

новившейся траектории в 8—9 раз, смещению центра орбиты из первой четверти в третью на плоскости  $(x, y)$  и превращению круговой орбиты в эллиптическую. В расчетах на ЭВМ ЕС-1033 в основном использовались сетки  $16 \times 40$  и  $24 \times 60$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Константиnescу В. Н. Газовая смазка.— М.: Машиностроение, 1968.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1978.
3. Агишев Г. Г. Метод исследования динамики ротора, вращающегося в радиальных газовых подшипниках // Машиноведение.— 1984.— № 2.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

г. Челябинск

Поступила 21/III 1988 г.,  
в окончательном варианте — 20/IV 1990 г.

УДК 532.543

П. Г. Петров

### ДВИЖЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В ПРИДОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Задача состоит в математическом моделировании тонкого движущегося слоя двухфазной смеси, ограниченного снизу неподвижной сыпучей средой, сверху — потоком жидкости. Положение верхней границы движущегося слоя предполагается заданным, на ней заданы нормальные и касательные напряжения. Эти характеристики могут быть получены из решения уравнений гидродинамики.

Движущаяся смесь предполагается однородной, ускорение смеси — малым (и не учитывается). Как принято в уравнениях мелкой воды [1], вклад касательных напряжений на площадках, нормальных поверхности, мал и не учитывается, давление распределяется по гидростатическому закону.

**Постановка задачи.** В соответствии с принятыми допущениями уравнения движения запишутся в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial p / \partial s + \rho g \partial \xi / \partial s + \partial \tau_s / \partial m &= 0, \\ \partial p / \partial l + \rho g \partial \xi / \partial l + \partial \tau_l / \partial m &= 0, \quad \partial p / \partial m = \rho g \cos \gamma, \end{aligned}$$

где  $\xi = \xi(x, y)$  — уравнение поверхности смеси;  $x$  и  $y$  — декартовы горизонтальные координаты;  $s$  и  $l$  — ортогональные криволинейные координаты, лежащие на поверхности смеси;  $m$  — ось, направленная по нормали к поверхности смеси вниз ( $m = 0$  на поверхности  $\xi = \xi(x, y)$ );  $p$  — давление в смеси;  $\tau_s$  и  $\tau_l$  — проекции касательного напряжения  $\tau$  на площадках, параллельных поверхности смеси;  $\rho$  — плотность смеси ( $\rho = f\rho_r + (1-f)\rho_b$ );  $\rho_r$  и  $\rho_b$  — плотность частиц и воды;  $f$  — концентрация, значение которой определено ниже;  $\gamma$  — острый угол между нормалью к поверхности смеси и вертикальной линией.

Реологическое соотношение для касательного напряжения включает в себя закон Кулона для сыпучей среды и закон Прандтля для жидкости:

$$(2) \quad \tau = - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \middle/ \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \right| \right) (p_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_b).$$

Здесь  $p_s$  — дополнительное давление в смеси, возникающее за счет частиц;  $p_s = \rho_s g m \cos \gamma$ ;  $\rho_s = \rho - \rho_b = f(\rho_r - \rho_b)$ ;  $\varphi$  — угол внутреннего трения (принимается, как для покоящейся смеси, равным  $28^\circ$ );  $\tau_b = \rho_b L^2 |\partial \mathbf{u} / \partial m|^2$ ;  $L$  — длина пути смещения ( $L = \kappa(a - m)$ );  $a$  — толщина слоя движущейся смеси;  $\kappa$  — постоянная Кармана, согласно опытам Никурадзе для чистой воды, равная 0,4, для смеси в [2] в зависимости от концентрации  $\kappa$  имеет меньшие значения, например, при  $f = 0,2 \div 0,3$   $\kappa = 0,2$ .

В движущемся слое смеси ( $m \leq a$ ) из (2) следует  $|\tau| = \rho_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_b$ , в неподвижном слое смеси (нижнем) ( $m \geq a$ )  $|\tau| \leq p_s \operatorname{tg} \varphi$ . Таким обра-

зом, в силу непрерывности  $|\tau|$  необходимо выполнение условия на нижней границе слоя

$$(3) \quad \tau_b = 0 \text{ при } m = a.$$

Кроме того, должно выполняться условие непрерывности скорости, откуда

$$(4) \quad u = 0 \text{ при } m = a.$$

На верхней границе ( $m = 0$ ) заданы касательные и нормальные напряжения

$$(5) \quad \tau = \tau_\xi, p = p_\xi \text{ при } m = 0.$$

Таким образом, сформулирована краевая задача (1)–(5) для определения неизвестных функций толщины слоя  $a$  и вектора скорости  $u$ .

Частный случай уравнения (2) для одномерного равномерного движения смеси при  $\xi = 0$  использовался в [3] для определения расхода частиц. Краевая задача (1)–(5) применялась в [4, 5] для описания движения смеси при вязком законе трения для  $\tau_b$  и в [6] при дополнительных предположениях о величине  $L$ . Обзор работ по механике гранулированных сред приведен в [7].

**Решение одномерной задачи.** Рассмотрим одномерное движение вдоль оси  $s$ . Из последнего уравнения системы (1) получим  $p = p_\xi + \rho g m \cos \gamma$ . При гидростатическом распределении давления в случае, когда уклон свободной поверхности много меньше уклона дна,

$$\partial p / \partial s + \rho g \partial \xi / \partial s = A \Gamma \quad (A = \rho_s g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma, \Gamma = \partial \xi / \partial s / (\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)).$$

Интегрируя первое уравнение системы (1) по  $m$ , имеем

$$(6) \quad \tau = \tau_\xi - m \Gamma A.$$

Из формул (2) и (6) при  $m = a$  с учетом граничного условия (3) находим

$$(7) \quad a = \tau_\xi / [A(1 + \Gamma)].$$

Очевидно, что условием малости ускорений можно пользоваться при  $|\Gamma| < 1$ .

На частицы действуют сила лобового сопротивления со стороны жидкости, сила взаимодействия между частицами и взвешенный вес частиц в жидкости. Ускорением пренебрегаем. Из условия равновесия частиц в элементарном объеме  $\Delta m \Delta s$  получим

$$N c_x \rho_b v^2 d^2 / 2 = \Delta m \Delta s \partial \tau_\kappa / \partial m + A \Gamma \Delta m \Delta s,$$

где  $v$  — разность скоростей смеси и движущихся частиц;  $N$  — число частиц в объеме  $\Delta m \Delta s$ ;  $\tau_\kappa = A m$  — трение частиц;  $c_x \approx 1$  — коэффициент лобового сопротивления частиц;  $d$  — диаметр частиц. Так как  $N d^2 = f \Delta m \Delta s / d$ , после преобразований

$$v = \sqrt{\frac{2d}{c_x f \rho_b}} \sqrt{A(1 + \Gamma)} = \sqrt{\frac{2d}{c_x f \rho_b}} \sqrt{\frac{\tau_\xi}{a}}.$$

Из уравнений (2), (6), (7) имеем

$$\left| \frac{\partial u}{\partial m} \right|^2 = \frac{\tau_\xi - m A (1 + \Gamma)}{\rho_b [\kappa (a - m)]^2} = \frac{\tau_\xi}{\rho_b \kappa^2 a (a - m)}.$$

Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial m} = - \frac{\sqrt{\tau_\xi}}{\sqrt{\rho_b \kappa} \sqrt{a} \sqrt{a - m}}$ .

Вычислим удельный массовый расход твердых частиц с помощью интегрирования по частям, учитывая граничное условие (4):

$$G = f \rho_r \int_0^a u dm - f \rho_r \int_0^a v dm = f \rho_r u m \Big|_0^a -$$

$$-f\rho_r \int_0^a m \frac{\partial u}{\partial m} dm - f\rho_r va = f\rho_r \sqrt{\frac{\tau_\xi}{\rho_b}} \frac{4}{3} \frac{a}{\kappa} \left( 1 - \frac{3\kappa}{4} \sqrt{\frac{2}{c_x f}} \sqrt{\frac{d}{a}} \right).$$

С помощью формулы (7) находим

$$(8) \quad G = \frac{G_0 \left( 1 - \frac{3\kappa}{4} \sqrt{\frac{2}{c_x f}} \sqrt{\frac{d}{a}} \right)}{1 + \Gamma},$$

где 
$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_r \tau_\xi^{1,5}}{\kappa \sqrt{\rho_b} (\rho_r - \rho_b) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}.$$

В настоящее время в гидравлике хорошо изучены критические напряжения сдвига частиц  $\tau_*$ . В смеси эти напряжения должны быть при  $m = a = d$ . Из (7) при  $\Gamma = 0$  и  $\cos \gamma = 1$  получим формулу  $\tau_* = Ad = = f(\rho_r - \rho_b) g \operatorname{tg} \varphi d$ , совпадающую с большинством известных при  $f = = 0,07$ . Если воспользоваться известным соотношением между касательным напряжением на дне и квадратом средней по глубине скорости верхнего потока жидкости, из соотношения для  $\tau_*$  можно получить формулу размывающей скорости, которая также хорошо согласуется с экспериментом, имеющимися эмпирическими формулами и совпадает полностью с формулой В. А. Гончарова.

При  $\kappa = 0,25$  значения  $G$  будут близки к аналогичным, найденным по формулам из [8, 9]. Как отмечается в [2, 10], они хорошо описывают опытные данные. Заметим, что при  $\kappa = 0,25$ ,  $f = 0,07$  и  $c_x = 1$   $(3\kappa/4) \sqrt{2/(c_x f)} = 1$ , и (8) можно упростить:  $G = G_0 (1 - \sqrt{d/a})/(1 + \Gamma)$ . Здесь  $G = 0$  при  $d = a$  или  $\tau_\xi = \tau_*$ . Множитель  $(1 - \sqrt{\tau_*/\tau_\xi})$  имеется в большинстве эмпирических формул для  $G$ , что является дополнительным свидетельством о достоверности результатов. Таким образом, значения эмпирических параметров определены:  $\kappa = 0,25$ ,  $f = 0,07$ .

**Решение двумерной задачи.** Введем вектор  $\Gamma$  с проекциями  $\Gamma_s = (\partial \xi / \partial s) / (\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)$ ,  $\Gamma_l = (\partial \xi / \partial l) / (\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)$ . Тогда при гидростатическом законе давления по аналогии с одномерным случаем

$$\partial p / \partial s + \rho g \partial \xi / \partial s = A \Gamma_s, \quad \partial p / \partial l + \rho g \partial \xi / \partial l = A \Gamma_l.$$

Интегрируя первые два уравнения системы (1) по  $m$ , получим

$$(9) \quad \mathbf{F} = \tau (\mathbf{F} = \tau_\xi - m A \Gamma).$$

Будем считать, что ось  $z$  направлена по  $\tau_\xi$ .

Приравняв квадраты модулей левой и правой частей уравнения (9) при  $m = a$  с учетом граничного условия (3) и реологического соотношения (2), находим квадратное уравнение относительно неизвестной толщины движущегося слоя  $a$ . Единственный положительный корень этого уравнения

$$(10) \quad a = \frac{\tau_\xi}{A} \frac{\sqrt{1 - \Gamma_l^2} - \Gamma_s}{1 - \Gamma^2} \quad (\Gamma^2 = \Gamma_s^2 + \Gamma_l^2).$$

При малых  $\Gamma$

$$(11) \quad a = (\tau_\xi / A) (1 - \Gamma_s).$$

Из формулы (10) при диаметре частиц  $d = a$  можно получить значение критических напряжений сдвига частиц

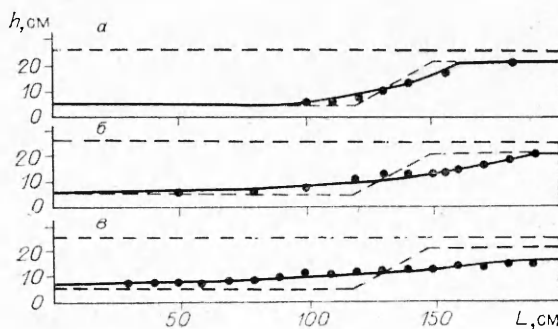
$$\tau_* = [A (1 - \Gamma^2) d] \left( \sqrt{1 - \Gamma_l^2} - \Gamma_s \right).$$

Это выражение совпадает с известным, используемым в практике расчета каналов на размыв при  $\Gamma_s = 0$ . Из формул (2) и (9) следует

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \right| = \left[ \frac{|\mathbf{F}| - mA}{\rho_b [\kappa (a - m)]^2} \right]^{0,5}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} = - \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \right|.$$

По аналогии с одномерным случаем учтем относительную скорость движения частиц и с помощью интегрирования по частям определим удельный расход твердых частиц:

$$(12) \quad G = -f\rho_r \left(1 - \sqrt{\frac{d}{a}}\right) \int_0^a m \frac{\partial u}{\partial m} dm = \\ = \frac{f\rho_r}{\sqrt{\rho_b \kappa}} \left(1 - \sqrt{\frac{d}{a}}\right) \int_0^a \frac{m}{a-m} \frac{F}{|F|} (|F| - mA)^{0,5} dm.$$



При малых  $\Gamma$  справедливо разложение в ряд

$$(13) \quad G = G_0 \left[ \frac{\tau_{\xi}}{|\tau_{\xi}|} (1 - 0,2\Gamma_s) - 0,8\Gamma \right] \left(1 - \sqrt{\frac{d}{a}}\right).$$

Рассмотрим течение в канале при равномерном движении с постоянным расходом воды  $Q$ . Так как размыв происходит медленно, можно считать, что  $\tau_{\xi}$  в каждый момент времени определяется зависимостью равномерного движения  $\tau_{\xi} = \rho_b g h I$  ( $h$  — глубина,  $I$  — уклон свободной поверхности). Уравнение баланса наносов в этом случае запишется в виде

$$(14) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_r (1 - \varepsilon)} \frac{\partial G_y}{\partial y} = 0,$$

где  $\varepsilon = 0,4$  — пористость;  $G_y$  — проекция  $G$  на горизонтальную ось  $y$ , которая направлена перпендикулярно скорости течения воды.

На рисунке (при  $Q = 0,112 \text{ м}^3/\text{с}$  и  $t = 0,3; 2,5; 5,54$  — соответственно  $a - в$ ) на поперечном сечении лотка показано изменение отметок дна (опыты проводились в гидравлической лаборатории ЦНИИС А. Н. Милитеевым и Н. Л. Мойжес), точки — экспериментальные значения, сплошная линия — поверхность дна, полученная в результате расчета по уравнению (14), нижняя штриховая — положение дна в начальный момент времени  $t = 0$ , верхняя горизонтальная линия (штриховая) — положение свободной поверхности воды. Диаметр частиц грунта во всех опытах 0,2 мм. Расчеты  $G_y$  проводились с помощью формул (10) и (12), а также (11) и (13). Результаты расчетов в обоих случаях близки и на графиках совпадают.

Для контроля измеренной величины  $I$  нами определен коэффициент шероховатости в формуле Шези — Маннинга, он во всех случаях оказался равным 0,02, что соответствует табличному значению в [11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — Новосибирск: Наука, 1985.
2. Гришанин К. В. Динамика русловых потоков. — Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
3. Hanes D. M. Grain flows and bed-load sediment transport: river and extension // Acta Mech. — 1986. — V. 63, N 1—4.
4. Петров П. Г. Расчет размывов вблизи гидротехнических сооружений // Гидравлика дорожных водопропускных сооружений: Тез. докл. IV Республиканской конф. — Саратов, 1985.
5. Петров П. Г. Движение донных наносов под воздействием потока жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 2.
6. Петров П. Г. Движение донных наносов в турбулентном неравномерном потоке жидкости // Тр. ЛПИ. — 1988. — № 424.
7. Ишлинский А. Ю., Черный Г. Г. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. — М.: Мир, 1985.
8. Bagnold R. A. The nature of saltation and of «bed-load» transport in water // Proc. Roy. Soc. — 1973. — V. 332, N 1591.

9. Meyer-Peter E., Muller R. Formulas for bed-load transport // II Congr. IAHR.— Stockholm, 1948.— V. 3.  
 10. Botcheva M. M., Ioncheva V. D. Applicability of bed-load sediment formulas to natural Bulgarian river flow // XXIII Congr. IAHR.— Canada, 1989.— V. B.  
 11. Штеренлихт Д. В. Гидравлика.— М.: Энергоатомиздат, 1984.

г. Москва

Поступила 17/IV 1990 г.

УДК 532.529:532.545

Ю. А. Буевич

## РАССЛОЕНИЕ РАВНОПЛОТНОЙ СУСПЕНЗИИ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПОТОКАХ ПУАЗЕЙЛЯ

В течениях суспензий в каналах формируются неоднородные профили концентрации, что существенно сказывается на наблюдаемых гидравлических свойствах течения [1]. Для суспензий с одинаковыми плотностями фаз первоначальная причина такого структурирования состоит в действии на обтекаемые вращающиеся частицы инерционной поперечной подъемной силы, которая в зависимости от направления относительной скорости фаз способствует миграции частиц в центральную область течения или к стенкам [2]. Однако до сих пор нет однозначного ответа на вопрос, какие физические факторы противодействуют этой силе, приводя в конечном счете к установлению некоторого стационарного распределения частиц в сечениях канала. Имеются лишь феноменологические модели расслоения суспензий, основанные на эвристическом требовании минимума диссипации энергии в реальных течениях [3, 4], на введении уравнений диффузии и сохранения момента импульса при помощи методов неравновесной термодинамики или других [5, 6], на отождествлении ядра плотноупакованных частиц с бесконечным кластером [7] и т. п.

Ниже предполагается, что стационарное распределение концентрации достигается в результате того, что конвективный миграционный поток частиц в поперечном направлении, обусловленный подъемной силой, компенсируется противоположно направленным диффузионным потоком в неоднородном поле концентрации. Для описания последнего вводится в соответствии с классическим методом Эйнштейна действующая на частицы термодинамическая сила, которая определяется из условия, чтобы создаваемый ею поток частиц был в точности равен диффузионному. Она введена ранее при описании броуновской диффузии в разбавленных суспензиях в [8], обобщение на концентрированные суспензии содержится в [9]. Разные аспекты гидромеханики суспензий с учетом такой силы обсуждены в [9—11].

Диффузия частиц может быть вызвана их случайными пульсациями разной физической природы. Здесь для определенности принимаем, что частицы настолько малы, что реальный вклад в пульсации вносит лишь изотропное броуновское движение. При этом суспензия считается изотермической и принимается гипотеза о локальном термодинамическом равновесии, из которой следует, в частности, что средняя энергия броуновского движения частицы в расчете на одну степень свободы такая же, что и для молекул окружающей среды.

1. Рассмотрим монодисперсную суспензию мелких сферических частиц радиуса  $a$ , плотность которых  $d$  совпадает с плотностью жидкости. Силы тяжести и плавучести не приводят к появлению скольжения фаз в равноплотных суспензиях, поэтому они стандартным путем могут быть включены в эффективное давление. Если скорость скольжения намного меньше по модулю средних скоростей обеих фаз, что типично для рассматриваемых суспензий, то уравнения сохранения массы и импульса суспензии в целом при условии несжимаемости фаз можно записать в форме

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad -\nabla p + 2\nabla(\eta\nabla\mathbf{e}) = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  — средняя скорость суспензии;  $p$  — давление с учетом внешних массовых сил;  $\mathbf{e}$  — тензор скоростей деформаций, построенный по полю  $\mathbf{v}$ ;  $\eta = M(\rho)\eta_0$  — эффективная вязкость суспензии ( $\eta_0$  — вязкость чистой жидкости,  $M(\rho)$  — возрастающая функция объемной концентрации диспергированной фазы  $\rho$ ,  $M(0) = 1$ ).

Для одномерных течений Пуазейля не обращающиеся в тождество уравнения (1.1) принимают вид (параметр  $m$  равен нулю или единице для течений с плоской или осевой симметрией)

$$(1.2) \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{x^m} \frac{d}{dx} \left( x^m M \frac{dv}{dx} \right) = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$