3. **Osias R.** User's guide for analysis of finite elastoplastic deformation. National aeronautics and Space Administration. Cleveland, Ohio. 44135, Rep. E-7610, June 1974.
4. **Boyd E.** Dynamic deformations of circular membranes.— «Journal of the Engineering Mechanics Division», N EM3, June 1966, p. 1—16.
5. **Морино, Лич, Уитмер.** Уточненный метод численного расчета нестационарных процессов в упругопластических тонких оболочках при больших деформациях.— «Труды американского о-ва инженеров-механиков. Прикладная механика», 1971, № 2, с. 131—144.
6. **Leech W., Witmer A., Pian H.** Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells.— «AIAA J.», 1968, N 12, p. 2352—2359.
7. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
8. **Лич, Су, Мэк.** Устойчивость метода конечных разностей для решения матричных уравнений.— «Ракетн. техника и космонавтика», 1965, № 11, с. 27.
9. **Jones N.** Finite deflection of a rigid-viscoplastic strain hardening annualar plate loaded impulsively.— «J. Appl. Mech.», 1968, vol. 35, N 4, p. 349—356.
10. **Witmer A., Balmer A., Leech W.. Pian H.** Large dynamic deformations of beams, rings, plates, and shells.— «AIAA J.», 1963, N 8, vol. 1, p. 1848—1856.
11. **Мальверн Л.** Распространение продольных пластических волн с учетом скорости деформации.— Сб. пер. Механика, 1952, вып. 1, № 11.
12. **Математическое** обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 4. Минск, изд. Ин-та математики АН БССР, 1974.
13. **Исаченков Е. И.** Штамповка резиной и жидкостью. М., «Машиностроение», 1967.
14. **Кошур В. Д.** Динамическое формоизменение тонких осесимметричных оболочек при импульсном нагружении.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 29. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
15. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. М., «Мир», 1975.
16. **Greenstadt J.** Math. Computation. N 21, 360 (1967).
17. **Анучин М. А., Антоненков О. Д.** и др. К вопросу о движении заготовки при свободной штамповке взрывом.— «Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение», 1963, № 6, с. 155—161.
18. **Faruqi M. A.** Metal forming with underwater explosion bubbles located between rigid and free surfaces.—«Int. J. Mach. Tool. Des Res.», 1976, vol. 16, N 4, p. 319—324.

УДК 533.6.011

О ГОМОТЕРМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ, ВЫЗВАННОЙ ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННОГО МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Ф. Федоров

(*Москва*)

В [1] рассмотрено в адиабатическом приближении автомодельное движение газа, нагретого мгновенным точечным изотропным источником монохроматического излучения. Однако в случае сильного разогрева газа становится существенным влияние собственного излучения на движение.

В данной работе влияние излучения учитывается в рамках гомотермической модели, соответствующей большим значениям коэффициента теплопроводности [2].

Пусть в исходный момент времени внутренняя энергия, скорость и плотность газа удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon(r,\ 0) = A/r^2,\ v(r,\ 0) = 0,\ \rho(r,\ 0) = \rho_0. \tag{1}$$

Исходное состояние газа, описываемое (1), может быть получено за счет мгновенного выделения энергии E_0 в холодном газе с плотностью ρ_0

монохроматическим излучением, имеющим длину пробега L [1]. В этом случае $\varepsilon(r, 0) = E_0 e^{-r/L}/4\pi\rho_0 L r^2$ и в пределе $r \ll L$ совпадает с (1) $(A = E_0/4\pi\rho_0 L)$.

При $t > 0$ начинается движение газа. Полагаем, что от центра симметрии распространяется сильная ударная волна, фронт которой излучает поток энергии, выравнивающий температуру в области течения [3].

Система уравнений, описывающих рассматриваемое одномерное движение, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left[\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r}\right] = 0.$$

С использованием уравнения состояния идеального газа $p = \rho R T$, исключив давление, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + RT\frac{\partial}{\partial r}(\ln\rho) = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln\rho) + v\frac{\partial}{\partial r}(\ln\rho) + \frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r} = 0.$$

Из законов сохранения количества движения и массы газа на разрыве $r = r_1$ имеем соотношения

$$\rho_1(v_1 - D) = -\rho_0 D, \quad \rho_1(v_1 - D)^2 + R\rho_1 T = \rho_0 D^2, \tag{3}$$

где D — скорость фронта ударной волны. Индексами 1 и 0 обозначены величины соответственно за и перед фронтом ударной волны.

Отметим, что в отличие от [1] в данной работе не учитывается движение газа перед фронтом ударной волны.

В центре симметрии скорость газа $v(0, t) = 0$.

Движение газа при $t > 0$ автомодельное. Введем автомодельную переменную

$$x = \beta r/r_1, \tag{4}$$

где $r_1 = \xi A^{1/4} t^{1/2}$; ξ, β — постоянные, подлежащие определению.

Для скорости, плотности и температуры газа можно написать формулы

$$v = \frac{D}{\beta} f, \quad \rho = \rho_0 g, \quad T = \frac{D^2}{\beta^2 R}, \tag{5}$$

где $D = dr_1/dt$.

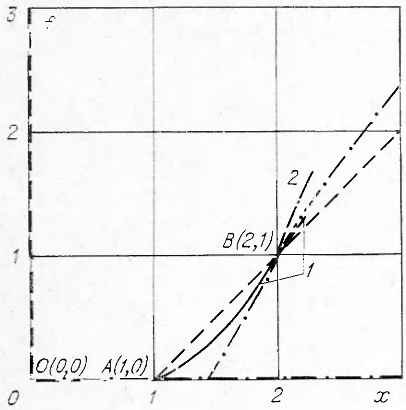
Подставляя (4), (5) в (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}(\ln g) = (x - f)\frac{df}{dx} + f, \quad \frac{df}{dx} = (x - f)\frac{d}{dx}(\ln g) - \frac{2f}{x}. \tag{6}$$

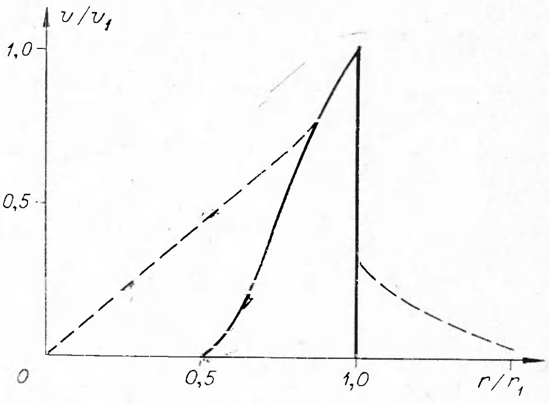
Первое из уравнений (6) имеет интеграл, а из второго, исключая $\frac{d}{dx}(\ln g)$, находим уравнение для определения скорости газа f

$$\frac{df}{dx} = \frac{f}{x}\,\frac{x(x - f) - 2}{1 - (x - f)^2}, \quad g = Ce^{fx - f^2/2}, \tag{7}$$

где C — постоянная интегрирования.



Фиг. 1



Фиг. 2

Переходя в (3) к безразмерным координатам при $x = \beta$, имеем соотношения для функций $f(x)$ и $g(x)$ на разрыве

(8) $$f_1 = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 4})/2, \quad g_1 = \beta/(\beta - f_1).$$

В центре симметрии

(9) $$f(0) = 0.$$

Если определить решение уравнения (7), удовлетворяющее (8), (9), то можно рассчитать все движение газа.

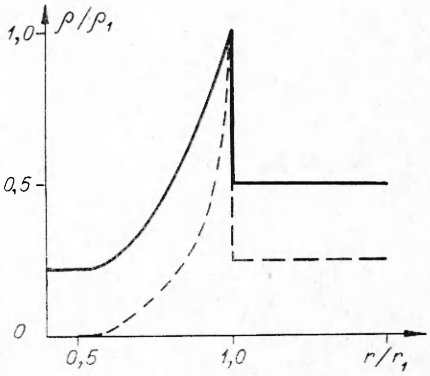
Проанализируем поле интегральных кривых уравнения (7), воспользовавшись результатами [2]. В области (x, f) уравнение имеет особые точки (фиг. 1). Точка $O(0, 0)$ — седло. В нее входят интегральные кривые: прямые $x = 0$ и $f = 0$. Особая точка $A(1, 0)$ — узел, причем в точку A входит интегральная кривая $f = 0$; вторая интегральная кривая, входящая в точку A, имеет наклон касательной $k = 1/2$. В особой точке $B(2, 1)$ имеем седло, в нее входят две интегральные кривые с наклоном касательных: $k_1 = (1 + \sqrt{13})/4$, $k_2 = (1 - \sqrt{13})/4$.

На фиг. 1 штрихом приведены кривые $f = x - 1$ и $x = 0$ (линии бесконечной производной); штрихпунктиром — $f = 0$ и $f = x - 2/x$ (линии нулевой производной), разделяющие области, где производная df/dx меняет знак.

Из анализа следует, что искомая интегральная кривая проходит через особые точки O, A и B, причем из точки A выходит с наклоном касательной $k = 1/2$ (кривая *1* на фиг. 1).

Положение фронта ударной волны определяется точкой пересечения с кривой $f_1(x) = (x + \sqrt{x^2 - 4})/2$ (кривая *2* на фиг. 1). Численное решение уравнения (7) показывает, что точка пересечения имеет координаты (2, 1), т. е. совпадает с точкой B.

На фиг. 2, 3 сплошной кривой показаны расчетные профили скорости и плотности газа, штриховой (для сравнения) — аналогичные зависимости для адиабатического случая при показателе



Фиг. 3

адиабаты $\gamma = 1{,}1$. Заметим, что для гомотермического случая профили плотности и скорости газа явно не зависят от γ.

Из представленных результатов видно существенное влияние собственного излучения газа на его движение.

Можно также определить постоянную ξ, используя закон сохранения энергии. Полагаем, что энергия нагретого излучением газа в области, ограниченной r_1, расходуется на его движение:

$$4\pi \int_0^{r_1} \varepsilon(r, 0)\, \rho r^2 dr = 4\pi \int_0^{r_1} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho R T(t)}{\gamma - 1}\right) r^2 dr. \tag{10}$$

Подставив найденные решения в (10) и приняв $\gamma = 1,\ 1$, получим значение $\xi = 1{,}17$.

Автор выражает благодарность Л. П. Горбачеву за обсуждение работы.

Поступила 10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жидов И. Г., Рогачев В. Г.** Автомодельное движение газа, разогретого точечным изотропным источником монохроматического излучения.— ПМТФ, 1976, № 4.
2. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах. М., «Наука», 1973.
3. **Горбачев Л. П., Федоров В. Ф.** О влиянии ударной волны на распространение тепловой.— ПМТФ, 1975, № 3.