3) в точке $x = 0$. Получим (для задачи Коши с номером j)

$$\boldsymbol{U}_j^{(0)} = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol{U}_j^{(1)} = (\delta_{4j}, \delta_{5j}, \delta_{6j})^{\text{т}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 6. \tag{4.6}$$

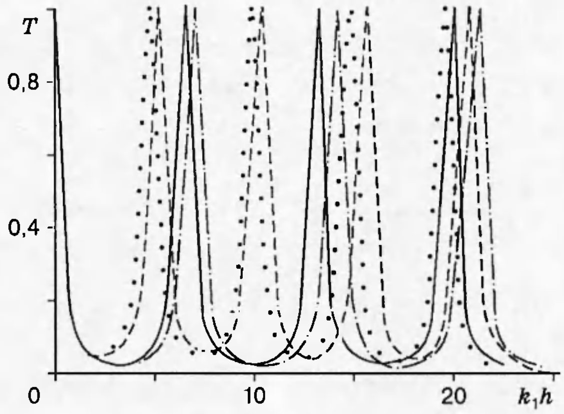
Решение системы (4.3) запишется в виде

$$\boldsymbol{U}_i^* = \sum_{j=1}^{6} C_j \boldsymbol{U}_{ij}^*, \tag{4.7}$$

где $\boldsymbol{U}_{ij}^* = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_{ij}^{(n)} x^n$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \ldots, 6$. Коэффициенты $U_{ij}^{(n)}$ вычисляются по формулам (4.5), (4.6) для $j = 1, 2, \ldots, 6$. Коэффициенты C_j определяются из краевых условий путем решения системы линейных алгебраических уравнений (3.2), записанных в безразмерных величинах. После нахождения коэффициентов C_j получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.4), (2.8), (2.9) в виде (4.7).

5. На основе полученного решения задачи проведены расчеты коэффициента прозрачности по интенсивности $T = (\rho_2 c_1/(\rho_1 c_2))|A_2|^2$ для трансверсально-изотропной пластины, находящейся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м^3, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Численные исследования проводились как для случая однородных материалов с плотностью $\rho_0 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, так и для слоя со следующим видом неоднородности: $\rho(x_3) = \rho_0 f(x_3)$, где $f(x_3) = a\{0{,}2 + \exp[-16(x_3 + h)^2]\}$. При этом множитель a выбран так, чтобы среднее значение функции $f(x_3)$ по толщине слоя было равно 1. При расчетах были приняты следующие значения модулей упругости анизотропного материала: $\lambda_{11} = 16{,}4 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{13} = 3{,}28 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{33} = 5{,}74 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{44} = 2{,}54 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Значение модуля упругости λ_{12} не фиксируется, так как в случае трансверсально-изотропного слоя он не присутствует ни в уравнениях (2.4), ни в граничных условиях (2.8), (2.9). Для оценки влияния анизотропии материала слоя на прохождение звука расчеты выполнялись и для изотропного слоя, материал которого имеет такую же плотность, как и анизотропный, и занимает промежуточное положение по скорости продольных волн относительно скорости квазипродольных волн в рассматриваемом анизотропном материале. Для выбранного изотропного материала $\lambda_{11} = 10{,}5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{13} = 5{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{33} = 10{,}5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda_{44} = 2{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

При проведении численных исследований краевая задача (2.4), (2.8), (2.9) решалась двумя способами: методом Рунге — Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования и методом степенных рядов. Результаты вычислений, полученные двумя способами, показали хорошее совпадение.



На рисунке представлена частотная зависимость коэффициента прозрачности T при нормальном падении звуковой волны на слой (сплошная кривая соответствует однородному изотропному слою, штриховая — неоднородному анизотропному, штрихпунктирная — неоднородному изотропному, пунктирная — однородному анизотропному). Видно, что на резонансных частотах упругий слой оказывается полностью прозрачным для падающей звуковой волны. В области низких частот ($k_1h < 1$) на прохождение звука не влияет ни анизотропия, ни неоднородность материала.

Графики, построенные для однородных слоев, показывают строгую периодичность появления резонансов с периодом $k_1\pi/k_l$, где k_l — волновое число продольных волн в слое. В рассматриваемом случае $k_l = \omega\sqrt{\rho_0/\lambda_{33}}$. Значит, взаимное расположение и периоды возникновения резонансов однородных материалов определяются величиной модуля упругости λ_{33}.

Неоднородность слоя рассматриваемого вида приводит к смещению резонансов в область более высоких частот по сравнению с соответствующим однородным слоем. Этого следовало ожидать, поскольку среднее по толщине слоя значение скорости продольных волн в неоднородном слое больше скорости продольных волн в однородном слое. Кроме того, для неоднородных материалов проявляется еще одна особенность частотных характеристик — отсутствие периодичности в появлении резонансов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Приходько В. Ю., Тютекин В. В.** Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32, вып. 2. С. 212–218.
2. **Лонкевич М. П.** Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акуст. журн. 1971. Т. 17, вып. 1. С. 85–92.
3. **Шендеров Е. А.** Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акуст. журн. 1984. Т. 30, вып. 1. С. 122–129.
4. **Скобельцын С. А., Толоконников Л. А.** Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36, вып. 4. С. 740–744.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1965.
6. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
7. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1969. Т. 3, ч. 2.

Поступила в редакцию 23/XII 1997 г.