

ОСОБЕННОСТИ ГОРЕНИЯ ПЕРЕМЕШАНЫХ ГАЗОВ В СИЛЬНО ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников

При анализе распространения пламени в турбулентном потоке перемешанных газов часто используется гипотеза о «поверхностном» механизме горения, выдвинутая в [1, 2], т. е. предполагается, что горение происходит в очень узких зонах, характеристики которых аналогичны характеристикам нормального фронта пламени. Скорость горения увеличивается из-за искривления этих зон и соответствующего роста поверхности фронта пламени. Строго говоря, этот механизм осуществляется только, если масштаб наименьших вихрей η (колмогоровский размер) много больше толщины нормального фронта пламени

$$\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{1/4},$$

где $\varepsilon = u'^3/L_\varepsilon$ — скорость диссипации энергии; L_ε — интегральный масштаб турбулентности; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Оценим величину $s = \eta u_n a^{-1}$ (a — коэффициент температуропроводности, u_n — скорость нормального распространения пламени). Поскольку $\nu = a$, $s = (u_n/u') (u' L_\varepsilon/a)^{1/4}$.

Рассмотрим типичный режим, встречающийся в опытах: горение стехиометрической бензино-воздушной смеси при нормальном давлении и температуре горючей смеси $T_u = 440$ К в трубе диаметром 5 см при средней скорости 100 м/с. Имеем $a = 0,4$ см²/с, и $u_n = 86$ см/с, $L_\varepsilon = 1$ см, $u' = 5$ м/с. Отсюда $s = 1$, т. е. толщина нормального фронта пламени и колмогоровский размер — величины одного порядка. Оценки показывают, что в отдельных случаях колмогоровский размер может быть на порядок меньше тепловой толщины нормального фронта пламени a/u_n , при этом величина η сопоставима с толщиной зоны реакций. Заметим также, что ε (и следовательно, η) — случайная величина, распределенная по логарифмически нормальному закону [3]. Для такого закона характерен чрезвычайно широкий спектр возможных значений ε и η , поэтому при одном и том же среднем η с большой вероятностью будут встречаться как очень большие, так и очень маленькие значения η . Представляет интерес, по крайней мере, качественно проанализировать влияние интенсивной мелкомасштабной турбулентности на распространение пламени.

Рассмотрим, какие эффекты могут возникать в анализируемом случае. Во-первых, кривизна пламени становится очень велика по сравнению с a/u_n . Во-вторых, на расстояниях порядка a/u_n скорость среды сильно меняется по сравнению с u_n . При таких условиях могут стать важными эффекты, связанные с неравенством коэффициентов молекулярного переноса. Эти эффекты приводят к тому, что состав и температура в зоне реакций становятся переменными по поверхности фрон-

та. При подобии полей температур и концентраций в приближении Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого [4] удельная скорость тепловыделения Q (отнесенная к единице поверхности пламени) постоянна: $Q = u_n(T_b - T_u)$ (T_b — температура продуктов сгорания). Если масштаб η сопоставим с толщиной зоны химических реакций, такое приближение не пригодно и величина Q становится переменной.

Цель данной работы состоит в том, чтобы на ряде простых примеров проанализировать указанные эффекты. Влияние кривизны пламени рассмотрено на стационарном цилиндрическом пламени, расположенном либо вокруг источника горючей смеси, либо вокруг стока продуктов сгорания. Влияние сильного изменения скорости среды на расстояниях порядка a/u_n рассмотрено на примере распространения пламени в потоке с однородной безвихревой деформацией ($\partial u_n/\partial x_j = \text{const}$, $\text{rot } \bar{u} = 0$, \bar{u} — скорость, \bar{x} — координата). Такая постановка задачи в теории локально однородной турбулентности впервые разработана в [5], где рассмотрено влияние деформации на завихренность. Влияние деформации потока на горение рассматривалось в [6—8]. В этих работах предполагалось, что коэффициенты молекулярного переноса равны, а задача решалась в приближении [4]. В поток рассматриваемого типа можно формально ввести колмогоровский масштаб $\eta = (\nu/k)^{1/2}$, [$k^2 = (\partial u_j/\partial x_k)^2$] и характерное время $\tau = k^{-1}$. В реальном турбулентном потоке деформацию можно считать однородной только в областях с размером η , причем скорость деформации постоянна только на временах порядка τ . Поскольку интерес представляет качественная картина явления, в первом приближении можно считать, что скорость деформации постоянна во всем потоке и не меняется со временем.

В случаях, когда учитывается толщина зоны реакций, предполагается, что поля концентраций и температуры подобны. Тогда скорость тепловыделения W выражается только через температуру T . Относительно функции W предполагается, что ее можно аппроксимировать выражением

$$W(T) = \begin{cases} g(T_b - T), & T_b \geq T > T_0 \\ 0, & T_u < T \leq T_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $T_0 = T_b(1 - \delta)$, $\delta = RT_b/E \ll 1$, $g = u_n^2/(a\delta^2)$, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная. В случае, когда W имеет вид (1), уравнение теплопроводности оказывается линейным и в зоне химических реакций, и в зоне подогрева. «Стыковка» обоих решений осуществляется на изотерме $T = T_0$ из условия непрерывности температуры и ее производной. Если рассматриваются эффекты, связанные с неравенством коэффициентов молекулярного переноса, толщина зоны реакции не учитывается ($\delta \rightarrow 0$). В этом приближении зона химических реакций вырождается в поверхность, на которой производные от температуры и концентраций терпят разрыв [9]. В работе используются уравнения диффузии в приближении сильного разбавления. Кроме того, предполагается, что плотность и коэффициенты молекулярного переноса постоянны.

1. Распространение плоского пламени в потоке с постоянным градиентом скорости. В силу условия $\text{rot } \bar{u} = 0$, можно найти систему координат, в которой $u_j = k_j x_j$ (но j не суммируется), $\sum_1^3 k_j = 0$. Так как

пламя плоское, то уравнения изотерм имеют вид $x_j n_j = \text{const}$ ($n_j^2 = 1$), распределение температуры и концентраций зависит только от одной пространственной переменной $x = n_j x_j$, а компонент скорости, нормальный изотерме, есть $u = kx$ ($k = k_j n_j$). Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\partial T/\partial t + kx \cdot \partial T/\partial x = a \cdot \partial^2 T/\partial x^2 + W. \quad (2)$$

Характер решения уравнения (2) зависит от знака k . Пусть $k < 0$ (среда сжимается в направлении, нормальном фронту пламени) и $u_n^2 \delta^{-2} / a \gg |k| \gg u_n^2 / a$. Этот случай сходен с ситуацией, когда колмогоровский размер много меньше тепловой толщины и много больше толщины зоны реакций. Тогда применимо приближение [4], т. е. зону реакции можно считать плоскостью. Пусть она расположена при $x = x_0$. В этой точке $T = T_b$, $\partial T(x_0 - 0) / \partial x = (T_b - T_u) u_n / a$ ($T = T_b$ при $x \geq x_0$). Уравнение (2) имеет стационарное решение. Так как этот случай рассмотрен в [6, 7], приведем сразу результат

$$T = T_u + (T_b - T_u) \frac{1 + \Phi(s)}{1 + \Phi(s_0)}, \quad s = \sqrt{\frac{|k|}{2a}} x, \quad s_0 = \sqrt{\frac{|k|}{2a}} x_0,$$

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-y^2} dy, \quad u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2a|k|}} = \frac{\exp(-s_0^2)}{1 + \Phi(s_0)}. \quad (3)$$

Здесь s — безразмерное расстояние, отнесенное к колмогоровскому масштабу. Из (3) асимптотически при $|k| \rightarrow \infty$ получаем

$$x_0 = \sqrt{a \ln [a |k| / (2\pi u_n^2)] / |k|}. \quad (4)$$

Из (3) следует, что значения $T \sim T_u$ достигаются при $s \sim -1$ или на расстояниях порядка $x \sim -\sqrt{2a/|k|}$. Толщина фронта пламени l порядка $x_0 - x_1$; так как $x_0 \gg |x_1|$, то

$$l \sim x_0. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) показывают, что по мере уменьшения колмогоровского размера (увеличении $|k|$) тепловая толщина пламени непрерывно уменьшается. Отношение толщины пламени к колмогоровскому размеру очень слабо возрастает $l/\eta = \sqrt{\ln [a |k| / u_n^2]}$.

2. Случай $|k| \gg u_n^2 \delta^{-2} / a$, т. е. колмогоровский размер много меньше толщины зоны реакций. В стационарном случае уравнение (2) приобретает вид

$$-|k|x \cdot \partial T / \partial x = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 \quad (x < x_0, T < T_0),$$

$$-|k|x \cdot \partial T / \partial x = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 + g(T_b - T) \quad (x > x_0, T > T_0). \quad (6)$$

В точке $x = x_0$ непрерывна температура и ее производная. Из (6) получаем

$$T = T_u + (T_0 - T_u) [(1 + \Phi(s)) / (1 + \Phi(s_0))] \quad (-\infty < s < s_0),$$

$$T = T_b + (T_0 - T_b) \frac{D_p(s\sqrt{2})}{D_p(s_0\sqrt{2})} \exp\left[-\frac{1}{2}(s^2 - s_0^2)\right], \quad (7)$$

$$p = -1 - g/|k| = -1 - u_n^2 \delta^{-2} a^{-1} |k|^{-1} \quad (s_0 \leq s < +\infty).$$

Здесь D_p — функция параболического цилиндра. В этом соотношении учтена непрерывность температуры. Из условия непрерывности производной от температуры имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0 - T_u}{1 + \Phi(s_0)} \exp\left(-s_0^2\right) = \frac{T_b - T_0}{D_p(s_0\sqrt{2})} \cdot D_{p+1}(s_0\sqrt{2}).$$

Так как $\delta(T_0 - T_u) = T_b - T_0$ и $p \rightarrow -1$ при $|k| \rightarrow \infty$, то асимптотически находим

$$s_0 = \sqrt{-2 \ln \delta}. \quad (8)$$

Значения $T \sim T_u$ по-прежнему осуществляются на безразмерных расстояниях $s_1 \sim -1$ и так как $s_0 \gg |s_1|$ (δ мало), то

$$l/\eta = s_0. \quad (9)$$

Таким образом, отношение толщины зоны подогрева к колмогоровскому размеру при увеличении скорости деформации остается постоянным. Поскольку $p \rightarrow -1$ и $s \sim s_0 \gg 1$, то в зоне реакции распределение температуры (7) приобретает вид

$$T = T_b + (T_0 - T_b) \cdot s_0/s \cdot \exp[-2s_0\Delta s - (\Delta s)^2], \quad \Delta s = s - s_0 > 0.$$

Здесь использовано асимптотическое представление функций D_p . Видно, что температура существенно меняется на безразмерных расстояниях порядка $1/s_0$. Поскольку $s_0 \gg 1$, то толщина зоны реакции при деформации становится много меньше колмогоровского размера.

Найдем удельную скорость тепловыделения $Q = \int_{-\infty}^{\infty} W dx$. Из (7) имеем

$$Q/Q_n = u_n/\delta \sqrt{a|k|} \cdot [D_{p-1}(s_0\sqrt{2})]/[D_p(s_0\sqrt{2})], \\ a_n = u_n(T_b - T_u).$$

При $\delta = \text{const}$ и $|k| \rightarrow \infty$, учитывая (9), получим

$$Q/Q_n = u_n/\delta \cdot \sqrt{-(\ln \delta/a|k|)}, \quad (10)$$

т. е. с увеличением скорости деформации удельная скорость тепловыделения неограниченно падает, что вполне понятно, так как в рассматриваемом случае характерные размеры пламени пропорциональны колмогоровскому масштабу. Отметим также, что из качественных соображений этот результат получен в [6].

3. Случай $k > 0$, $u_n^2 a^{-1} \delta^{-2} \gg k \gg u_n^2 a^{-1}$ (т. е. можно пользоваться приближением [4]). Уравнение (2) стационарных решений не имеет при растяжении среды в нормальном к фронту направлении толщина пламени возрастает. Начальные условия в момент $t=0$ зададим такими, как в нормальном фронте пламени

$$T = T_u + (T_b - T_u) \exp(u_n x/a) \quad (x < 0), \\ T = T_b \quad (x > 0). \quad (11)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ — уравнение движения зоны химических реакций, тогда задача сводится к решению уравнения

$$\partial T/\partial t + kx \cdot \partial T/\partial x = a \cdot \partial^2 T/\partial x^2 \quad (12)$$

с начальными (11) и граничными условиями

$$T(-\infty, t) = T_u, \quad T[\varphi(t), t] = T_b, \\ \partial T/\partial x|_{x=\varphi(t)} = (T_b - T_u) u_n/a. \quad (13)$$

Введем новые переменные

$$\xi = 1 - \exp(-2kt), \quad y = xu_n \exp(-kt)/a - \psi, \\ \psi = u_n \varphi \exp(-kt)/a. \quad (14)$$

Соотношения (11) — (13) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi} - d\psi/d\xi \cdot \partial T/\partial y &= \alpha \cdot \partial^2 T/\partial y^2, \\ \alpha &= 1/2 \cdot u_n^2/ak, \quad T(y, 0) = T_u + (T_b - T_u) \exp(y), \\ T(-\infty, \xi) &= T_u, \quad T(0, \xi) = T_b, \\ \partial T(0, \xi)/\partial y &= (T_b - T_u)/\sqrt{1 - \xi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку параметр α мал, то решение можно найти методом сращиваемых асимптотических разложений. Область определения решения ($y < 0$) разбиваем на две части — пограничный слой, расположенный в малой окрестности точки $y=0$, и внешнюю часть. Граничные условия имеют особенность при $\xi=1$ ($t=\infty$), поэтому решение справедливо при $k \rightarrow \infty$ и $1 - \text{const} > \xi > 0$ ($\text{const} \ll 1$). Значениям $\xi \approx 1$ соответствуют времена k^{-1} , т. е. времена порядка существования течения рассматриваемого типа в некоторой области реального турбулентного потока. Такое решение представляет наибольший интерес. Во внешней части можно считать, что $\alpha=0$, тогда из (15) получаем

$$T = T_u + (T_b - T_u) \exp(y + \psi). \quad (16)$$

Это решение удовлетворяет начальным и не удовлетворяет граничным условиям. Рассматривая решения для пограничного слоя, введем переменные

$$z = y/\sqrt{\alpha}, \quad \psi_0 = \psi/\sqrt{\alpha}, \quad f = (T_b - T)/(T_b - T_u) \cdot \sqrt{\alpha}. \quad (17)$$

Из (15) и (17) имеем

$$\begin{aligned} \partial f/\partial \xi - d\psi_0/d\xi \cdot \partial f/\partial z &= \partial^2 f/\partial z^2, \quad f(0, \xi) = 0, \\ \partial f(0, \xi)/\partial z &= -1/\sqrt{1 - \xi}, \quad f(z, 0) = -z. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения на внешней границе пограничного слоя ($z \rightarrow -\infty$) находятся из условия сращивания внешнего и внутреннего решений. Согласно (16), при $\psi \sim \alpha^{1/2}$ и толщине пограничного слоя $y \sim \alpha^{1/2}$ одно из граничных условий $T(0, \xi) = T_b$ выполняется с точностью до малых членов порядка $\alpha^{1/2}$, поэтому сращивание осуществляется по производным. Из (15) с точностью до членов порядка $\alpha^{1/2}$ имеем $dT/dy = T_b - T_u$ при $y=0$. Отсюда

$$\partial f/\partial z = -1 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (19)$$

Условие (19) выполняется автоматически, так как $\partial f/\partial z \rightarrow -1$ при $z \rightarrow -\infty$ и $\xi=0$. В итоге имеем задачу теплопроводности для полупространства, для которой заданы начальные и два граничных условия при $z=0$. Лишнее граничное условие определяет функцию $\psi_0(\xi)$. В (18) не входят какие-либо параметры, поэтому решения описываются универсальными функциями $f(z, \xi)$ и $\psi_0(\xi)$.

Закон движения зоны реакции $\psi_0(\xi)$ и распределение температуры внутри пограничного слоя не представляют особого интереса (толщина пограничного слоя $\alpha^{1/2}$ — малая величина). Наиболее интересен закон изменения толщины пламени l . Из (15) и (16) получаем

$$l = a \exp(kt)/u_n. \quad (20)$$

Таким образом, толщина пламени непрерывно возрастает. В реальном турбулентном потоке течение рассматриваемого типа осуществляется только в областях с размером порядка η и существует время k^{-1} ,

за которое, как видно из (20), толщина пламени возрастает лишь в несколько раз. Кроме того, в областях, соседних с рассматриваемой, выполняется неравенство $k < 0$ и пламя сжимается. Поэтому вряд ли можно ожидать сколь-нибудь существенного увеличения толщины пламени.

4. Случай $k < 0$ и $k \gg u_n^2 \delta^{-2} / \alpha$, т. е. колмогоровский размер много меньше толщины зоны реакций. Обозначим координату, на которой выполняется условие $T = T_0$ (т. е. начинается реакция), через $\varphi(t)$, тогда из (1), (2) получим

$$\partial T / \partial t + kx \cdot \partial T / \partial x = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2, \quad x < \varphi(t), \quad (21)$$

$$\partial T / \partial t + kx \cdot \partial T / \partial x = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 + g(T_b - T), \quad x > \varphi(t). \quad (22)$$

Начальные условия:

$$T = T_u + (T_0 - T_u) \exp(xu_n/a) \quad (x < 0), \\ T = T_b - (T_b - T_u) \exp[-xu_n/(a\delta)] \quad (x > 0).$$

Задача сводится к решению линейных уравнений (21), (22) с условием, что при $x = \varphi(t)$ непрерывны T и $\partial T / \partial x$. В (22) произведем замену переменной $T = T_b - \theta \exp(-gt)$. Тогда это уравнение приобретает вид

$$\partial \theta / \partial t + kx \cdot \partial \theta / \partial x = a \cdot \partial^2 \theta / \partial x^2.$$

Таким образом, задача свелась к уже исследованному выше случаю. Снова сделаем преобразование переменных (14)

$$\partial T / \partial \xi - d\psi_0 / d\xi \cdot \partial T / \partial y = \alpha \cdot \partial^2 T / \partial y^2 \quad (y < 0), \\ \partial \theta / \partial \xi - d\psi_0 / d\xi \cdot \partial \theta / \partial y^2 \quad (y > 0), \quad (23)$$

$$T(0, \xi) = T_0, \quad \theta(0, \xi) = (T_b - T_u) (1 - \xi)^{-g/2k}, \\ \partial T(0, \xi) / \partial y = -\partial \theta(0, \xi) / \partial y (1 - \xi)^{-g/2k}, \quad (24) \\ T(y, 0) = T_u + (T_0 - T_u) e^y, \quad \theta(y, 0) = (T_b - T_0) e^{-y/\delta}.$$

Ограничимся снова рассмотрением не слишком больших времен $0 \leq \xi < 1 - \text{const}$ ($\text{const} \ll 1$). Тогда при $k \rightarrow \infty$ и $g = \text{const}$ (в таком пределе $\theta \sim T$) граничные условия (24) приобретают вид

$$T(0, \xi) = T_0, \quad \theta(0, \xi) = T_b - T_0, \quad \partial T(0, \xi) / \partial y = -\partial \theta(0, \xi) / \partial y.$$

Далее задача решается аналогично рассмотренной выше, поэтому сразу приводим ответ. Существуют два пограничных слоя $-\alpha^{1/2} < y < 0$ и $0 < y < \alpha^{1/2}$, толщина которых стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Структура соотношений в пограничных слоях остается почти такой же, как и ранее. Отсюда следует, что закон изменения тепловой толщины пламени по-прежнему дается формулой (20), а соотношение между толщиной зоны реакции и тепловой толщиной с течением времени не меняется. Удельная скорость тепловыделения растет со временем

$$Q/Q_n = \exp(kt). \quad (25)$$

5. Эффект влияния неравенства коэффициентов молекулярного переноса на распространение плоского пламени в потоке с однородной деформацией. Будем считать, что $k < 0$ и $u_n^2 \delta^{-2} / \alpha \gg |k| \gg u_n^2 / a$. Уравнения переноса имеют стационарные решения, которые можно

найти в приближении [4]. В случае сильного разбавления уравнения диффузии и теплопроводности имеют вид

$$\begin{aligned} -|k| \cdot dc_1/dx &= D_1 \cdot d^2c_1/dx^2, & -|k| \cdot dc_2/dx &= D_2 \cdot d^2c_2/dx^2, \\ & & -|k| \cdot dT/dx &= a \cdot d^2T/dx^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь c_i — концентрации, D_i — коэффициенты диффузии, индексы 1 и 2 относятся к горючему и окислителю соответственно. Для определенности далее считается, что горючее лимитирует горение, т. е. $c_1 = 0$ при $x \geq x_0$. При $x \rightarrow -\infty$

$$c_1 = c_{1\infty}, c_2 = c_{2\infty}, T = T_u, \quad (27)$$

а при $x \rightarrow +\infty$

$$c_1 = 0, c_2 = c_{2\infty} - Lc_{1\infty}, T = T_b. \quad (28)$$

Здесь L — стехиометрический коэффициент, T_b — адиабатическая температура горения смеси с составом $c_{1\infty}$ при $x = -\infty$. Имеем три условия на фронте пламени: диффузионные потоки горючего и окислителя находятся в стехиометрическом соотношении, тепловыделение равно теплоотводу, а концентрация горючего равна нулю (см., например, [9]):

$$LD_1 \frac{dc_1(x_0 - 0)}{dx} = D_2 \left[\frac{dc_2(x_0 - 0)}{dx} - \frac{dc_2(x_0 + 0)}{dx} \right], \quad (29)$$

$$a \left[\frac{dT(x_0 + 0)}{dx} - \frac{dT(x_0 - 0)}{dx} \right] = (T_b - T_u) D_1 \frac{dc_2(x_0 - 0)}{dx}, \quad c_1(x_0) = 0.$$

К (27) — (29) необходимо добавить условие, фиксирующее положение фронта пламени,

$$D_1 \cdot dc_1(x_0 - 0)/dx = -m. \quad (30)$$

Здесь $m > 0$ — количество горючего, сгорающего в единицу времени во фронте. Значение m зависит от температуры T_r в зоне химических реакций и от восстановленной концентрации горючего c_1^0 в зоне реакций (восстановленная концентрация находится путем мысленного проведения реакции в обратном направлении до полного исчезновения продуктов сгорания в зоне химических реакций [10]). Функция $m(c_1^0, T_r)$ считается известной из теории распространения пламени — $m = u_{\text{п}}(c_1^0, T_r) c_1^0$.

Отличие восстановленной концентрации горючего c_1^0 в зоне химических реакций от значения $c_{1\infty}$ при $x = -\infty$ связано с изменением компоненты скорости, параллельной фронту пламени, в связи с чем изменяются конвективные потоки вещества вдоль пламени (то же самое относится и к температуре). Температура T_r в общем случае отлична от адиабатической температуры горения T_b^0 смеси с составом c_1^0 ; $T_r = T_b^0$, если один из коэффициентов диффузии совпадает с коэффициентом температуропроводности (так как в этом случае существует линейная связь между температурой и концентрацией).

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} y = x\sqrt{|k|/D_1}, (c_{1\infty} - c_1)/c_{1\infty} = f, (c_{2\infty} - c_2)/Lc_{1\infty} = F, \\ \theta = (T - T_u)/(T_b - T_u), s_{12} = D_1/D_2, L_1 = D_1/a. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (26) и краевые условия (27) — (29) принимают вид

$$\begin{aligned} -2y \cdot df/dy = d^2f/dy^2, & -2s_{12}y \cdot dF/dy = \\ = d^2F/dy^2, & -2L_1y \cdot d\theta/dy = d^2\theta/dy^2, \\ y = -\infty, & f = 0, F = 0, \theta = 0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
y=0, f=1, s_{12} \cdot df(y_0-0)/dy &= dF(y_0-0)/dy - dF(y_0+0)/dy; \\
L_1 dF(y_0-0)/dy &= d\theta(y_0-0)/dy - d\theta(y_0+0)/dy, \\
y=+\infty, f=1, F=1, \theta=1.
\end{aligned} \tag{33}$$

Решение краевых задач (32), (33)

$$\begin{aligned}
f &= (1 + \Phi(y)) / (1 + \Phi(y_0)), \quad y \leq y_0; \quad f=1, \quad y > y_0; \\
F &= \lambda_2 \frac{1 + \Phi(\sqrt{s_{12}} y)}{1 + \Phi(\sqrt{s_{12}} y_0)}, \quad y \leq y_0; \quad F = 1 + (\lambda_2 - 1) \frac{1 - \Phi(\sqrt{s_{12}} y)}{1 - \Phi(\sqrt{s_{12}} y_0)}, \quad y > y_0; \\
\theta &= \lambda \frac{1 + \Phi(\sqrt{L_1} y)}{1 + \Phi(\sqrt{L_1} y_0)}, \quad y \leq y_0; \quad \theta = 1 + (\lambda - 1) \frac{1 - \Phi(\sqrt{L_1} y)}{1 - \Phi(\sqrt{L_1} y_0)}, \quad y > y_0; \\
2\lambda &= \frac{[1 - \Phi^2(\sqrt{L_1} y_0)] \cdot \sqrt{L_1} \exp[(L_1 - 1)y_0^2]}{1 + \Phi(y_0)} + 1 + \Phi(\sqrt{L_1} y_0).
\end{aligned} \tag{34}$$

Формула для λ_2 получается заменой L_1 на s_{12} . Это замечание справедливо и дальше.

Числа λ_2 и λ определяют значения концентрации окислителя и температуры во фронте горения

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= c_{2\infty} - \lambda_2 L c_{1\infty} \\ T_r &= T_u + \lambda (T_b - T_u) \end{aligned} \right\} y = y_0. \tag{35}$$

Легко проверить, что λ_2 и λ имеют по одному максимуму при $y_0=0$:

$$\lambda(y_0=0) = 1/2 \cdot (1 + \sqrt{L_1}). \tag{36}$$

Укажем также асимптотики:

а) слабая деформация ($k \rightarrow 0$)

$$\lambda \rightarrow \left[1 + \frac{L_1 - 1}{2L_1 y_0^2} \right], \quad y_0 \rightarrow -\infty;$$

б) сильная деформация ($k \rightarrow \infty$)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\rightarrow 1 + \frac{l^{-y_0^2}}{2\sqrt{\pi} |y_0|}, \quad L_1 > 1 \\ \lambda &\rightarrow 1 - \frac{l^{-L_1 y_0^2}}{2\sqrt{\pi L_1} |y_0|}, \quad L_1 < 1 \end{aligned} \right\} y_0 \rightarrow +\infty.$$

Из соотношения для концентрации окислителя во фронте горения (35) ясно, что $c_1^0 = \lambda_2 c_{1\infty}$. Используя (30) и соотношение $m = u_{\pi}(c_1^0, T_r) c_1^0$, получим, что максимальные значения λ и λ_2 (36) достигаются при $\sqrt{\frac{D_1}{|k|}} \sim \frac{D_1}{u_{\pi}(c_1^0, T_r)}$, т. е. когда масштаб длины $\sqrt{D_1/|k|}$, аналогичный колмогоровскому размеру в турбулентном потоке, по порядку совпадает с тепловой толщиной нормального фронта пламени.

Если горение лимитируется окислителем (богатая смесь), то приведенные выше выкладки можно использовать, если поменять места индексы 1 и 2 и заменить L на L^{-1} .

6. Влияние кривизны фронта на распространение пламени. Легко показать, что в случае цилиндрически симметричного пламени в приближении [4] эффекты, связанные с неравенством коэффициентов переноса, не проявляются. Поэтому ограничимся только анализом влияния толщины зоны реакции. Рассмотрим два случая: 1) в начале системы координат помещен сток продуктов сгорания, а на бесконечности находится горючая смесь, 2) в начале системы координат помещен источник горючей смеси, а на бесконечности находятся продукты сгорания. Оба случая описываются уравнением

$$u \cdot dT/dr = a/r \cdot d/dr \cdot r \cdot dT/dr + W. \quad (37)$$

Здесь скорость тепловыделения дается формулой (1), r — радиус, $u = \pm q/r$ — скорость, $q > 0$ — удельный конвективный поток, знак плюс соответствует случаю 2, знак минус — случаю 1.

Проанализируем случай 1. Химические реакции происходят в области $0 < r < r_0$. Решение должно быть ограничено при $r=0$, а $T=T_0$ при $r=r_0$. Тогда из (1) и (37) получаем

$$T = T_b + (T_0 - T_b) (z/z_0)^{-p} \cdot I_p(z) / I_p(z_0), \quad z_0 = \sqrt{g/a} r_0, \quad z = \sqrt{g/a} r, \\ p = q/2a, \quad (r < r_0). \quad (38)$$

Здесь I_p — модифицированная функция Бесселя первого рода. Зона подогрева расположена при $r_0 < r < \infty$. Учитывая, что $T(r_0) = T_0$ и $T(\infty) = T_u$, из (1) и (37) находим

$$T = T_u + (T_0 - T_u) (z/z_0)^{-2p}. \quad (39)$$

Из условия непрерывности dT/dr при $z=z_0$ из формул (38) и (39) имеем

$$\delta I_{p+1}(z_0) / I_p(z_0) = 2p/z_0. \quad (40)$$

Это условие определяет r_0 . Наибольший интерес представляет случай большой кривизны ($r_0 \rightarrow 0$), который реализуется при $q \rightarrow 0$ ($p \rightarrow 0$). При $\delta = \text{const}$ и $q \rightarrow 0$ из (40) получаем

$$z_0 = p^{1/2} \delta^{-1/2}, \quad r_0 = \sqrt{a q \delta} / u_{\text{н}}. \quad (41)$$

Определим скорость тепловыделения на единицу поверхности фронта пламени. Эту поверхность естественно определить как изотерму $T=T_0$ ($r=r_0$)

$$Q = \frac{2}{r_0} \int_0^{r_0} W r dr = \frac{2g}{I_p'(f_0)} (T_b - T_0) \int_0^{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{p+1} I_p\left(\sqrt{\frac{g}{a}} r\right) dr.$$

Отсюда при $p \rightarrow 0$ находим

$$Q = g(T_b - T_0) r_0. \quad (42)$$

Рассмотрим случай 2. Зона подогрева расположена при $r < r_0$. Учитывая, что $T(0) = T_u$ и $T(r_0) = T_0$, из (1) и (37) имеем

$$T = T_u + (T_0 - T_u) (z/z_0)^{2p}. \quad (43)$$

Зона реакции расположена при $r_0 < r < \infty$. Так как $T(r_0) = T_0$ и $T(\infty) = T_b$, то из (1) и (37) находим

$$T = T_b + (T_0 - T_b) (z/z_0)^p \cdot K_p(z) / K_p(z_0). \quad (44)$$

Здесь K_p — модифицированная функция Бесселя третьего рода. Из условия непрерывности dT/dr и формул (43), (44) получаем

$$\delta K_{p-1}(z_0)/K_p(z_0) = 2p/z_0.$$

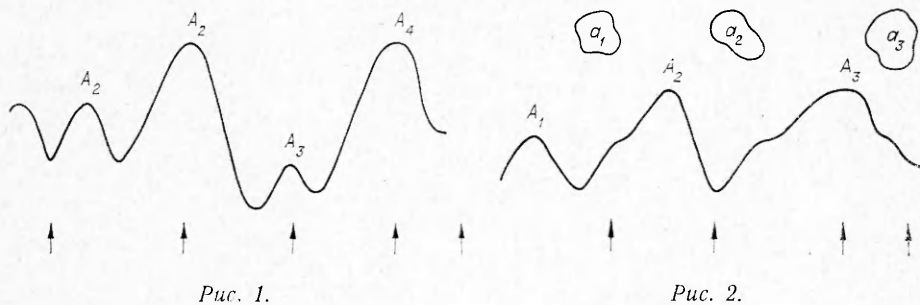
Случай большой кривизны пламени снова реализуется при $q \rightarrow 0$. Аналогичные выкладки показывают, что формулы (41) и (42) сохраняются.

7. Анализ полученных результатов. Выше было показано, что характер деформации потока существенно влияет на распространение пламени. При сжатии среды толщина пламени неограниченно уменьшается с увеличением скорости деформации $|k|$ (формулы (4), (5)). Этот результат справедлив как в приближении [4], так и при учете толщины зоны реакции (8), (9). В последнем случае отношение всех характерных размеров пламени к колмогоровскому размеру остается постоянным (хотя и может быть велико). При растяжении среды фронт становится нестационарным, а его толщина экспоненциально меняется со временем (20). В реальном турбулентном потоке такой режим существует в течение времени $1/k$, после чего должно наступить сжатие среды и толщина пламени начнет уменьшаться. В каждом таком цикле толщина пламени меняется не слишком сильно. Растяжение пламени не может происходить неограниченно также и потому, что протяженность области, в которой $k > 0$, порядка η , а в соседних областях $k < 0$ и пламя сжимается. Из проведенных рассуждений с известной осторожностью можно заключить, что развитое объемное горение никогда не реализуется. Здесь под терминами «развитое объемное горение» понимается такой режим, в котором ширина профиля неосредненной температуры порядка интегрального масштаба турбулентности.

В приближении [4] удельная скорость тепловыделения постоянна: ее значение пропорционально u_p . Такое приближение есть идеализация, справедливая только при достаточно больших значениях колмогоровского масштаба: $\eta \gg \delta/\alpha u_p$. При малых η становятся существенными эффекты, связанные с искривлением и деформацией пламени. Любое искривление вызывает уменьшение удельной скорости тепловыделения (42). Сжатие среды уменьшает удельную скорость тепловыделения, а растяжение — увеличивает (см. (10), (25)).

В случае интенсивной мелкомасштабной турбулентности неравенство коэффициентов молекулярного переноса приводит к появлению качественно новых эффектов. Чтобы понять природу этих эффектов, проанализируем структуру пламени, предполагая, что все коэффициенты переноса равны. Тогда скорость тепловыделения выражается только через температуру. Рассмотрим в среднем плоский фронт пламени, распространяющийся вдоль оси x . Выберем произвольный путь, начинающийся при $x \rightarrow -\infty$ и заканчивающийся при $x = \infty$. Вдоль такого пути температура меняется непрерывно (но не монотонно) от T_u и до T_b , следовательно, скорость реакции достигает максимально возможного значения. Это значение будет точно таким же, как и в нормальном фронте пламени. Поскольку путь произволен, то проведенное рассуждение показывает, что во фронте пламени нет разрывов. Качественная структура такого пламени изображена на рис. 1, 2. Стрелками указано направление движения горючей смеси. На рис. 1 изображен фронт пламени, образующийся в случае не слишком сильной турбулентности. Области, занятые горючей смесью и продуктами сгорания, односвязные. Они разделены нестационарным искривленным фронтом пламени A_1, A_2, A_3, \dots . Такая схема была предложена в [1, 2].

Если интенсивность турбулентности велика, то амплитуда возмущений на фронте пламени становится очень большой. Из фронта



пламени высовываются длинные «языки». Перегородка между языками может «перегореть». В результате в продуктах сгорания будут наблюдаться отдельные «островки» горючей смеси a_1, a_2, a_3, \dots , постепенно догорающие по мере отхода от основного фронта пламени A_1, A_2, A_3, \dots (рис. 2). Область, занятая продуктами сгорания, односвязна, а область, занятая свежей смесью, вообще говоря, многосвязна. Такая схема предложена в [11] и количественно проанализирована в [12].

Подчеркнем, что в обоих случаях фронт пламени непрерывен, что было доказано выше. В случае, когда коэффициенты молекулярного переноса не равны, фронт может разрываться. Действительно, при неравенстве коэффициентов переноса деформация среды приводит к изменению восстановления состава смеси и температуры в зоне реакции (см. (35), (36)). Так, например, при горении пропана в воздухе ($D_1 < D_2$) в зоне реакции восстановленная концентрация горючего на 15% меньше, чем в исходной горючей смеси (для водорода $D_1 > D_2$ и может происходить обогащение на 40—50%). Даже если это не происходит, качественная структура пламени меняется. На рис. 3 изображен основной фронт пламени $A_1B_1A_2B_2\dots$. На фронте образуются участки $B_1A_1B_2, B_3A_2B_4$, где восстановленный состав беднее, чем в исходной смеси, и возникают участки B_2B_3, \dots , на которых восстановленный состав богаче, чем в исходной горючей смеси (диффузионное расслоение). Тогда на участках $B_1A_1B_2, B_3A_2B_4 \dots$ не «сгорит» часть окислителя, а на участках B_2B_3 — часть горючего. Дальнейшее догорание произойдет в диффузионных фронтах $B_1C_1, B_2C_2 \dots$, отходящих под некоторым углом от основного.

Заметим, что не только деформация среды, но и искривления пламени вызывают диффузионное расслоение. Известно [13], что в любом случае при движении пламени образуются так называемые угловые точки (A_1, A_2, A_3, \dots на рис. 3) с очень большой кривизной пламени. Эти точки играют очень важную роль [14]: первоначально искривленный, но в среднем плоский, фронт пламени выравнивается только из-за образования угловых точек. Если такие точки не образуются, в турбулентном потоке площадь поверхности пламени неограниченно возрастает со временем. Существование угловых точек (точнее, линий излома) отчетливо видно на фотографиях, приведенных в [15, 16]. Очевидно, что в окрестности точек излома будет наблюдаться особенно сильное изменение восстановленного состава (например, обедняться).

Вдали от точек излома восстановленный состав будет относительно слабо меняться в противоположную сторону (обогащаться), так что среднее значение концентраций не меняется. В турбулент-

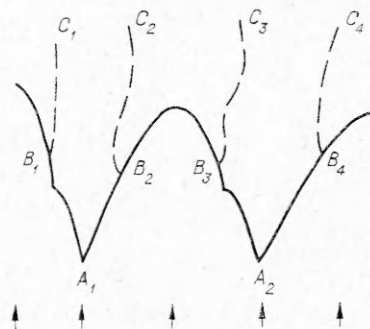


Рис. 3.

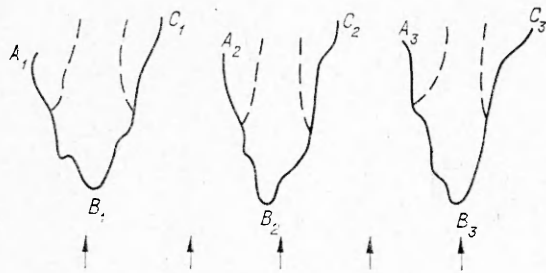


Рис. 4.

ном потоке восстановленные концентрации будут случайными величинами. В силу такого распределения плотности вероятностей этих величин резко асимметричны: по отношению к среднему наблюдаются сильные отклонения восстановленной концентрации в одну сторону и слабые отклонения в другую сторону. Приведем два характерных примера — горение пропана ($D_1 < D_2$) и водорода ($D_1 > D_2$). В окрестности точек излома фронт пламени обращен выпуклой стороной к продуктам сгорания. Тогда, как показано в [10], в случае $D_1 < D_2$ состав обогащается, в случае $D_1 > D_2$ обедняется. Таким образом, при горении пропана восстановленная концентрация горючего колеблется так, что либо наблюдается сильное обогащение, либо слабое обеднение. При горении водорода должна наблюдаться обратная картина. Столь асимметричные пульсации восстановленной концентрации, по-видимому, могут объяснять особенности изменения скорости распространения турбулентного пламени u_T при вариации коэффициента избытка воздуха. Известно [17, 18], что при одинаковых u_T значениях u_T в богатых и бедных смесях различны. Исходя из определяющей роли диффузионного расслоения, можно объяснить особенности горения богатых и бедных смесей пропана, метана и водорода [10].

Качественная структура пламени, когда возможны разрывы фронта, изображена на рис. 4. Фронт пламени состоит из отдельных кусков $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots$. Такая структура напоминает ячеистые пламена. По причинам, изложенным выше, от каждого отдельного фронта горения однородной смеси отходят диффузионные фронты (изображены штриховыми линиями). На достижение пределов распространения пламени влияет не только диффузионное расслоение, но и изменение температуры во фронте пламени. Этот фактор может как ускорять, так и замедлять достижение пределов. Для наглядности рассмотрим два примера. При горении водорода $a < D_1$ и, согласно формуле (36), температура во фронте возрастает (по сравнению с T_b), пределы становятся шире, чем в нормальном фронте пламени. При горении пропана в воздухе $a > D_1$ ($D_1/a \approx 2$), температура во фронте уменьшается и пределы становятся уже, чем в нормальном фронте пламени (для пропана $D_2 \approx a$, поэтому $T_T \approx T_b^0$).

Из проведенных рассуждений видно, какую большую роль играют эффекты, вызванные неравенством коэффициентов молекулярного переноса. Парадоксально, что с увеличением числа Рейнольдса (с ростом k) роль этих эффектов усиливается, а не ослабевает, как это можно было ожидать из общих соображений. Поэтому в любую теорию, претендующую на правильное описание экспериментальных данных, в качестве одного из определяющих критериев должно входить число Рейнольдса. Справедливость этого утверждения продемонстрировали недавно проведенные критериальные обработки экспериментальных данных [10, 19].

Остановимся на роли параметра u_{π} . Если толщина зоны реакции мала, а коэффициенты молекулярного переноса равны, то удельная скорость тепловыделения пропорциональна величине u_{π} , рассчитываемой по составу исходной горючей смеси. Эту величину, определяемую в опытах с нормальным пламенем, можно использовать, как один из параметров, характеризующих распространение турбулентного пламе-

ни. Если же коэффициенты молекулярного переноса не равны, то даже в случае бесконечно тонкой зоны реакции указанная величина, согласно проведенному анализу, не становится параметром, характеризующим горение однородной смеси. Последнее связано с тем, что в зоне реакции меняется состав и температура. Теперь необходимо учитывать функциональную зависимость $u_n(c_i^0, T_r)$, которую можно определить, например, в опытах с нормальным пламенем, распространяющимся по подогретой смеси (подогрев должен выбираться так, чтобы обеспечить нужные значения температуры в зоне реакции T_r). Скорость распространения пламени в турбулентном потоке должна быть некоторым функционалом от $u_n(c_i^0, T_r)$.

Таким образом, структура турбулентного пламени оказывается чрезвычайно сложной, и при сильной турбулентности появляется большое количество параметров, определяющих процесс распространения пламени. Следует однако отметить, что проанализированные выше эффекты выражены не слишком сильно, если колмогоровский масштаб много больше толщины нормального пламени. Кроме того, даже при неравенстве коэффициентов молекулярного переноса структура пламени не обязательно имеет вид, изображенный на рис. 3, 4. Например, если горит смесь с составом, далеким от стехиометрического, а интенсивность турбулентности не слишком высока, то, несмотря на диффузионное расслоение, во фронте пламени сгорит весь компонент, находящийся в недостатке, т. е. структура пламени будет иметь вид, изображенный на рис. 1, 2. Поэтому предоставляется возможность заинтересованному читателю строить теорию турбулентного горения на основе любой из четырех приведенных схем.

Поступила в редакцию
30/1 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Damköhler. Z. Electrochemie, 1940, 6, 11.
2. К. И. Щелкин. ЖТФ, 1943, 13, 5.
3. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статическая гидромеханика. М., «Наука», 1967.
4. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий. ЖФХ, 1938, 12, 1.
5. A. A. Townsend. Proc. Roy. Soc., 1951, A, 209, 1098.
6. А. М. Климов. ПМТФ, 1963, 3.
7. А. М. Климов.— В сб.: Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
8. В. М. Гремячкии, А. Г. Истратов.— В сб.: Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
9. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4.
10. Ю. Я. Бурико, В. Р. Кузнецов. ФГВ, 1976, 12, 3.
11. К. И. Щелкин, Я. К. Трошин. Газодинамика горения. М., Изд-во АН СССР, 1963.
12. А. М. Климов. Докл. АН СССР, 1975, 221, 1.
13. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1966, 1.
14. В. Р. Кузнецов. ФГВ, 1975, 11, 4.
15. D. R. Ballal, H. Lefevbre. Astronautica Acta, 1974, 1, 471.
16. A. Palm-Zeis, R. A. Strehlav. Combustion and Flame, 1969, 13, 2.
17. В. П. Карпов, А. С. Соколик. Докл. АН СССР, 1961, 138, 4.
18. А. С. Соколик. Самовоспламенение, пламя и детонация в газах. М., Изд-во АН СССР, 1960.
19. G. E. Andrews, D. Bradley, S. B. Lwakabamba. Combustion and Flame, 1975, 24, 3.