ЛИТЕРАТУРА

1. **Dussan V. E. B., Davis S. H.** On the motion fluid—fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 65, pt 1.
2. **Пухначев В. В., Солонников В. А.** К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 6.
3. **Dussan V.E. B.** On the spreading of liquids an solid surfaces: Static and dynamics contact lines // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1979.— V. 11.
4. **Dussan V. E. B.** The moving contact line: the slip boundary condition // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 77, pt 4.
5. **Hocking L. M.** A moving fluid interface. Pt 2. The removal of the singularity by a slip flow // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 79, pt 2.
6. **Богоряд И. Б.** Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью.— Томск: Изд-во ТГУ, 1980.
7. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 5.
8. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1979.— Т. 43, № 1.
9. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
10. **Pukhnachov V. V.** Thermocapillary convection under low gravity // Fluid Dynam. Trans.— Warszawa, 1989.— V. 14.
11. **Horgan C. O.** Plane entry flows and energy estimates for the Navier—Stokes equations // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1978.— V. 68, N 4.
12. **Пухначев В. В.** Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье—Стокса // ПМТФ.— 1972.— № 3.
13. **Солонников В. А., Щадилов В. Е.** Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье—Стокса // Краевые задачи математической физики.— Л.: Наука, 1973.
14. **Huh C., Mason S. G.** Effects of surface roughness on wetting (theoretical) // J. Colloid Interface Sci.— 1977.— V. 60, N 1.
15. **Байокки К., Капело А.** Вариационные и квазивариационные неравенства.— М.: Наука, 1988.
16. **Гидромеханика** невесомости/Под ред. А. Д. Мышкиса.— М.: Наука, 1976.
17. **Де Женн П. Ж.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук.— 1987.— Т. 151, вып. 4.
18. **Kröner D.** Asymptotische Entwicklungen für Strömungen von Flüssigkeiten mit freiem Rand und dynamischem Kontaktwinkel.— Bonn, 1986.— (Prepr./Univ. Bonn; N 809).
19. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва.— М.: Изд-во МГУ, 1967.— Т. 16.
20. **Кондратьев В. А.** Асимптотика решения уравнений Навье—Стокса в окрестности угловой точки границы // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 1.

г. Павия, Италия,
г. Новосибирск, СССР

Поступила 8/VI 1989 г.

УДК 532.59

А. А. Коробкин

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА С НЕРОВНЫМ ДНОМ

1. Рассматривается плоская линейная начально-краевая задача

$$\Delta U = 0 \ (H(x) < y < 0), \ U_{tt} + U_y = 0 \ (y = 0), \tag{1.1}$$

$$U_y = H_x U_x \ (y = H(x)), \ U = 0, \ U_t = -\delta(x - x_0) \ (t = 0, \ y = 0),$$

которая описывает движение жидкости, вызванное начальным возмущением свободной границы. В момент времени $t = 0$ поверхность жидкости имеет концентрированное возвышение площади, равной единице, в окрестности точки x_0, при $t > 0$ это возвышение распадается под действием сил тяжести. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются такими, что число Фруда задачи и глубина жидкости при $|x| \to \infty$ равны единице. Правая декартова система координат сориентирована так, что ось y направлена в сторону, противоположную направлению свободного падения; функция $U(x, y, t, x_0)$ — потенциал скоростей, зависящий от x_0 как от параметра; функция $H(x)$ описывает рельеф дна.

Функцию $U(x, y, t, x_0)$ будем называть фундаментальным решением задачи Коши — Пуассона, так как с ее помощью решение общей задачи [1]

$$\Delta\varphi = 0 \ (H(x) < y < 0, \ x \in R^1), \ \varphi_{tt} + \varphi_y + p_t(x, t) = 0 \ (y = 0),$$

$$\varphi_y = H_x\varphi_x \ (y = H(x)), \ \varphi = \varphi_0(x), \ \varphi_t = \varphi_1(x) \ (t = 0, \ y = 0)$$

записывается в квадратурах

$$\varphi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t U_t(x, y, t - t_0, x_0)\, p(x_0, t_0)\, dt_0\, dx_0 -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x, y, t, x_0)\, \varphi_0(x_0)\, dx_0 - \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, t, x_0)\, \varphi_1(x_0)\, dx_0.$$

В дальнейшем рассматривается случай, когда глубина бассейна изменяется медленно, т. е. $H(x) = -h(\varepsilon x)$ $\left(\varepsilon \ll 1, \ \max\limits_{\xi\in R^1}|h_\xi| = 1\right)$.

Сформулированная задача принадлежит широкому кругу задач о распространении сигнала в неоднородной среде с медленно меняющимися свойствами. В настоящее время известны два подхода к приближенному решению задач такого сорта: Келлера [2], основанный на понятии высокочастотной асимптотики, и подход, интенсивно разрабатываемый в настоящее время Доброхотовым и Жевандровым [1, 3] и основанный на методах Маслова. Так, в [1] построено решение сформулированной задачи в трехмерном случае с наперед заданной точностью по параметру ε. Приближенное решение есть сумма двух слагаемых, первое из которых описывает длинноволновую, а второе — коротковолновую составляющие. Причем длинноволновая находится из рекуррентной последовательности задач для неоднородного волнового уравнения с переменным коэффициентом. Коротковолновая составляющая решения выписывается с помощью квадратур. Получаемые при таком подходе формулы могут быть упрощены с помощью известных методов анализа интегралов, зависящих от параметров, и приведены к виду, удобному для численных расчетов.

Представляет интерес получить эти же результаты с помощью специальным образом модифицированного метода Келлера. В настоящей работе используется метод сращиваемых асимптотических разложений, который позволяет построить главный член равномерно пригодной асимптотики деформации свободной границы $\eta(x, t)$ (уравнение $y = \eta(x, t)$ задает форму свободной границы в момент t, $\eta(x, t) = -U_t(x, 0, t, x_0)$) при $\varepsilon \to 0$, $t > 0$, $x \in R^1$. Для данной задачи эта асимптотика может быть записана в явном виде, что позволяет провести ее детальное исследование.

Решение задачи (1.1) ищется в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра ε

$$U(x, y, t, x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U^{(j)}(x_1, y, t, x_0)$$

($x_1 = x - x_0$). Главный член этого разложения описывается решением задачи Коши — Пуассона для ровного дна $H(x) = -h_0 = -h(\varepsilon x_0)$. При $y = 0$ имеем [4]

$$U^{(0)}(x_1, 0, t, x_0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Omega^{-1}(\nu)\sin\Omega(\nu)\, t\cos\nu x_1\, d\nu \tag{1.2}$$

($\Omega^2(\nu) = \nu \operatorname{th} \nu h_0$). Асимптотика функции (1.2) при $x_1 = (\xi - \xi_0)/\varepsilon$, $t = \tau/\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, $\xi \sim 1$, $\xi_0 \sim 1$, $\tau \sim 1$ выписывается с помощью метода стационарной фазы [5]

$$U^{(0)} = \varepsilon^{1/2}\tau^{-1/2}(8\pi|\ddot{\Omega}(\alpha)|)^{-1/2}\Omega^{-1}(\alpha) \times \times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}(\tau\Omega(\alpha) + \alpha(\xi - \xi_0)) + i\frac{\pi}{4}\right\} + O\left([\varepsilon/\tau]^{3/2}\right) + \text{c. c.} \tag{1.3}$$

($\alpha = \alpha((\xi - \xi_0)/\tau)$ — решение уравнения $\dot{\Omega}(\alpha) = -(\xi - \xi_0)/\tau$). Ясно, что выбранное разложение непригодно при больших значениях x_1, t, так как не позволяет удовлетворить условию непротекания на дне с наперед заданной точностью и равномерно по x_1.

2. Для уточнения структуры решения в области $|x_1| \gg 1$ вводятся новые «медленные» переменные $\xi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$, $\xi_0 = \varepsilon x_0$, а асимптотическое разложение решения ищется в виде [2]

$$U(x, y, t, x_0) = \varepsilon^{1/2} e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\xi,\tau,\xi_0)} \sum_{j=0}^{\infty} (i\varepsilon)^j A_j(\xi, y, \tau, \xi_0) + \text{c. c.} \tag{2.1}$$

Такая форма разложения следует из предельного соотношения (1.3), которое должно быть непрерывно согласовано с главным членом разложения (2.1). Подстановка (2.1) в уравнение Лапласа и граничные условия (1.1) обычным образом [2] приводит к уравнению для фазовой функции θ и уравнениям переноса для A_j.

В нулевом приближении имеем спектральную задачу

$$-\theta_\xi^2 A_0 + A_{0yy} = 0 \ (-h(\xi) < y < 0), \quad A_{0y} = 0 \ (y = -h(\xi)),$$
$$-\theta_\tau^2 A_0 + A_{0y} = 0 \ (y = 0),$$

нетривиальное решение которой существует при условии

$$\theta_\tau^2 = \theta_\xi \operatorname{th}[\theta_\xi h(\xi)] \tag{2.2}$$

и записывается как

$$A_0(\xi, y, \tau, \xi_0) = C_0(\xi, \tau, \xi_0) \operatorname{ch} \theta_\xi(y + h(\xi)).$$

Уравнение с частными производными первого порядка (2.2) имеет стандартный вид $F(\xi, q, \omega) = 0$ ($q = \theta_\xi$, $\omega = \theta_\tau$, $F(\xi, q, \omega) = \omega^2 - q \operatorname{th} qh(\xi)$). Ему соответствует характеристическая система [6]

$$d\omega/d\lambda = 0, \ d\tau/d\lambda = 2\omega, \ d\xi/d\lambda = -S(qh(\xi)), \ dq/d\lambda = = q^2 h_\xi/(\operatorname{ch}^2 qh), \tag{2.3}$$
$$d\theta/d\lambda = 2\omega^2 - qS(qh(\xi)), \ S(x) = \operatorname{th} x + x \operatorname{ch}^{-2} x,$$

к которой следует присоединить начальные условия

$$\tau = 0, \ \xi = \xi_0, \ \theta = 0, \ q = \alpha, \ \omega = \Omega(\alpha) \ (\lambda = 0), \tag{2.4}$$

α играет роль параметра начальной полосы ($\alpha \in R^1$). Начальные данные получены из условия сопряжения фазовых функций в разложениях (1.3), (2.1). Кривые $\tau = \tau(\lambda, \alpha)$, $\xi = \xi(\lambda, \alpha)$, $\lambda > 0$ при фиксированном значении α ($\alpha \in R^1$) называются лучами.

Соотношения (2.2)—(2.4) дают

$$\omega(\lambda, \alpha) = \Omega(\alpha), \ q(\lambda, \alpha) \operatorname{th}[q(\lambda; \alpha)h(\xi(\lambda, \alpha))] = \Omega^2(\alpha),$$

причем $q(\lambda, \alpha) = 0$ только при $\alpha = 0$. Если $|\alpha| > 0$ и $h > 0$, то $d\xi/d\lambda \neq \neq 0, \pm\infty$, и можно перейти от переменной λ к переменной ξ. Функции, в которых произведена замена $\lambda = \lambda(\xi, \alpha)$, помечаются индексом 1, например $\tau = \tau_1(\xi, \alpha)$. В новых переменных задача (2.3), (2.4) разрешима в квадратурах

$$\tau = \tau_1(\xi, \alpha) = -2\Omega(\alpha)\int_{\xi_0}^{\xi} S^{-1}[q_1(\beta, \alpha)h(\beta)]\,d\beta, \tag{2.5}$$

$$\theta = \theta_1(\xi, \alpha) = \Omega(\alpha)\tau + \int_{\xi_0}^{\xi} q_1(\beta, \alpha)\,d\beta,$$

$$q_1(\xi, \alpha)\,\mathrm{th}\,[q_1(\xi, \alpha)h(\xi)] = \Omega^2(\alpha) \quad (\xi \in R^1,\ \alpha \in R^1\setminus\{0\}).$$

Следующее, первое приближение для разложения (2.1) приводит к уравнению переноса для амплитудной функции

$$dC/d\lambda + k(\lambda, \alpha)C = 0 \quad (\lambda > 0),$$

где $C(\lambda, \alpha) = C_0(\xi(\lambda, \alpha), \tau(\lambda, \alpha), \xi_0)$,

$$k(\lambda, \alpha) = \theta_{\xi\xi}\left\{\frac{1}{4\Omega^2(\alpha)} S^2(qh(\xi)) + hS(qh)\,\mathrm{th}\,qh - h\right\} - h_\xi q +$$
$$+ \frac{q^2 h_\xi}{\mathrm{ch}^2\, qh}\left\{\frac{1}{4\Omega^2(\alpha)} S(qh) + h\,\mathrm{th}\,qh\right\}.$$

Здесь $\theta_{\xi\xi} = q_\xi = dq_1(\xi, \tilde{\alpha}(\xi, \tau_{10}))/d\xi$, где $\tilde{\alpha}(\xi, \tau_{10})$ — такая функция, что $\tau_1(\xi, \tilde{\alpha}(\xi, \tau_{10})) = \tau_{10} = \mathrm{const}$. Следовательно, $\theta_{\xi\xi} = q_{1\xi} + \tilde{\alpha}_\xi q_{1\alpha}$. Продифференцировав тождество, определяющее $\tilde{\alpha}(\xi, \tau_{10})$, по ξ, получим $\tilde{\alpha}_\xi = -\tau_{1\xi}/\tau_{1\alpha}$. Кроме того, из (2.5) имеем

$$\partial q_1/\partial\xi = -q_1^2 h_\xi[S(q_1h)\,\mathrm{ch}^2(q_1h)]^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\partial q_1/\partial\alpha = 2\Omega\dot{\Omega}S^{-1}(q_1h),\quad \partial\tau_1/\partial\xi = -2\Omega(\alpha)S^{-1}(q_1h),$$

$$\partial\tau_1/\partial\alpha = -2\dot{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\beta}{S[q_1(\beta, \alpha)h(\beta)]} + 4\Omega^2\dot{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\dot{S}(q_1h)}{S^3(q_1h)}h(\beta)\,d\beta.$$

Построенная асимптотика перестает быть справедливой в окрестности тех точек (ξ, τ), для которых определитель матрицы Якоби $J = \partial(\xi, \tau)/\partial(\xi, \alpha)$ обращается в нуль, т. е. $\partial\tau_1/\partial\alpha = 0$. В этом случае $\tilde{\alpha}_\xi$ обращается в бесконечность, и амплитудная функция $C_1(\xi, \alpha)$ становится неограниченно большой. Условие $|J| = 0$ означает, что на плоскости ξ, τ найдутся хотя бы два луча, определяемые первым равенством (2.5) и выходящие из начальной полосы под разными углами, которые пересекаются при $\lambda > 0$. В окрестности такой точки отображение $\xi, \alpha \to \xi, \tau$ перестает быть однозначным, что и отражено в равенстве $\partial\tau_1/\partial\alpha = 0$. Кроме того, так как все лучи исходят из одной точки $\xi = \xi_0$, $\tau = 0$, то значение $\lambda = 0$ также будет особым.

При $\xi \to \xi_0$ формулы (2.6) дают

$$\theta_{\xi\xi} = \tilde{\alpha}_\xi + O(1),\quad \tau_{1\xi} = -2\Omega(\alpha)/S_0 + O(|\xi - \xi_0|),$$

$$\tau_{1\alpha} = (-1/(\Omega(\alpha)) + 2\Omega(\alpha)h_0\dot{S}_0/S_0^2)(\xi - \xi_0) + O(|\xi - \xi_0|^2),$$

$$S_0 = S(\alpha h_0),$$

отсюда $k_1(\xi, \alpha) = -(1/2)S_0(\xi - \xi_0)^{-1} + O(1)$. С учетом этой асимптотики выпишем уравнение для $C_1(\xi, \alpha)$:

$$C_{1\xi} + [(1/2)(\xi - \xi_0)^{-1} + D(\xi, \alpha)]C_1 = 0,$$

здесь $D(\xi, \alpha) = -k_1(\xi, \alpha)/S(q_1 h(\xi)) - (1/2)(\xi - \xi_0)^{-1}$ и $D = O(1)$ при $\xi \to \xi_0$. Общее решение дается формулой

$$C_1(\xi, \alpha) = C_*(\alpha) |\xi - \xi_0|^{-1/2} \exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi} D(\beta, \alpha)\, d\beta\right\}. \tag{2.7}$$

Заметим, что $\tau = |\xi - \xi_0|/|\dot\Omega| + O(|\xi - \xi_0|^2)$ при $\xi \to \xi_0$, поэтому требование согласования амплитудных функций в разложениях (1.3), (2.1) приводит к формуле для $C_*(\alpha)$

$$C_*(\alpha) = \Omega^{-1}(\alpha)\left(|\dot\Omega(\alpha)|/(8\pi|\ddot\Omega(\alpha)|)\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \operatorname{ch}^{-1} \alpha h_0.$$

Главный член асимптотического разложения (2.1) имеет вид

$$U(x, y, t, x_0) = \varepsilon^{1/2} C_*(\alpha) |\xi - \xi_0|^{-1/2} \operatorname{ch} q_1(\xi, \alpha)(y + h(\xi)) \times \tag{2.8}$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\left(\Omega(\alpha)\tau + \int_{\xi_0}^{\xi} q_1(\beta, \alpha)\, d\beta\right) - \int_{\xi_0}^{\xi} D(\beta, \alpha)\, d\beta + i\frac{\pi}{4}\right\} + O\left(\varepsilon^{3/2}\right) + \text{c. c.}$$

Замечание 1. Если $h(\xi) = h_0$ при $-a < \xi - \xi_0 < b$, $a > 0$, $b > 0$, то на этом участке $q_1 \equiv \alpha$, $D = 0$ и формула (2.8), как и следовало ожидать, совпадает с (1.3). Более того, если на некотором интервале $I \subset R^1$, $h_\xi(\xi) \equiv 0$, $\xi \in I$, то

$$U(\xi/\varepsilon, y, \tau/\varepsilon, x_0) = \sqrt{(c - \xi_0)/(\xi - \xi_0)}\, U(c/\varepsilon, y, \tau/\varepsilon, x_0) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

(c — произвольная точка из $\bar I$).

Замечание 2. Исходя из явной формулы (2.6), для производной $\partial\tau_1/\partial\alpha$ можно показать, что асимптотическое разложение (2.1) теряет силу не только в окрестности точки $\xi = \xi_0$, $\tau = 0$, но и вблизи лучей, для которых $\alpha = \pm 0$. При всех остальных значениях ξ, τ отображение $\xi, \tau \to \xi, \alpha$ взаимно однозначно, так как подынтегральное выражение в формуле для $\partial\tau_1/\partial\alpha$ знакоопределено. При $\alpha \to 0$ $\partial\tau_1/\partial\alpha \to 0$, $\ddot\Omega(\alpha) \to 0$, и, следовательно, теряет пригодность не только разложение (2.1), но и асимптотика (1.3). Для ровного дна значения $\alpha = \pm 0$ отвечают волнам, распространяющимся с критической скоростью $\xi = \xi_0 \pm \sqrt{h_0}\tau$.

3. Правильное асимптотическое поведение (1.2) можно найти с помощью обобщенного метода стационарной фазы, так как $\dddot\Omega(0) \neq 0$. Удобнее иметь дело не с потенциалом U, а с его производной U_t, для которой асимптотическое разложение выписывается через специальные функции. Следуя способу Уизема [7], получим

$$U_t^{(0)}(x_1, 0, t, x_0) = -\frac{1}{2(3\gamma t)^{1/3}}\left\{\operatorname{Ai}\left(\frac{x_1 - t\sqrt{h_0}}{(3\gamma t)^{1/3}}\right) + \right. \tag{3.1}$$

$$\left. + \operatorname{Ai}\left(-\frac{x_1 + t\sqrt{h_0}}{(3\gamma t)^{1/3}}\right)\right\} + \ldots$$

при $t \to \infty$, $x_1/t \to 0$, $y = 0$, $\gamma = (1/6)\, h_0^{5/2}$. Здесь первый член соответствует волне, распространяющейся влево, а второй — волне, распространяющейся вправо. Участвующий в (3.1) интеграл Эйри $\operatorname{Ai}(z)$ равен

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(zs + \frac{1}{3}s^3\right) ds.$$

При больших значениях аргумента

$$\operatorname{Ai}(z) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\dfrac{2}{3} z^{3/2}\right) & z \to +\infty, \\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2} + \dfrac{\pi}{4}\right) & z \to -\infty. \end{cases}$$

Отсюда следует, что решение экспоненциально убывает перед волновым фронтом $x_1 = \sqrt{h_0}t$ и становится осциллирующим за ним. Переходная область имеет ширину, пропорциональную $t^{1/3}$. Вне этой области асимптотика (3.1) согласуется с ранее построенной (1.3).

В переходной области, отвечающей волне, распространяющейся вправо, вместо разложения (2.1) используется

$$(3.2)\qquad -U_t(x, y, t, x_0) = \varepsilon^{1/3} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \left(A_j(\xi, y, \tau, \xi_0) \operatorname{Ai}(\zeta) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^{1/3} B_j(\xi, y, \tau, \xi_0) \operatorname{Ai}'(\zeta)\right),$$

где $\xi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$, $\xi_0 = \varepsilon x_0$, $\zeta = \varepsilon^{-2/3}\rho(\xi, \tau)$. Вид указанного разложения следует из тех же соображений, которые были использованы при записи (2.1), и условия согласования с разложением (3.1) в области перекрытия. Разложение вида (3.2), в которое дополнительно входит высокочастотный сомножитель, было использовано в [8] для построения приближения, справедливого в окрестности каустики.

Подстановка (3.2) в соотношения (1.1), предварительно продифференцированные по t и записанные в переменных ξ, τ, y, и приравнивание коэффициентов при $\varepsilon^j \operatorname{Ai}(\zeta)$, $\varepsilon^{j+1/3}\operatorname{Ai}'(\zeta)$ с учетом равенств $\operatorname{Ai}''(\zeta) = \zeta \operatorname{Ai}(\zeta)$, $\varepsilon^{2/3}\zeta = \rho(\xi, \tau)$ приводят к уравнению для функции $\rho(\xi, \tau)$ и рекуррентной последовательности уравнений переноса для A_j, B_j, причем вид этих уравнений зависит от знака $\rho(\xi, \tau)$.

Рассмотрим область на плоскости ξ, τ, в которой $\rho(\xi, \tau) > 0$. Кривая $\rho(\xi, \tau) = 0$ соответствует гребню головной волны и должна быть определена в ходе решения задачи. В нулевом приближении имеем спектральную задачу

$$A_{0yy} + \Phi_\xi^2 A_0 = 0 \ (-h(\xi) < y < 0),\ A_{0y} = 0\ (y = -h(\xi)),$$
$$A_{0y} + \Phi^2_\tau A_0 = 0\ (y = 0),$$

нетривиальное решение которой существует при условии

$$(3.3)\qquad \Phi_\tau^2 = \Phi_\xi \operatorname{tg} \Phi_\xi h(\xi),\ \Phi(\xi, \tau) = (2/3)\rho^{3/2}(\xi, \tau)$$

и записывается в форме

$$A_0(\xi, y, \tau, \xi_0) = C_0(\xi, \tau, \xi_0) \cos \Phi_\xi (y + h(\xi)).$$

Действуя по плану п. **1**, получим характеристическую систему, отвечающую уравнению (3.3):

$$(3.4)\qquad d\omega/d\lambda = 0,\ dq/d\lambda = q^2 h_\xi/(\cos^2 qh),\ d\xi/d\lambda = -P(qh),\ d\tau/d\lambda = 2\omega,$$
$$d\Phi/d\lambda = 2\omega^2 - qP(qh),\ P(x) = \operatorname{tg} x + x/\cos^2 x$$

($\omega = \Phi_\tau$, $q = \Phi_\xi$). К этой системе присоединяются начальные условия

$$(3.5)\qquad \xi = \xi_0,\ \tau = 0,\ \omega = \chi,\ q = q_0(\chi),\ \Phi = 0\ (\lambda = 0).$$

Первые два равенства указывают, что лучи уравнения (3.3) выходят из одной точки, третье задает параметризацию начальной полосы, четвертое и пятое следуют из требования согласования начальных данных. Систему (3.4) можно проинтегрировать, если перейти от λ, χ к новым независимым переменным ξ, χ. Функции τ, q, Φ, в которых произведена такая замена, помечаются, как и ранее, индексом 1. Тогда

$$(3.6)\qquad \tau_1(\xi, \chi) = -2\chi \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{P(q_1 h)},\quad \Phi_1(\xi, \chi) = \chi\tau_1 + \int_{\xi_0}^{\xi} q_1(\xi, \chi)\, d\xi$$

($q_1(\xi, \tau)$ определяется из уравнения $q_1 \operatorname{tg} q_1 h(\xi) = \chi^2$, причем $\operatorname{sgn} q_1 = -\operatorname{sgn} \chi$). Таким образом, зная форму дна водоема, можно определить решение задачи (3.4), (3.5) в параметрическом виде по формулам (3.6). Выражая из первой формулы (3.6) χ через ξ, τ и подставляя во вторую формулу, выводим зависимость ρ от переменных ξ, τ. Функцию $\rho(\xi, \tau)$ достаточно знать при малых значениях χ ($\chi > 0$), так как при $\rho \sim 1$ имеем $\zeta \sim \varepsilon^{-2/3}$ и $\mathrm{Ai}(\zeta) \sim e^{-1/\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$. Разлагая правые части формул (3.6) в ряд при $\chi \to 0$ и отбрасывая члены порядка $O(\chi^4)$ и выше, получим

$$\rho(\xi, \tau) = 2^{1/3}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} h^{-1/2}(\beta)\,d\beta - \tau\right)\left(\int_{\xi_0}^{\xi} h^{1/2}(\beta)\,d\beta\right)^{-1/3} + \ldots$$

Эта формула имеет место для лучей, выходящих из точки $\xi = \xi_0$, $\tau = 0$ под углами, близкими к критическому. Ясно, что $\rho(\xi, \tau) = 0$ вдоль кривой $\tau = \int_{\xi_0}^{\xi} h^{-1/2}(\beta)\,d\beta$ (для ровного дна — вдоль линии $\xi - \xi_0 = \sqrt{h_0}\tau$).

Уравнение переноса для функции $C_{01}(\xi, \chi)$ принимает вид

$$\frac{dC_{01}}{d\xi} - \frac{\sqrt{\rho}\,\Omega_0}{P(q_1h)}C_{01} = 0, \tag{3.7}$$

где $$\sqrt{\rho}\,\Omega_0 = \Phi_{\xi\xi}\left(\frac{1}{4\chi^2}P^2(q_1h) - h - hP(q_1h)\operatorname{tg} q_1h\right) - \frac{1}{2\rho^{3/2}}\Phi_\tau^2 +$$
$$+ \frac{1}{4\rho^{3/2}}\Phi_\xi P(q_1h) + \frac{1}{4\chi^2}P(q_1h)\,q_1^2h_\xi\cos^{-2}q_1h - h\operatorname{tg} q_1h\frac{q_1^2h_\xi}{\cos^2 q_1h} - h_\xi q_1.$$

Начальное условие для уравнения (3.7) следует из условия согласования разложений (1.3), (3.2). Заметим, что

$$\sqrt{\rho}\,\Omega_0/P(q_1h) = -(1/3)(\xi - \xi_0)^{-1} + O(1) \quad (\xi \to \xi_0,\ \tau \to 0),$$

поэтому общее решение (3.7) можно записать как

$$C_{01}(\xi, \chi) = C_0(\chi)(\xi - \xi_0)^{-1/3}\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} D(\beta, \chi)\,d\beta\right)$$

($D(\xi, \chi) = -\sqrt{\rho}\,\Omega_0/P(q_1h) - (1/3)(\xi - \xi_0)^{-1}$). Условие сращивания асимптотических разложений (1.3), (3.2) дает $C_*(\chi) = (4h_0)^{-1/3} + o(1)$ при $\chi \to 0$.

Построение асимптотики решения в области $\rho(\xi, \tau) < 0$ осуществляется аналогично. В результате получаем асимптотику деформации свободной границы $\eta(x, t)$ в области головной волны

$$\eta(x, t) = (4h_0)^{-1/3}(h(\varepsilon x)/h_0)^{-1/4}\left(\int_{x_0}^{x}[h(\varepsilon\lambda)/h_0]^{1/2}\,d\lambda\right)^{-1/3} \times \tag{3.8}$$
$$\times \mathrm{Ai}\left\{2^{1/3}\left(\int_{x_0}^{x} h^{-1/2}(\varepsilon\lambda)\,d\lambda - t\right)\left(\int_{x_0}^{x} h^{1/2}(\varepsilon\lambda)\,d\lambda\right)^{-1/3}\right\} + O\left(\varepsilon^{1/3}\chi + \varepsilon^{2/3}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$, $\chi\varepsilon^{-1/3} \sim 1$.

Если $h = h_0$ на участке $x_0 < x < x_1$, то формулы (3.8), (3.1) дают один и тот же результат. Пусть $x_0 = 0$ и $h(\varepsilon x) = A\varepsilon x$ при $x > x_1$, причем $x_1 = h_0/A\varepsilon$, тогда высота вершины головной волны, рассчитанная по формуле (3.8), равна

$$\eta(x_*(t), t) = 4^{1/12}3^{1/3}\varepsilon^{1/3}h_0^{1/12}A^{-1/6}\left(\varepsilon t + h_0^{1/2}/A\right)^{-1/2} \times$$
$$\times \left[h_0^{3/2} + (1/4)A^3\left(\varepsilon t + h_0^{1/2}/A\right)^3\right]^{-1/3}\mathrm{Ai}(0) + \ldots,$$
$$x_*(t) = (A/4\varepsilon)\left(\varepsilon t + h_0^{1/2}/A\right)^2 \quad \left(\varepsilon t \geqslant \sqrt{h_0}/A,\ A > 0\right).$$

Видно, что при выходе на наклонный участок дна головная волна ускоряется ($x_*(t) \sim t^2$, $t \to \infty$, для ровного дна $x_*(t) \sim t$), скорость затухания ее амплитуды растет ($\eta \sim t^{-3/2}$ при $t \to \infty$, для ровного дна $\eta \sim t^{-1/3}$). Эти эффекты усиливаются при увеличении наклона дна.

4. Выше был построен главный член асимптотики решения задачи (1.1) и указан способ вычисления последующих приближений. Трудность построения высших приближений связана с тем, что в представлении (3.2) функции $\rho(\xi, \tau)$, $A_0(\xi, y, \tau, \xi_0)$, $B_0(\xi, y, \tau, \xi_0)$ имеют конечную гладкость в окрестности кривой $\tau = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} h^{-1/2}(\beta)\, d\beta$, что соответствует области длинных волн. Действительно, у этих функций различный вид в зависимости от того, с какой стороны от указанной кривой мы находимся. Поэтому для построения высших приближений необходимо дополнительно уточнить поведение решения в области длинных волн. Главный член асимптотики решения состоит из трех частей, каждая из которых справедлива в своей области определения. Однако эти области имеют зоны перекрытия и покрывают область $x \in R^1$, $-h(\varepsilon x) < y < 0$, $t > 0$ без зазоров. Существование зон перекрытия позволяет известными методами (метод составных асимптотических разложений, метод срезающих функций и т. д.) [9] построить равномерно пригодное приближенное решение, которое, будучи подставленным в соотношения (1.1), даст невязку; ее порядок по ε известен. В случае локализованной неровности дна ($h(\xi) \equiv 1$ при $\xi \notin (\xi_1, \xi_2)$, $\varepsilon x_0 < \xi_1$) порядок невязки равен $\varepsilon^{3/2}$ при $\varepsilon \to 0$.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н.** Нестационарные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 13, вып. 4.
2. **Keller J. B.** Surface waves on water of non-uniform depth // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 4, N 6.
3. **Доброхотов С. Ю.** Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости // ДАН СССР.— 1983.— Т. 269, № 1.
4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
5. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
6. **Камке Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М.: Наука, 1966.
7. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
8. **Ludwig D.** Uniform asymptotic expansions at a caustic // Comm. Pure Appl. Math.— 1966.— V. 20, № 1.
9. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.

г. Новосибирск *Поступила 22/VI 1988 г., в окончательном варианте — 20/I 1989 г.*

УДК 532.68

Л. К. Антановский

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Квазистационарное приближение применимо для описания движения жидкости с малыми ускорениями и заключается в опускании сил инерции в уравнениях Навье — Стокса. Эта ситуация заведомо реализуется в тонких слоях жидкости, капиллярах и каплях малого размера, где силы поверхностного натяжения доминируют над всеми массовыми силами, включающими и инерционные члены.

В работе рассматривается задача об устойчивости равновесия слоя жидкости на поверхности круглого цилиндра с изотермической свободной границей. На основе представления решений системы Стокса на плоскости через бианалитическую функцию