

УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ПОЛОС СДВИГА И КОМПАКЦИИ

И.А. Гарагаш

Институт физики Земли РАН, 123810, Москва, ул. Бол. Грузинская, 10, Россия

С помощью вариационного условия бифуркации процесса деформирования неупругого тела исследованы условия образования регулярной системы полос сдвига и компакций. Установлено, что зарождение регулярной системы слоев локализации пластической деформации следует ожидать у материалов с хорошо выраженным пределом текучести. Важный вклад в это явление вносят внутреннее трение и дилатансия, способствующие развитию неустойчивости материала в режиме упрочнения.

Бифуркация, вариационное условие, полосы сдвига и компакций, предел текучести, дилатансия, внутреннее трение, предельное условие.

CONDITIONS OF THE FORMATION OF REGULAR SYSTEMS OF SHEAR AND COMPACTION BANDS

I.A. Garagash

With the use of the variation condition for bifurcation of the process of deformation of an inelastic body, the conditions were studied under which a regular system of shear and compaction bands forms. It has been established that a regular system of bands where plastic deformations are localized should form, most likely, in materials with well-expressed ultimate yield. Internal friction and dilatancy promoting the development of instability of the material in the regime of strengthening contribute much to this phenomenon.

Bifurcation, variation condition, shear bands, compaction bands, ultimate yield, dilatancy, internal friction, ultimate condition

ВВЕДЕНИЕ

Для многих материалов неустойчивое развитие пластического течения, обычно предшествующее разрушению, наблюдается почти всегда при достижении критического уровня необратимых деформаций. Локализация сдвиговых деформаций наблюдается и в осадочных породах в виде полос сдвига — часто в виде более или менее регулярных структур. Системы полос сдвига в поронасыщенных средах облегчают фильтрацию флюида, и их исследование важно для понимания фильтрационных свойств коллекторов. Неустойчивость деформирования необязательно приводит к формированию полос сдвига. В осадочной толще широко распространены ячеистые структуры. К ним можно отнести будинажные структуры и призматические отдельности в лавовых покровах.

Наиболее известным примером неустойчивости процесса деформирования является образование полос Чернова—Людерса, обычно появляющихся либо при выходе материала на площадку текучести, либо в момент образования „зуба текучести“ [1]. На рис. 1 показана типичная картина полос Чернова—Людерса в растягиваемом образце из мягкой стали.

Локализация сдвиговых деформаций в тонких слоях была обнаружена и для гранулированных материалов [2]. Лабораторные испытания горных пород [3, 4] показали, что их деформация сопровождается развитием исходных микротрещин и пор, а также образованием новых дефектов, что приводит к изменению эффективных свойств материала. Этот процесс зависит как от уровня действующих напряжений, так и от условий взаимодействия берегов трещин. Характерной его особенностью является дилатансионный эффект — необратимое увеличение объема материала, вызванное увеличением пор и раскрытием трещин. Наиболее интенсивно перестройка структуры материала протекает в окрестности пикового напряжения перед образованием узких трещиноподобных макроскопических

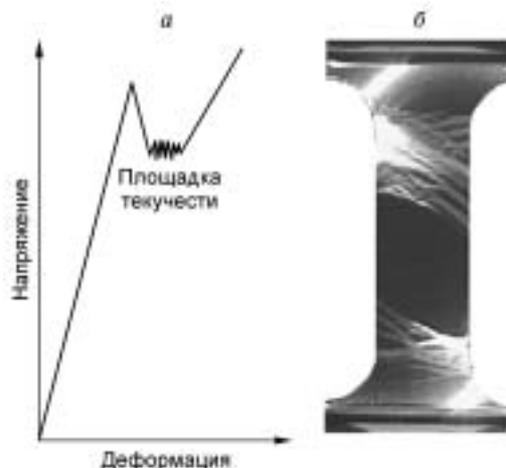


Рис. 1. Деформация (а) растягиваемого образца (б) при достижении площадки текучести.

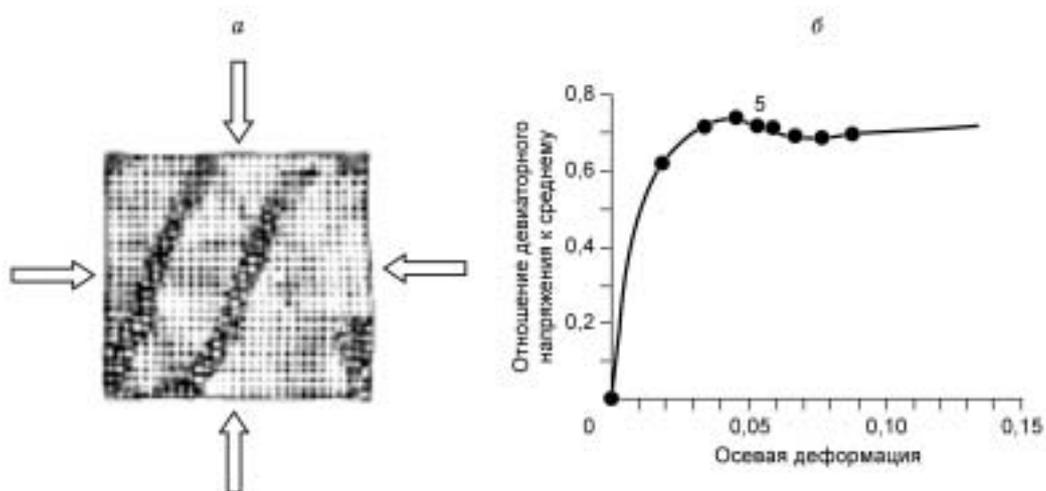


Рис. 2. Картина распределения деформаций сдвига (а), соответствующая т. 5 на кривой деформирования (б).

нарушений, связывающих большое число микродефектов. Такие нарушения, называемые „полосами сдвига“, представляют собой зоны локализации пластической деформации. Их зарождение связано с внутренней неустойчивостью материала, т. е. с качественными изменениями в накоплении повреждений, приводящими к бифуркации первоначально однородного процесса деформирования. На рис. 2 показаны полосы сдвига, сформированные в образцах песчаника в условиях трехосного сжатия [5]. Характерно, что две параллельные полосы сдвига сформировались при переходе на падающую ветвь диаграммы деформирования в точке 5.

Деформирование высокопористых гранулированных горных пород при высоком давлении может привести к формированию полос компакци, ориентированных перпендикулярно к направлению максимального сжатия [6, 7]. На рис. 3,а показана схема формирования полосы компакци при осевом сжатии и ее микроструктура, полученная на образце высокопористого песчаника при всестороннем давлении 28 МПа [8].

Признаком неустойчивости материала служит утрата эллиптичности уравнениями нейтрального равновесия [9, 10]. В работе [11] показано, что на условия локализации существенно влияет характер определяющих соотношений, в частности, их отклонение от пластической ортогональности, обусловленное внутренним трением и дилатансией [12, 13]. Неустойчивость материала в неограниченном теле приводит либо к образованию бесконечно тонких слоев локализации, либо к зарождению регулярной системы полос сдвига, разделенных разгружающимся материалом [14]. Наряду с образованием полос сдвига возможно зарождение ячеек ускоренного и замедленного деформирования, предопределяющего разделение тела на блоки [15].

Следует отметить, что с образованием регулярных систем нарушений могут быть связаны пространственно-временные продольно-поперечные осцилляции очагов землетрясений в пределах областей динамического влияния деструктивных зон литосферы [16].

В работе с помощью вариационного условия бифуркации процесса деформирования неупругого тела исследованы условия образования регулярной системы полос сдвига и компакци.

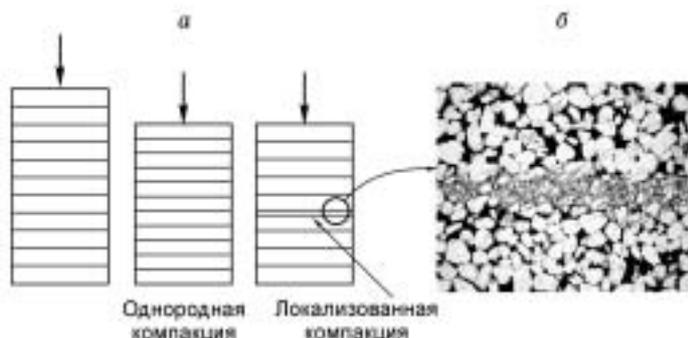


Рис. 3. Микроструктура полосы компакци (б) и схема ее формирования (а).

ВНУТРЕННЯЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В УСЛОВИЯХ НЕАССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Неупругое деформирование прочных горных пород происходит в результате скольжения по существующим трещинам и образования большого числа новых дефектов. Для описания этого процесса можно воспользоваться известной теорией пластического течения, например в форме Прандтля—Рейсса. Однако следует учитывать эффект пластического разрыхления материала и влияние взаимодействия берегов трещин. Поступим следующим образом. Представим тензор полного приращения деформации

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (1)$$

в виде суммы

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

тензоров приращений упругих обратимых деформаций $d\varepsilon_{ij}^{el}$ и необратимых пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$.

Здесь du_i — приращение перемещения.

Предположим, что компоненты деватора приращений пластических деформаций

$$d\gamma_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\varepsilon^p, \quad d\varepsilon^p = d\varepsilon_{ii}^p \quad (3)$$

прямо пропорциональны компонентам деватора напряжений.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (4)$$

Обозначая коэффициент пропорциональности в виде $d\lambda$, запишем

$$d\gamma_{ij}^p = d\lambda s_{ij}, \quad (5)$$

где λ — функция напряженно-деформированного состояния, зависящая, вообще говоря, от истории нагружения.

Используя выражение для интенсивности приращений пластических деформаций сдвига

$$d\Gamma^p = (2d\gamma_{ij}^p d\gamma_{ij}^p)^{1/2}, \quad (6)$$

выразим функцию $d\lambda$ в виде

$$d\lambda = \frac{d\Gamma^p}{2T}, \quad (7)$$

где

$$T = (s_{ij} s_{ij})^{1/2}, \quad (8)$$

T — интенсивность сдвиговых напряжений.

Пластическое деформирование горных пород сопровождается необратимыми изменениями объема, особенно заметными перед разрушением материала, когда в ней происходят интенсивные структурные изменения. Такой дилатансионный эффект позволяет учесть соотношение

$$d\varepsilon^p = \Lambda d\Gamma^p, \quad (9)$$

где Λ — коэффициент дилатансии.

Для учета взаимодействия берегов трещин будем считать, что интенсивность приращений пластических деформаций сдвига должна зависеть не только от приращений интенсивности касательных напряжений dT , но и от изменения в теле среднего напряжения $d\sigma$. Представим эту зависимость в виде

$$d\Gamma^p = \frac{1}{H} (dT + \alpha d\sigma). \quad (10)$$

Величина H называется модулем пластического упрочнения, α — коэффициент внутреннего трения.

Интегрируя (10), получим условие пластичности Друккера—Прагера [17] для напряжений

$$T + \alpha \sigma = f, \quad (11)$$

где

$$f = \int_{\Gamma^p} H d\Gamma^p + \int_{\alpha} \sigma d\alpha + c \quad (12)$$

f — функция текучести, c — сцепление.

Заметим, что если в качестве пластического потенциала взять функцию текучести и подставить ее в ассоциированный закон течения

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (13)$$

то для пластического изменения объема получим выражение

$$d\varepsilon^p = \alpha d\Gamma^p. \quad (14)$$

Сравнивая (9) и (14), приходим к выводу, что только в случае $\alpha = \Lambda$ пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести и подчиняется ассоциированному закону течения. Отклонение от нормали к поверхности текучести в случае $\alpha \neq \Lambda$, согласно постулату Друккера [18] об устойчивых упругопластических материалах, может привести при определенных условиях к бифуркации процесса пластического деформирования.

Полагая, что упругая часть полной деформации de_{ij}^{el} связана с приращением напряжения по закону Гука для изотропного тела, определяющий закон представим в виде

$$de_{ij} = \Pi_{ijkl} d\sigma_{kl}, \quad (15)$$

где

$$\Pi_{ijkl} = \left[-\frac{\nu}{2G(1+\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il}) \right] + \frac{1}{4H} \left(N_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \delta_{ij} \right) \left(\frac{s_{kl}}{T} + \frac{2}{3} \alpha \delta_{kl} \right). \quad (16)$$

Здесь G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, $N_{ij} = \frac{s_{ij}}{T}$.

Обращая соотношение (15), получим еще одно представление определяющего закона

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}, \quad (17)$$

$$E_{ijkl} = G \left\{ \left[(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) + \left(\frac{K}{G} - \frac{2}{3} \right) \delta_{kl} \delta_{ij} \right] - \frac{G}{(H+G) + \alpha \Lambda K} \left(N_{ij} + \frac{K}{G} \Lambda \delta_{ij} \right) \left(N_{kl} + \frac{K}{G} \alpha \delta_{kl} \right) \right\}, \quad (18)$$

где $K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G$ — модуль объемного сжатия.

Полученные представления определяющего закона (15) и (17) обобщают уравнение Прандтля—Рейсса на случай среды с внутренним трением и дилатансией. Соотношения в виде (15) впервые были предложены в работе [12], а в виде (17) — в работе [11] при анализе условий локализации пластической деформации. В работе [19] показано, что дилатансия играет особую роль в сейсмическом процессе. С ней связаны не только процессы разупрочнения и упрочнения горных пород, но и специфические формы запаса энергии, соизмеримой с энергией выделяемой при землетрясении. Параметры α и Λ по данным трехосных испытаний для горных пород имеют обычно следующие значения [20] $\alpha = 0,4 - 0,9$ и $\Lambda = 0,2 - 0,4$.

Эти величины характерны для низкопористых горных пород. Эксперименты с высокопористыми гранулированными горными породами показали, что параметры дилатансии (Λ) и внутреннего трения (α) при возрастании среднего давления изменяются от положительных до отрицательных значений [6]. Соответствующая предельная поверхность состоит из двух частей (рис. 4). На участке с возрастающей прочностью разрушение происходит в результате сдвига, а на участке с уменьшающейся прочностью происходит разрушение структуры в результате компакции. Если предположить, что при этом модель Друккера—Прагера остается справедливой, то следует допустить возможность отрицательных значений параметра α и отказаться от его интерпретации в виде коэффициента внутреннего трения материала.

Заметим, что модуль пластического упрочнения H не является независимым параметром в отличие от параметров Λ и α . Действительно, допустим, что параметр α зависит не только от среднего напряжения (см. рис. 1), но и от накопленной пластической деформации [21]. В этом случае

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma^p} d\Gamma^p + \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} d\sigma \quad (19)$$

и выражение для функции течения перепишем в виде

$$f = \int_{\Gamma^p} \left(H + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma^p} \right) d\Gamma^p + \int_{\sigma} \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} d\sigma + c. \quad (20)$$

Рис. 4. Предельная поверхность.

Полагая, что

$$f = c + \int_{\sigma} \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (21)$$

получим выражение для модуля пластического упрочнения

$$H = -\sigma \frac{d\alpha}{d\Gamma^p}. \quad (22)$$

Заметим, что в зависимости от знака производной реализуется режим упрочнения $\left(\frac{d\alpha}{d\Gamma^p} > 0\right)$ или разупрочнения $\left(\frac{d\alpha}{d\Gamma^p} < 0\right)$. В работе [22] связь между модулем упрочнения и углом трения была получена при анализе неустойчивости слоя насыщенной горной породы, подвергнутого плоской деформации сдвига при одновременном действии сжимающего напряжения.

Соотношения (17) были использованы в работе [11] для изучения смежного процесса деформирования, соответствующего локализации деформации в узкой полосе, при сохранении однородного напряжения σ_{ij} всюду в теле вкrest ее простираения. Недавно этот результат был обобщен для случая образования полос компакти [23]. Допустим, что перемещения в полосе меняются только по нормали к ней n_i . Это условие имеет вид

$$\Delta u_{i,j} = n_j g_i (\bar{n} \cdot \bar{x}), \quad (23)$$

где g_i — функция, не равная нулю только внутри полосы.

Поскольку предполагается, что напряжения на площадках, нормальных к полосе, остаются неизменными в момент бифуркации, то необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$n_i \Delta \sigma_{ij} = 0. \quad (24)$$

Полагая, что внутри полосы и вне ее материал ведет себя одинаково, и, подставляя (23) в (17) с учетом (24), получим систему однородных уравнений

$$(n_i E_{ijkl} n_l) g_k = 0, \quad (25)$$

из условия совместности которых следует условие

$$\det |n_i E_{ijkl} n_l| = 0. \quad (26)$$

Подставляя в (26) выражения для модулей (18) и разрешая его относительно модуля упрочнения, получим критическое соотношение [23]

$$H_{cr} = 3 \frac{(Gn_i N_{ij} n_j + \Lambda K) (Gn_k N_{kl} n_l + \alpha K)}{(4G + 3K)} + G [(n_i N_{ij} n_k N_{kj}) - (n_i N_{ij} n_j)^2] - (G + \alpha \Lambda K), \quad (27)$$

при выполнении которого возможно появление полосы локализации.

Заметим, что H зависит от ориентации плоскости локализации. Исследование соотношения (27) на максимум позволяет найти наибольшее значение H_{cr} , при котором впервые в процессе деформирования удовлетворяется условие (27)

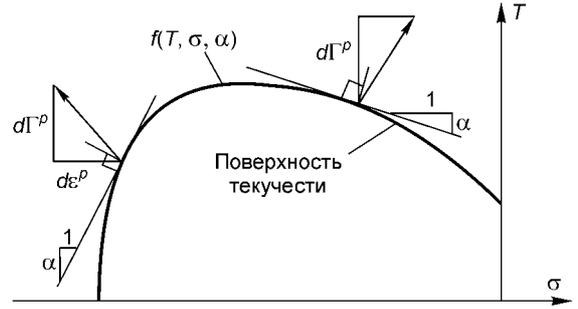
$$\frac{H_{cr}^{(RR)}}{G} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)} (\Lambda - \alpha)^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\alpha + \Lambda}{3} \right)^2. \quad (28)$$

Здесь $N = \frac{s_2}{T}$.

Это значение достигается при ориентации плоскости полосы вдоль промежуточного главного напряжения σ_2 и угле наклона φ к направлению наибольшего главного напряжения σ_1

$$\text{tg}^2 \varphi = - \frac{2(1+\nu)(\alpha + \Lambda) - 3[(1-2\nu)N + \sqrt{4-3N^2}]}{2(1+\nu)(\alpha + \Lambda) - 3[(1-2\nu)N - \sqrt{4-3N^2}]} \quad (29)$$

При выводе (27) были использованы соотношения



$$N_1 = \frac{s_1}{T} = -\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3N^2}, \quad N_3 = \frac{s_3}{T} = -\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3N^2}. \quad (30)$$

Полоса компакции образуется в плоскости, перпендикулярной к направлению максимального сжатия. В этом случае два из направляющих косинусов $n_1 = n_2 = 0$, а $n_3 = 1$ и критический модуль упрочнения имеет вид

$$\frac{H_{cr}^{c(RR)}}{G} = \frac{3}{4} \frac{\left(N_3 + \Lambda \frac{K}{G}\right) \left(N_3 + \alpha \frac{K}{G}\right)}{\left(1 + \frac{3}{4} \frac{K}{G}\right)} - \left(1 + \alpha \Lambda \frac{K}{G}\right). \quad (31)$$

Заметим, что соотношение (28) получено в предположении, что по мере накопления пластической деформации модуль H постепенно уменьшается. Однако, если в соответствии с (20)

$$H_{cr}^{s(RR)} > \left[-\sigma \frac{d\alpha}{d\Gamma^p} \right]_{\max}, \quad (32)$$

то соотношение (28), вообще говоря, не может быть выполнено. Это означает, что зарождение уединенной полосы локализации по Дж. Рудницкому и Дж. Райсу [11] невозможно. То же самое можно сказать и об образовании полос компакции. Как будет показано ниже, в этом случае неустойчивое развитие процесса деформирования ведет к формированию регулярной системы полос сдвига.

ВАРИАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Получим вариационное условие бифуркации процесса деформирования неупругого тела. Ограничимся случаем малых деформаций. Для сплошных деформируемых тел независимо от характера их реакции на действие внешних факторов должно выполняться начало возможных перемещений [24], согласно которому работа напряжений σ_{ij}

$$\delta R = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (33)$$

затраченная на дополнительную деформацию тела, соответствующую произвольно выбранной системе возможных перемещений δu_i , должна быть равна работе внешних объемных и поверхностных сил соответственно

$$\delta R_1 = \int_V F_i \delta u_i dV, \quad \delta R_2 = \int_S P_{kn} \delta u_k dS. \quad (34)$$

Здесь P_{kn} — проекции на оси эйлеровой системы координат поверхностной силы, действующей на площадке с нормалью n_i и отнесенной к первоначальной ее площади; F_i — проекции объемной силы, отнесенной к первоначальному объему элемента тела. Компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (35)$$

Таким образом, в каждый момент должно выполняться равенство

$$\delta \mathcal{E} = \delta R - \delta R_1 - \delta R_2 = 0. \quad (36)$$

Условие (36) дает возможность сравнить между собой различные продолжения процесса деформирования. Для этого рассмотрим напряженно-деформированное состояние тела с компонентами $u_i^0, \varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0, P_{kn}^0, F_i^0$ и назовем приводящий к нему процесс основным. Поскольку его продолжение, связанное с малыми приращениями $du_i^0, d\varepsilon_{ij}^0, d\sigma_{ij}^0$, не является единственным, перемещения, деформации и напряжения представим в виде

$$u_i = u_i^0 + du_i^0 + \Delta u_i, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + d\varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + d\sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij}. \quad (37)$$

Здесь $\Delta u_i, \Delta \varepsilon_{ij}, \Delta \sigma_{ij}$ — малые возможные приращения перемещений, деформаций и напряжений, обеспечивающие переход к смежному процессу деформирования.

Аналогичным образом представим изменение поверхностных сил

$$P_{kn} = P_{kn}^0 + dP_{kn}^0 + \Delta P_{kn}. \quad (38)$$

Приращения ΔP_{kn}^0 и ΔP_{kn} отличны от нуля в случае неконсервативной внешней нагрузки.

Относительно объемных сил предположим, что они не меняются в процессе деформирования.

Внося соотношения (37) и (38) в равенство (36) и помня, что величины, принадлежащие основному процессу, не варьируются, с точностью до квадратов приращений получаем

$$\delta \mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}^0 + d\mathcal{E}^0) + \delta(\Delta \mathcal{E}) = 0, \quad (39)$$

где первое слагаемое

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{E}^0 + d\mathcal{E}^0) = & \int_V \left[(\sigma_{ij}^0 + d\sigma_{ij}^0) \delta(\Delta e_{ij}) + (\sigma_{ij}^0 + d\sigma_{ij}^0) (u_{k,j}^0 + du_{k,j}^0) \delta(\Delta u_{k,i}) \right] dV - \\ & - \int_V F_i^0 \delta(\Delta u_i) dV - \int_S (P_{kn}^0 + dP_{kn}^0) \delta(\Delta u_k) dS \end{aligned} \quad (40)$$

представляет собой сумму работ внутренних и внешних сил основного процесса на вариациях возможных приращений перемещений Δu_i , а второе слагаемое

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = \int_V [\Delta \sigma_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) + (\sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j} + \Delta \sigma_{ij} u_{k,j}^0) \delta(\Delta u_{k,i})] dV - \int_S \Delta P_{kn} \delta(\Delta u_k) dS, \quad (41)$$

по терминологии работы [25] является второй специальной вариацией полной энергии тела.

В силу линейной независимости компонент основного и побочного продолжения процесса деформирования из (39) следует

$$\delta(\mathcal{E}^0 + d\mathcal{E}^0) = 0, \quad \delta(\Delta \mathcal{E}) = 0. \quad (42)$$

Первое равенство в (42) приводит к уравнениям равновесия и граничным условиям для основного процесса. Выполнение второго условия

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = \int_V [\Delta \sigma_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) + (\sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j} + \Delta \sigma_{ij} u_{k,j}^0) \delta(\Delta u_{k,i})] dV - \int_S \Delta P_{kn} \delta(\Delta u_k) dS = 0 \quad (43)$$

свидетельствует о том, что основное продолжение процесса деформирования не является единственным и от него возможны отклонения, не нарушающие равновесия тела.

Поскольку неустойчивость реализуется при малых деформациях основного состояния, слагаемые, содержащие $u_{k,j}^0$, можно опустить. В этом случае

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = \int_V [\Delta \sigma_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) + \sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j} \delta(\Delta u_{k,i})] dV - \int_S \Delta P_{kn} \delta(\Delta u_k) dS = 0. \quad (44)$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, перепишем выражение (44)

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = \int_V (\Delta \sigma_{ik} + \sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j})_i \delta(\Delta u_k) dV - \int_S [(\Delta \sigma_{ik} + \sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j}) n_i - \Delta P_{kn}] \delta(\Delta u_k) dS = 0. \quad (45)$$

Применим условие (45) к неограниченному телу, для которого переход в возмущенное состояние осуществляется в условиях продолжающегося деформирования без образования зон разгрузки. В этом случае возможные деформации побочного продолжения должны быть всюду ограниченными и для любого объема, выделенного из безграничного тела, интеграл по поверхности в (45) удовлетворится тождественно. В результате равенство (45) примет вид

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = \int_V (\Delta \sigma_{ik} + \sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,j})_i \delta(\Delta u_k) dV = 0. \quad (46)$$

Таким образом, анализ неустойчивости процесса деформирования в неограниченной теле сводится к исследованию существования условия (46).

ОБРАЗОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛОС СДВИГА

Рассмотрим неограниченное упругопластическое тело в условиях однородного основного процесса нагружения при главных напряжениях $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, совмещенных с координатными осями x_1 , x_2 и x_3 соответственно.

Предположим, что бифуркация пластического течения реализуется в виде чередующихся полос сдвига (полос нагрузки) толщиной a_1 и a_2 при условии, что $a_1 + a_2 = \text{const}$ (рис. 5). В пределах полос пластическое течение продолжается с разными скоростями (рис. 6, а, б) или сопровождается образованием

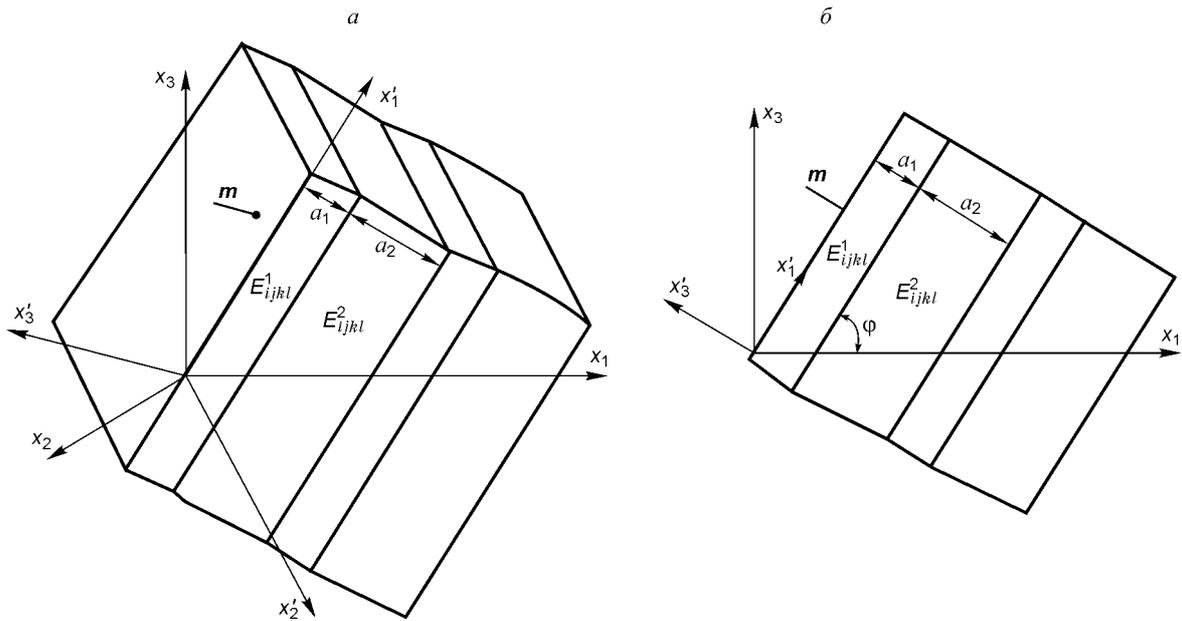


Рис. 5. Элемент регулярной структуры: пластическое течение в полосах происходит с разной скоростью (а). Энергетически выгодный элемент регулярной структуры (б).

полос упругой разгрузки (см. рис. 6,в). Режим образования полос упругой разгрузки в условиях разупрочнения был предложен ранее в работе [15].

Распределение приращений деформаций и напряжений в полосах является однородным. Причем для того, чтобы всюду в неограниченном теле приращения перемещений оставались конечными, они должны меняться только по нормали m к плоскости простираения полос, или, иначе говоря, к плоскости локализации $x_i m_i = \text{const}$.

Покажем, что плоскость локализации перпендикулярна одной из плоскостей, образуемых главными напряжениями основного процесса. Для этого воспользуемся принципом максимума, согласно которому зарождающиеся полосы должны принять ориентацию, соответствующую максимальному значению механической работы, совершаемой главными напряжениями σ_i^0 на приращениях деформаций $\Delta \epsilon_{ij}$,

$$\Delta A^0 = \sum_i \sigma_i^0 \Delta \epsilon_{ii}. \quad (47)$$

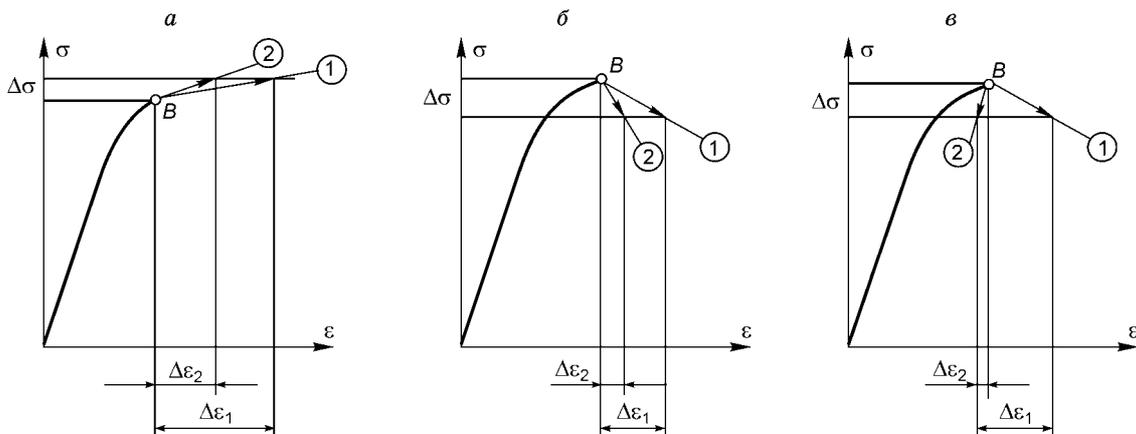


Рис. 6. Возможные варианты (1, 2) развития процесса деформирования при достижении точки бифуркации основного пластического течения:

Продолжающееся пластическое течение в режиме: а — упрочнения, б — разупрочнения, в — режим образования полос упругой разгрузки в условиях разупрочнения.

Введем систему координат x_i' и совместим координатную плоскость $x_1' x_2'$ с плоскостью локализаций $x_i m_i = \text{const}$. В силу сделанного предположения о распределении перемещений в побочном продолжении деформации

$$\Delta \varepsilon'_{11} = \Delta \varepsilon'_{22} = \Delta \varepsilon'_{12} = 0. \quad (48)$$

Совмещая ось x_1' с направлением максимального сдвига,

$$\Delta \gamma_{13} = [(\Delta \varepsilon'_{13})^2 + (\Delta \varepsilon'_{23})^2]^{1/2}, \quad (49)$$

получим, что

$$\Delta \varepsilon'_{ii} = \Delta \varepsilon'_{33} m_i^2 + \Delta \gamma_{13} l_i m_i, \quad (50)$$

где l_i, m_i — направляющие косинусы, задающие положение осей x_1', x_3' относительно осей x_i .

Выразим l_i и m_i через углы Эйлера ψ, ϑ, φ , представляющие собой величины последовательных поворотов против часовой стрелки вокруг осей x_2, x_3 и x_2' , необходимых для совмещения координатных осей x_i' и x_i (см. рис. 5,а). Внося (50) в (47) и исследуя полученное выражение на экстремум, получим, что ΔA^0 достигает максимума при $\vartheta = 0$, т. е. если оси x_2' и x_2 совпадают. При этом рис. 5,а упрощается и приобретает вид, показанный на рис. 5,б.

Учитывая, что в этом случае $m_2 = 0$ и $\Delta u_2 = 0$, окончательно представим приращения перемещений в полосах, удовлетворяющие условию неразрывности на контакте, в виде

$$\Delta u_j^{(1)} = x_i m_i B_j, \quad \Delta u_j^{(2)} = [(a_1 + a_2) - x_i m_i] (a_1/a_2) B_j, \quad i, j = 1, 3, \quad (51)$$

где B_j — константы.

Обращаясь к (42), условие существования рассматриваемой формы равновесия представим в виде суммы

$$\delta(\Delta \mathcal{E}^{(1)}) + \delta(\Delta \mathcal{E}^{(2)}) = 0, \quad (52)$$

где слагаемые представляют собой вторую специальную вариацию полной энергии в полосе 1 и в полосе 2.

Связь между приращениями напряжений и деформаций в полосах имеет вид

$$\Delta \sigma_{kl}^{(r)} = E_{ijkl}^r \Delta e_{kl}^{(r)}, \quad (53)$$

$$E_{ijkl}^r = G_r \left\{ (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) + \left(\frac{K_r}{G_r} - \frac{2}{3} \right) \delta_{kl} \delta_{ij} \right\} - \frac{G_r}{(H_r + G_r) + \alpha_r \Lambda_r K_r} \left(N_{ij} + \frac{K_r}{G_r} \Lambda_r \delta_{ij} \right) \left(N_{ij} + \frac{K_r}{G_r} \alpha_r \delta_{kl} \right), \quad r = 1, 2, \quad (54)$$

где G_r — модуль сдвига, K_r — модуль объемного сжатия, H_r — модуль пластического упрочнения, α_r — коэффициент внутреннего трения, Λ_r — коэффициент дилатансии.

Индекс r обозначает принадлежность параметров полосе 1 или полосе 2 (см. рис. 5).

При помощи (53), (54), (44) и (51) из (52) получим

$$D_{ijkl} (m_i B_k + m_k B_l) \delta(m_j B_i + m_i B_j) + 4\sigma_{ij}^0 \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) m_i m_j B_i \delta B_i = 0, \quad (55)$$

где $D_{ijkl} = F_{ijkl}^1 + \frac{a_1}{a_2} E_{ijkl}^2$.

Равенство (55) удовлетворяется, если выражения при вариациях независимых постоянных δB_1 и δB_2 одновременно обратятся в нуль. Из условия совместности соответствующей системы двух однородных алгебраических уравнений получим

$$T\xi^4 + 2R\xi^2 + 1 = 0, \quad \xi = \frac{m_1}{m_3} = -\text{ctg } \varphi. \quad (56)$$

Если напряжения σ_{ij}^0 малы по сравнению с упругими модулями, то $\sigma_{ij}^0 \ll D_{ijkl}$ и вторым слагаемым в (55) можно пренебречь. В этом случае

$$T = \frac{D_{3333}}{D_{1111}}, \quad 2R = \frac{(D_{1111} D_{3333} - D_{1133} D_{3311}) - D_{1313} (D_{1133} + D_{3311})}{D_{1313} D_{1111}}. \quad (57)$$

Корни уравнения (56) имеют вид

$$\xi_{1,2}^2 = -\frac{R}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{T}\right)^2 - \frac{1}{T}}. \quad (58)$$

Перепишем равенства в виде

$$\xi_{1,3} = \pm(\chi + i\eta), \quad \xi_{2,4} = \pm(\chi - i\eta), \quad (59)$$

где

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{R}{T} \right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} + \frac{R}{T} \right)^{1/2}. \quad (60)$$

Поскольку величина ξ может быть только действительным числом, то побочное продолжение процесса деформирования вида (51) реализуется не раньше, чем обратится в нуль величина η . Отсюда следует критическое условие зарождения локализации

$$(D_{1111}D_{3333} - D_{1133}D_{3311}) - D_{1313}(D_{1133} + D_{3311}) + 2D_{1313}\sqrt{D_{1111}D_{3333}} = 0 \quad (61)$$

и соответствующее ему соотношение для определения ориентации плоскости локализации

$$\xi^2 = -\frac{(D_{1111}D_{3333} - D_{1133}D_{3311}) - D_{1313}(D_{1133} + D_{3311})}{2D_{1313}D_{3333}}. \quad (62)$$

Модуль пластического упрочнения H убывает по мере увеличения интенсивности деформации. При монотонном изменении H существует его наибольшее значение $H_{cr \max}$, при котором впервые в процессе деформирования возможна внутренняя неустойчивость материала.

Рассмотрим бифуркацию, сопровождающуюся образованием полос упругой разгрузки в условиях разупрочнения (третий вариант на рис. 6). Анализ уравнения (61) после подстановки в него соотношений (54) показывает, что наибольшее значение H достигается для плоскости локализации, параллельной промежуточному главному напряжению. В этом случае при $v_1 = v_2 = \nu$ из (61) следует выражение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{G_1}{G_2} \frac{\frac{H_{cr}^{(RR)}}{G_1} - \frac{H}{G_1}}{\frac{H}{G_1} + \left(1 + \frac{K_1}{G_1} \alpha \Lambda\right)}. \quad (63)$$

При этом, согласно (61), ориентация полос сдвига определяется соотношением (29).

Согласно (63), отношение $\frac{a_1}{a_2}$ равно нулю при условии $H = H_{cr}^{(RR)}$. Если существует предельная минимально возможная толщина полосы a_1^0 , обусловленная зернистым строением материала, то это значит, что $a_2 \rightarrow \infty$ и в момент локализации произойдет зарождение всего одной полосы при разгрузке всего остального тела. Образование системы полос становится возможным при условии, что H становится сразу меньше $H_{cr}^{(RR)}$, начиная с момента перехода в пластическое состояние. Примером могут служить материалы с резко выраженной площадкой текучести. Так, в случае $H = 0$ и $\Lambda = 0$ для чистого сдвига $N = 0$ и $G_1 = G_2$, получим равенство

$$a_2 = \frac{18(1 - \nu_1)}{(1 + \nu_1)^2 \alpha^2} a_1, \quad (64)$$

из которого следует, например, что при $\alpha_1 = 0,7$ и $\nu_1 = 1/3$ ширина полосы разгрузки в 14 раз превышает ширину полосы локализации. Задавшись значением a_1^0 , можно найти абсолютную величину a_2 . Согласно (64), расстояние между полосами сдвига пропорционально размеру зерен материала. К такому же выводу пришли авторы работы [26], выполнившие экспериментальные исследования локализации пластической деформации в сыпучей среде при сдвиге в специальном нагружающем устройстве. Там же отмечалось, что при размерах зерен около 0,3 мм расстояние между линиями скольжения изменялось в пределах от 23 до 13 мм в зависимости от плотности упаковки зерен. Причем ширина полосы скольжения не превышала десяти зерен.

ОБРАЗОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛОС КОМПАКЦИИ

Рассмотрим, при каких условиях возможно формирование регулярной системы полос компакций. Исходя из того, что полосы компакций перпендикулярны направлению максимального сжимаемого

напряжения, угол $\varphi = 0$ и система полос компакции лежит в плоскости x_1x_2 . В этом случае $\xi_1 \rightarrow \infty$ и, согласно (58), $T = 0$, что приводит к равенству

$$D_{3333} = 0. \quad (65)$$

Из условия (65) получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} = -\frac{E_{3333}^1}{E_{3333}^2} = -\frac{G_1}{G_2} \left(\frac{4}{3} + \frac{K_1}{G_1} \right)^2 \left(\frac{H_1}{G_1} - \frac{H_{cr}^{(RR)}}{G_1} \right) \times \\ \times \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{K_1}{G_1} \right) \left(\frac{H_1}{G_1} - \frac{H_{cr}^{(RR)}}{G_1} \right) + \left(N_3 + \frac{K_1}{G_1} \alpha_1 \right) \left(N_3 + \frac{K_1}{G_1} \Lambda_1 \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{K_2}{G_2} \right) - \frac{1}{\left(\frac{H_2}{G_2} + 1 \right) + \alpha_2 \Lambda_2} \frac{K_2}{G_2} \left(N_3 + \frac{K_2}{G_2} \alpha_2 \right) \left(N_3 + \frac{K_2}{G_2} \Lambda_2 \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (66)$$

Как и в случае образования полос сдвига $a_1/a_2 = 0$ при условии $H = H_{cr}^{(RR)}$. Образование системы полос становится возможным при условии, что H становится сразу меньше $H_{cr}^{(RR)}$, начиная с момента перехода в пластическое состояние.

Очевидно, что полосы компакции могут реализоваться не всегда. Согласно (66), это возможно в двух случаях — $E_{3333}^1 < 0$ или $E_{3333}^2 < 0$. Отсюда следует неравенство

$$\frac{\left(N_3 + \frac{K_r}{G_r} \Lambda_r \right) \left(N_3 + \frac{K_r}{G_r} \alpha_r \right)}{\left[\left(\frac{H_r}{G_r} + 1 \right) + \alpha_r \Lambda_r \frac{K_r}{G_r} \right] \left(\frac{4}{3} + \frac{K_r}{G_r} \right)} > 1, \quad r = 1, 2, \quad (67)$$

которое не должно удовлетворяться одновременно при $r = 1$ и $r = 2$.

ВЫВОДЫ

Выполненный вариационный анализ условий бифуркации показал, что зарождение регулярной системы слоев локализации пластической деформации (полос сдвига и компакции) следует ожидать у материалов с хорошо выраженным пределом текучести. Этот вывод совпадает с заключением А. Надаи [1, с. 93], сделанным на основе анализа большого числа экспериментальных данных и согласно которому „... образование линий Людера на поверхности стали или подобных полос пластических слоев у других материалов следует ожидать во всех случаях, когда материал имеет хорошо выраженный предел текучести“. Важный вклад в это явление вносят внутреннее трение и дилатансия, способствующие развитию неустойчивости материала в режиме упрочнения при $H_1 > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Надаи А.** Пластичность. М.; Л., Изд-во НКТП СССР, 1936, 280 с.
2. **Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1974, № 3, с. 130—133.
3. **Николаевский В.Н., Лившиц Л.Д., Сизов А.И.** Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение // Механика деформируемого твердого тела, Т. 11. М., 1978, с. 123—250.
4. **Paterson M.S.** Experimental rock deformation — the brittle field. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978, 254 p.
5. **Jacques D.J., Viggiani G.** Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2004, v. 28, p. 279—321.
6. **Olsson W.A.** Theoretical and experimental investigation of compaction bands // J. Geophys. Res., 1999, v. 104, p. 7219—7228.
7. **Rudnicki J.W.** Compaction bands in porous rock // Bifurcations and instabilities in geomechanics / Eds. J. Labuz, A. Drescher. Swets & Zeitlinger Publishers, 2002, p. 29—39.
8. **El Bieda A., Sulema J., Martineaub F.** Microstructure of shear zones in Fontainebleau sandstone // Int. J. Rock Mechanics & Mining Sciences, 2002, v. 39, p. 917—932.
9. **Biot M.A.** Mechanics of incremental deformations. New York, John Wiley and Sons, 1965, 497 p.

10. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., Мир, 1964, 308 с.
11. **Rudnicki J.W., Rice J.R.** Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids, 1975, v. 23, № 6, p. 371—394.
12. **Николаевский В.Н.** Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучих сред // Прикладная математика и механика, 1971, т. 35, № 6, с. 1070—1082.
13. **Николаевский В.Н.** Механика пористых и трещиноватых сред. М., Недра, 1984, 232 с.
14. **Гарагаш И.А.** Образование ячеистых структур в упругопластической среде с внутренним трением и дилатансией // Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 1, с. 59—63.
15. **Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.** Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики, 1989, т. 12, № 1, с. 131—183.
16. **Шерман С.И., Демьянович В.М., Лысак С.В.** Сейсмический процесс и современная многоуровневая деструкция литосферы в Байкальской рифтовой зоне // Геология и геофизика, 2004, т. 45, с. 1458—1470.
17. **Drucker D.C., Prager W.S.** Soil mechanics and plastic analysis of limit design // Quarterly of Applied Mathematics, 1952, v. 10, p. 157—165.
18. **Друккер Д.** О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика, 1964, № 3, с. 115—128.
19. **Гольдин С.В.** Дилатансия, переупаковка и землетрясения // Физика Земли, 2004, № 10, с. 37—54.
20. **Райс Дж.Р.** Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика. М., Мир, 1979, с. 439—471.
21. **Vermeer P.A., de Borst R.** Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron, 1984, v. 29, № 3, p. 1—64.
22. **Garagash D.I.** Diffuse localized instability in compacting geomaterials under undrained conditions // Geomechanics: testing, modeling and simulation / Eds. J.A. Yamamoto, J. Koseki // ASCE Geotechnical Special Publication, 2005, № 143, p. 444—462.
23. **Issen K.A., Rudnicki J.W.** Condition for compaction bands in porous rock // J. Geophys. Res., 2000, v. 105, № B9, p. 371—390.
24. **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958, 370 с.
25. **Болотин В.В.** О теории армированных тел // Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1, с. 42—47.
26. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Локализация деформаций // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1983, № 5, с. 17—21.

*Поступила в редакцию
24 октября 2005 г.*