

К ТЕОРИИ ВОЛН В ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Моисеев

(Москва)

В теории волн, распространяющихся на поверхности завихренной тяжелой жидкости, есть два вопроса, имеющие определенный теоретический интерес.

1. В потенциальном потоке тяжелой жидкости существует понятие критической скорости $c = \sqrt{gh}$, где h — глубина жидкости. Свойства потока существенным образом зависят от того, является ли поток докритическим или сверхкритическим. Например, если сверхкритический поток обтекает какое-либо препятствие, то за препятствием волн не образуется, и волновое сопротивление равно нулю. Если обтекающий поток — докритический, то за телом образуются волны, и волновое сопротивление отлично от нуля. Имеет ли место аналогичное явление в потоке завихренной жидкости и как изменяется критическая скорость в зависимости от интенсивности вихря?

2. М. А. Лаврентьев установил следующий факт, имеющий место в теории потенциальных волн [1]. Если увеличивать длину волны λ , сохраняя при этом ее амплитуду α , то волна при $\lambda \rightarrow \infty$ переходит в уединенную, а горизонтальная прямая, проходящая через нижние точки впадин, вырождается в асимптоту ее поверхности. Сохраняется ли этот факт в теории вихревых волн? Существуют ли вообще на поверхности завихренной жидкости уединенные волны?

В работе приводится исследование этих вопросов, которое опирается на асимптотические методы, являющиеся обобщением известного метода приближенных конформных отображений узких полос М. А. Лаврентьева [2,3].

1. Постановка задачи. Функция тока ψ плоского течения удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi = -\Omega \quad (1.1)$$

Здесь Ω — вихрь; если движение установившееся, то линии тока являются изовихревыми линиями и $\Omega = \Omega(\psi)$.

Если функция $\Omega(\psi)$ задана, то мы приходим к следующей формулировке задачи об установившихся волнах на поверхности завихренной жидкости (фиг. 1).

Определить функцию $\psi(x, y)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta\psi(x, y) = F(\psi) \quad (1.2)$$

и функцию $y = f(x)$ по следующим условиям:

$$\psi = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \psi = 1 \quad \text{при } y = f(x) \quad (1.3)$$

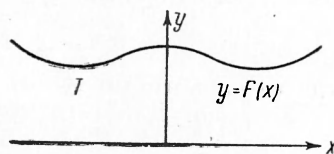
$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2vf = C \quad \text{при } y = f(x) \quad (v = gh^3/Q^2) \quad (1.4)$$

Здесь C — постоянная энергия. Эти выражения записаны в безразмерном виде. В качестве основных характерных размеров приняты Q — расход и h — глубина жидкости во впадине волны. Задача, так сформулированная для случая периодических волн, в строгой постановке впервые изучалась Дюбрей-Жакотен [4].

Первое из условия (1.3) — это условие непротекания, второе означает, что свободная поверхность есть линия тока, условие (1.4) устанавливает постоянство давления на свободной границе.

Для эффективного решения задачи и упрощения анализа рассмотрим два частных вида задания функции $F(\psi)$

$$F(\psi) = 2k, \quad F(\psi) = k\psi \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Первый случай соответствует линейному закону распределения скоростей в потоке, второй — квадратичному.

2. Вспомогательная задача. 1°. Рассмотрим вспомогательную задачу определения функции, удовлетворяющей уравнению (1.2) и обоим условиям (1.3), в предположении, что функция $y = f(x)$, граница области T , задана. В работах [5,6] была изложена процедура построения формального решения подобной задачи.

В уравнении (1.2) положим $x = \xi / \varepsilon$. Решение ищем в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$$

подчиняя функции ψ_n следующим краевым условиям:

$$\psi_n = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \psi_0 = 1, \quad \psi_2 = \psi_3 = \dots = 0 \quad \text{при } y = \chi(\xi) = f(\xi / \varepsilon)$$

Вычисление функций ψ_n не представляет труда. Возвращаясь затем к старым переменным, получим

1. Если $F(\psi) = 2k$, то

$$\psi(x, y) = \left(\frac{1}{f} - kf\right)y + ky^2 + \frac{f'' f(1 - kf^2) - 2f'}{6f^3} y(y^2 - f^2) + \dots \quad (2.1)$$

2. Если $F(\psi) = k\psi$, то

$$\psi(x, y) = \frac{\text{sh} \sqrt{k} y}{\text{sh} \sqrt{k} f} + \frac{Bf}{2\sqrt{k}} \text{cth} \sqrt{k} y - \frac{By}{2k} \text{ch} \sqrt{k} y \quad (2.2)$$

где

$$B = -\frac{1/2 \sqrt{k} f'' \text{sh} 2 \sqrt{k} f - kf'^2 (1 + \text{ch}^2 \sqrt{k} f)}{\text{sh}^3 \sqrt{k} f}$$

В общем случае ряды (2.1) и (2.3) расходятся.

Функцию $\Psi(x, y)$ будем называть ε^r -асимптотическим решением задачи (1.2) и (1.3), если ее решение можно представить в виде

$$\psi(x, y) = \Psi(x, y) + O(\varepsilon^r)$$

где ε — некоторый малый параметр.

Теорема. Для того чтобы функция

$$\Psi_n = \psi_0 + \dots + \psi_n$$

была ε^r -асимптотическим решением задачи (1.2), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы производные $f^{(m)}(x)$ удовлетворили условиям

$$f^{(m)}(x) = O(\varepsilon^{l_m}) \quad (m = 1, \dots, 2n + 2)$$

где l_m — произвольные положительные числа, а степень ε — число r — определяется порядком функции Ψ_{n+2}

$$O(\Psi_{n+2}) = O(\varepsilon^r)$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству такой же теоремы для уравнения Лапласа [6].

Таким образом, если граница f достаточно гладкая, то конечные отрезки рядов (2.1) или (2.2) можно использовать в качестве приближенных решений. Если, например, ограничиться функцией Ψ_2 , то достаточно потребовать малости первых трех производных.

В дальнейшем будем ограничиваться учетом членов, содержащих первые и вторые производные.

Вычислим с этой точностью граничные значения производных ψ_x и ψ_y (при $y = f(x)$); в частности, нетрудно установить, что

$$v^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = pf'' + qf'^2 + r \quad (2.3)$$

Здесь p , q и r — функции f ; если $F(\psi) = 2k$, то

$$p = \frac{2}{3f} \left(1 + \frac{8}{15} kf^2 \right), \quad q = \frac{1}{3f^2} \left(1 - \frac{8}{15} kf^2 \right), \quad r = \frac{1}{f^2} + \frac{2}{3} k \quad (2.4)$$

Если $F(\psi) = k\psi$, то (2.5)

$$p = -\frac{\sqrt{k} \operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh}^3 \sqrt{k} f} \left[\sqrt{k} f \frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh} \sqrt{k} f} - \sqrt{k} f \operatorname{sh} \sqrt{k} f - \operatorname{ch} \sqrt{k} f \right], \quad r = k \frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh}^2 \sqrt{k} f}$$

$$q = \frac{k \operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh}^2 \sqrt{k} f} \left\{ 1 - \frac{1 + \operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh}^2 \sqrt{k} f \operatorname{ch} \sqrt{k} f} \left[\sqrt{k} f \frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{k} f}{\operatorname{sh} \sqrt{k} f} - \sqrt{k} f \operatorname{sh} \sqrt{k} f - \operatorname{ch} \sqrt{k} f \right] \right\}$$

Приближенное решение вспомогательной задачи описывает вихревое движение идеальной жидкости в криволинейной трубе.

Примечание. Ограничения, наложенные на вид функции $F(\psi)$, не носят принципиального характера, изложенный метод позволяет построить решение в квадратурах для произвольного задания $F(\psi)$. В самом деле, функция ψ_0 будет удовлетворять уравнению

$$\psi_{0yy} = F(\psi_0)$$

Решение этого уравнения выражается в квадратурах

$$y = A_2 + \int_0^\psi \left[\int_0^z F(z) dz + A_1 \right]^{-1} dz$$

Здесь постоянные A_1 и A_2 находятся из условий

$$y = 0 \quad \text{при } \psi = 0, \quad y = f(x) \quad \text{при } \psi = 1$$

3. Уравнения длинных волн. Предположим априори, что поверхность изучаемой волны достаточно гладкая и ее производные малы. Заменяем выражение квадрата скорости в (1.5) его приближенным выражением (2.3). Это позволит свести задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно свободной границы

$$f'' p(f) + f'^2 q(f) + r(f) + 2vf = C \quad (3.1)$$

Задача состоит в определении трехпараметрического семейства решений. В качестве определяющих параметров целесообразно принять постоянную энергию C , число v и характеристику завихренности k . Тогда амплитуда волны и ее длина будут однозначно определяться заданием этих трех величин. Уравнение (3.1) допускает первый интеграл

$$u = - \int_1^f \left[\frac{2r(\xi)}{p(\xi)} + 4v \frac{\xi}{p(\xi)} - \frac{2C}{p(\xi)} \right] \exp \left[2 \int_{\xi}^f \frac{p(t)}{q(t)} dt \right] d\xi \quad (3.2)$$

Здесь $u = f'^2$. Постоянная интегрирования выбрана из условия, что $u = 0$ при $f = 1$ (в нижней точке впадины скорость горизонтальна). Так как в вершине волны скорость также горизонтальна, то постоянную энергию легко выразить через высоту горба f^* .

Исследуем уравнение (3.2) качественно в плоскости uf , предполагая характеристику завихренности k малой.

4. Преобразование уравнения (3.2). Введем вместо f переменную $y = f - 1$ и разложим функции, входящие в (3.2), в ряд по k .

1. Если $F(\psi) = 2k$, то будем иметь

$$u = y \{ -3 - 6v + 3C + k(12v - 6C) + k^2(\dots) + \dots \} +$$

$$+ y^2 \{ -9v + 3C + k(6 + 42v - 18C) + k^2(\dots) + \dots \} +$$

$$+ y^3 \{ -3v + k(6 + 54v - 18C) + k^2(\dots) + \dots \} +$$

$$+ y^4 \{ k(30v - 6C) + k^2(\dots) + \dots \} + y^5 \{ 6kv + k^2(\dots) + \dots \} +$$

$$+ y^6 \{ k^2(\dots) + \dots \} + \dots \quad (4.1)$$

2) Если $F(\psi) = k\psi$, то

$$\begin{aligned} u = & y \left[-3 - 6v + 3C + k \left(\frac{16}{5} v - \frac{8}{5} C - \frac{2}{5} \right) + k^2(\dots) + \dots \right] + \\ & + y^2 \left[-9v + 3C + k \left(\frac{6}{5} + \frac{56}{5} v - \frac{24}{5} C \right) + k^2(\dots) + \dots \right] + \\ & + y^3 \left[-3v + k \left(\frac{8}{5} + \frac{72}{5} v - \frac{24}{5} C \right) + k^2(\dots) + \dots \right] + \\ & + y^4 \left[k \left(8v - \frac{8}{5} C \right) + k^2(\dots) + \dots \right] + \\ & + y^5 \left[k \frac{8}{5} v + k^2(\dots) + \dots \right] + y^6 [k^2(\dots) + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести новую постоянную M так, чтобы при $M = 0$ обращался в нуль коэффициент при первой степени y . Положим

$$3M = -3 - 6v + 3C + k(12v - 6C) + \dots \quad (4.3)$$

Тогда уравнение (4.1) преобразуется к следующему

$$\begin{aligned} u = & 3My + y^2 \{ 3M [1 - 4k + k^2(\dots) + \dots] + \Delta \} + \\ & + y^3 \{ -3v - 6k[3(M - v) + 2] + k^2(\dots) + \dots \} + \\ & + 6y^4 [k(3v - M - 2) + k^2(\dots) + \dots] + \\ & + y^5 [6vk + k^2(\dots) + \dots] + \dots \equiv P(y, k, v, M) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Параметр Δ в этом уравнении определяется формулой

$$\Delta = (1 - v) \frac{3}{(1 + k)^2} + \frac{3k^2}{2(1 + k)^2} = (1 - v)(3 - 6k) + k^2 \left(\frac{15}{2} - 9v \right) + \dots \quad (4.5)$$

3) Если $F(\psi) = k\psi$, то будем иметь

$$\begin{aligned} u = & 3My + y^2 \{ 3M \left[1 - \frac{16}{15} k + k^2(\dots) + \dots \right] + \Delta \} + \\ & + y^3 \left\{ -3v - 2k \left[\frac{12}{5} (M - v) + \frac{8}{5} \right] + k^2(\dots) + \dots \right\} + \\ & + y^4 \left[\frac{8}{5} k(3v - M - 1) + k^2(\dots) + \dots \right] + y^5 \left[\frac{8}{5} vk + k^2(\dots) + \dots \right] + \dots + \\ & + \dots \equiv P(y, k, v, M) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Параметр Δ в этом уравнении определяется формулой

$$\Delta = (1 - v) \left(3 - \frac{8}{5} k \right) + k^2(\dots) + \dots \quad (4.7)$$

5. Качественное исследование уравнения (4.4). 1°. Уравнение (4.4) описывает семейство кривых, зависящих от трех параметров, — постоянной M которая однозначно определяется амплитудой, параметром v (зависящим от скорости распространения c) и характеристикой завихренности k . Эту совокупность кривых легче всего изучить качественными методами. Для этого надо знать распределение нулей полинома, стоящего в правой части (4.4). Для малых значений k характер этого распределения может быть обнаружен на основании следующих лемм.

Лемма 5.1. Три наименьшие по абсолютной величине корня y_1, y_2, y_3 уравнения $P(y, k, v, M) = 0$ при $k \rightarrow 0$ будут стремиться к корням уравнения

$$P(y, 0, v, M) = 0$$

Лемма 5.2. Остальные корни этого уравнения будут неорганично возрастать при $k \rightarrow 0$, причем

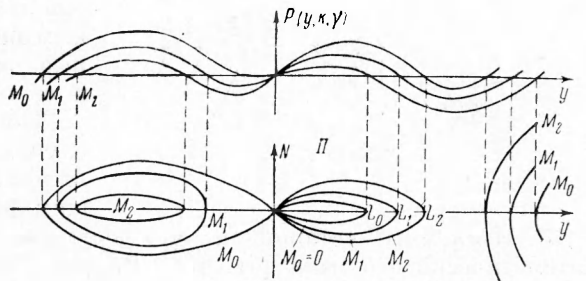
$$y_{4,5} = \pm \frac{1}{2\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \text{ и т. д.}$$

Доказательство этих лемм следует из того факта, что $P(y, k, \nu, M)$ при $k \rightarrow 0$ стремится равномерно к $P(y, 0, \nu, M)$ в любой ограниченной области плоскости комплексного переменного k .

2°. Рассмотрим сначала случай $\Delta > 0$. Пользуясь приведенными леммами, легко убеждаемся, что в этом случае характер кривой $u = P(y, k, \nu, M)$ будет таким, каким он изображен на фиг. 2, где

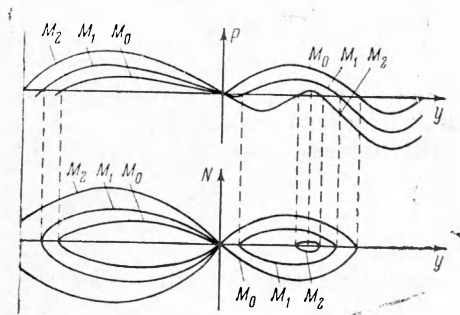
$$M_2 > M_1 > M_0 = 0$$

$$N = u = dy/dx = df/dx$$



Фиг. 2

Рассмотрим теперь структуру фазовой плоскости, представленной на фиг. 2. Так как по смыслу величина y положительна и $u(0) = 0$ (касательная во впадине горизонтальна), то физический смысл имеют лишь те кривые, которые проходят через начало координат и лежат в правой полуплоскости (зона 2).



Фиг. 3

Топологическая структура фазовой плоскости определяется параметрами Δ и M , которые при данных k и ν зависят от амплитуды α . С ростом α параметр M увеличивается. Если амплитуда α будет уменьшаться, то параметр M также будет уменьшаться и при некотором значении $\alpha = \alpha_0 > 0$ он обратится в нуль; это предельное решение на фиг. 2 обозначено через M_0 . Дальнейшее уменьшение α приведет к отрицательным значениям

постоянной M . Нетрудно убедиться, что в этом случае уравнение (4.4) не содержит решений, имеющих физический смысл. Для этого достаточно составить диаграмму, аналогичную рассмотренной (фиг. 3). В самом деле, если $M > 0$ и $M \rightarrow 0$, то один из корней, лежащих в левой полуплоскости, стремится к нулю. При $M = 0$ полином P имеет двойной нуль. При $M < 0$ этот корень переходит в правую полуплоскость, а наклон касательной к P в нуле становится отрицательным.

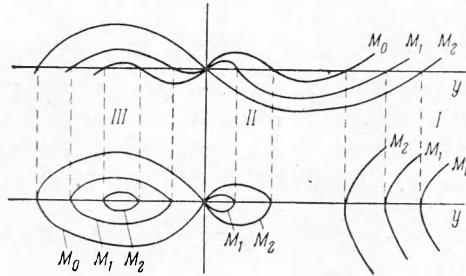
Следовательно, при $\Delta > 0$ уравнение (4.4) не содержит ограниченных решений, лежащих в правой полуплоскости, проходящих через начало координат, и вдоль которых значение постоянной M — отрицательно.

Из этого можно заключить, что при условии $\Delta > 0$ на поверхности завихренной жидкости могут существовать лишь такие волны, амплитуды которых α превосходят некоторое число α_0 . Таким образом, обнаружено существование однопараметрического (при фиксированных Δ и k) семейства решений уравнения (4.4), которое при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ стремится к особому решению $M_0(\Delta)$.

Если $\Delta = 0$, то особое решение M_0 стягивается в точку.

Для случая $\Delta < 0$ фазовая диаграмма изображена на фиг. 4.

Анализ этой диаграммы нам показывает, что нулевое значение параметра Δ бифуркационное: при $\Delta < 0$ вся топологическая структура фазовой плоскости становится иной, исчезает особое решение и ограничение снизу для амплитуды волн.



Фиг. 4

При $\Delta \leq 0$ на поверхности завихренной жидкости могут существовать волны любой сколь угодно малой амплитуды. Решения, принадлежащие зоне 2 (фиг. 4), описывают волны, близкие к обычным периодическим волнам, которые изучались Дюбрей-Жакотен и ее последователями [7, 8].

Так же как и в предыдущих случаях, отрицательные значения M приводят к решениям, не имеющим физического смысла.

3°. Итак, мы установили, что значение $\Delta = 0$ — бифуркационное. Математически это означает, что изменение знака Δ приводит к изменению числа корней в правой полуплоскости. Следовательно, смысл равенства $\Delta = 0$ совершенно такой же, как и равенства $\nu - 1 = 0$ в теории потенциальных течений. Из этой теории известно, что свойства потока при $\nu - 1 > 0$ (докритическое течение) существенно отличаются от свойств потока при $\nu - 1 < 0$ (сверхкритическое течение).

Рассмотрим формулу (4.5). Полагая $\Delta = 0$, найдем, что

$$\nu_* = 1 + \frac{1}{2} k^2 \quad (5.1)$$

Таким образом, критическая величина параметра $\nu = \nu_*$ — четная функция характеристики завихренности k и всегда больше 1.

Переходя к размерным величинам, мы найдем, что

$$c^{*2} = \frac{gh}{1 + \frac{1}{2} K^2} \quad (5.2)$$

Здесь c^* — критическая скорость распространения волны. Так как в случае потенциального потока

$$c^* = \sqrt{gh} \quad (5.3)$$

то из равенства (5.2) следует утверждение: значение критической скорости в вихревом потоке всегда меньше критической скорости в потенциальном потоке. Этот факт можно объяснить так: равенство (5.3) означает, что критическое значение скорости соответствует равенству потенциальной энергии удвоенному значению кинетической. Аналогичный смысл имеет равенство (5.2). Так как кинетическая энергия вихревого потока при прочих равных условиях больше кинетической энергии потенциального потока, а потенциальная энергия определяется только геометрией свободной поверхности, то равенство потенциальной энергии потока удвоенной кинетической наступает при меньших значениях средней скорости потока. Отсюда и следует, что критическая скорость в вихревом потоке всегда будет меньше критического значения c в потенциальном.

6. Исследование особого решения. Кноидальные волны в завихренной жидкости. 1°. Уравнения (4.4) и (4.6) могут быть проинтегрированы в квадратурах. Однако результат получается громоздким. Поэтому при исследовании ограничиваемся тем случаем, когда решение близко к особому (M мало) и режим близок к критическому (Δ мало). Обозначим

$$M = \Delta^2 m, \quad a = 3 + 6k - 12k\nu, \quad b = 6k(3\nu - 2), \quad d = 6\nu k$$

Если ν близко к 1, а k невелико, то $a > 0$. Уравнение (4.4) будет

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3\Delta^2 m y + \{3(1-4k)\Delta^2 m + \Delta\} y^2 + (\Delta - a + 18km\Delta^2) y^3 + (b - 6m\Delta^2) y^4 + cy^5 + \dots \quad (6.1)$$

Можно пытаться разыскать решения этого уравнения в виде ряда

$$y = \sum_n y_n (|\Delta|^p x) |\Delta|^{nq} \quad (6.2)$$

где p и q — некоторые действительные числа. Уравнение (6.1) всегда допускает тривиальное решение. Поэтому необходим предварительный анализ, который должен установить, при каких соотношениях между числами p и q ряд (6.2) может представить нетривиальное решение. Оказывается, что единственными значениями p и q , которые для этого могут быть использованы, будут $p = 1/2$ и $q = 1$.

Подставляя ряд (6.2) в (6.1), можно обычным способом построить процесс вычисления y_n . К тому же самому результату мы придем, если вместо уравнения (6.1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3\varepsilon^2 M y + y^2 \{\varepsilon^2 3(1-4k)M + \varepsilon\Delta\} - y^3 (a - \varepsilon\Delta + 18kM\varepsilon^2) + y^4 (b - \varepsilon^2 M) + cy^5 + \dots \quad (6.3)$$

и будем разыскивать решение в виде ряда

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \quad (6.4)$$

и в окончательном результате положим $\varepsilon = 1$. Для вычисления такая процедура более удобна. Для функций y_i получим следующие уравнения:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{3My_1 + \Delta y_1^2 - a y_1^3} \equiv \sqrt{aP(y_1)}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\sqrt{aP(y_1)}} \left\{ y_2 \frac{dP(y_1)}{dy_1} + y_1^2 3M(1-4k) - y_1^3 \Delta + y_1^4 b \right\} \quad \text{и т. д.} \quad (6.5)$$

Первое уравнение этой системы нелинейное, остальные — линейные неоднородные.

2°. Рассмотрим уравнение первого приближения. Переменные в этом уравнении разделяются, и мы имеем

$$\int_{\alpha}^y \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = \sqrt{ax} \quad (6.6)$$

Здесь α — максимальное значение y . Оно соответствует началу координат (абсцисса горба волны равна нулю) и определяет максимальное значение корня полинома $P(y)$.

Нас интересуют только ограниченные решения системы (6.5). Поэтому мы должны рассматривать лишь такие значения параметров M и Δ , при которых все три корня этого полинома действительные. Один из них всегда равен нулю, один положительный ($\alpha > 0$) и один всегда отрицательный ($-\beta > 0$). Перепишем уравнение (6.6)

$$\int_{\alpha}^y \frac{dy}{\sqrt{y(\alpha-y)(\beta+y)}} = \sqrt{ax} \quad (6.7)$$

Левая часть этого уравнения имеет стандартную форму эллиптических интегралов. Поэтому

$$\sqrt{ax} = \frac{2}{\sqrt{\alpha+\beta}} F(\psi, \kappa) \quad (6.8)$$

Здесь $F(\psi, \kappa)$ — эллиптический интеграл первого рода

$$F(\psi, \kappa) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}, \quad \psi = \arccos \sqrt{\frac{y}{\alpha}}, \quad \kappa^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (6.9)$$

Используя известные формулы обращения эллиптических интегралов, можно записать решение уравнения через эллиптические функции

$$\psi = \operatorname{am} \sqrt{a(\alpha + \beta)} \frac{x}{2} \quad (6.10)$$

$$\cos \psi = \cos \operatorname{am} \left[\sqrt{a(\alpha + \beta)} \frac{x}{2} \right] = \operatorname{cn} \left[\sqrt{a(\alpha + \beta)} \frac{x}{2} \right] \quad (6.11)$$

$$y = \alpha \cos^2 \psi = \alpha \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{a(\alpha + \beta)} \frac{x}{2} \right] \quad (6.12)$$

Здесь через cn обозначена эллиптическая функция Якоби: ее модуль κ определяется (6.9). Поэтому волны, определенные формулой (6.12), будем называть кноидальными, по аналогии с кноидальными волнами в завихренной жидкости, полученные Картвегом и Де-Врисом [9].

3°. Найдем связь между длиной волны λ , амплитудой α , числом Фруда и завихренностью k . Так как $y(0) = \alpha$ (максимальное возвышение), а $y(\pi/2) = 0$, то из формулы (6.8) находим

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{a(\alpha + \beta)}} J(\kappa) \quad (6.13)$$

Здесь $J(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Для того чтобы найти требуемую зависимость, надо в формуле (6.13) выразить β через α . Для этого используем связь $\alpha - \beta = \Delta/a$ коэффициентов полинома $P(y)$ с корнями α и β . В результате получим

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{a(2\alpha - \Delta/a)}} J(\kappa) \quad (6.14)$$

Формула (6.14) является аналогом формулы теории длинных безвихревых волн [6]. Модуль эллиптического интеграла в (6.14) определяется выражением

$$\kappa^2 = \frac{\alpha}{2\alpha - \Delta/a} \quad (6.15)$$

4°. Рассмотрим предельный случай малых значений β , т. е. решения, близкие к особому. Отбрасывая в формуле (6.15) слагаемые, содержащие β , получим

$$y = \alpha \operatorname{cn}^2 \sqrt{a\alpha} \frac{x}{2} \quad (6.16)$$

В этом случае $\kappa \sim 1$, следовательно, величину $J(\kappa)$ можно заменить ее асимптотическим представлением

$$J(\kappa) = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$$

Пользуясь этим выражением, а также выражением (6.15), из (6.14) получим приближенную зависимость длины волны от амплитуды, скорости и завихренности

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{a\alpha}} \ln \frac{16\alpha}{\alpha - \Delta/a} \quad (6.17)$$

Эта простая формула дает аналитическое выражение того факта, который был установлен качественными методами. При фиксированном $\Delta > 0$, с уменьшением амплитуды α длина волны λ увеличивается: $\lambda \rightarrow \infty$, когда $\alpha \rightarrow \Delta/a = \alpha^*$. Волн, амплитуда которых меньше α^* , в этом случае не существует.

Замечание. Необходимо еще рассмотреть два вопроса: найти форму предельного решения и показать возможность вычисления последующих приближений (сходимость использованных рядов при малых значениях Δ следует из общей теории).

Ответ на указанные вопросы нетрудно получить непосредственно из результатов этого параграфа. Однако для наглядности (чтобы не оперировать с эллиптическими функциями) вопрос о предельном решении рассмотрим самостоятельно. Для этого частного случая вопрос о возможности вычисления последующих приближений решается особенно просто.

7. Предельное решение. 1. Предельное решение соответствует нулевому значению постоянной энергии M . Уравнение (6.3) в этом случае имеет вид

$$\varepsilon \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \varepsilon \Delta y^2 - y^3 (\alpha - \varepsilon \Delta) + y^4 b + y^5 c \quad (7.1)$$

Система, аналогичная системе (6.5), будет

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{y_1^2 (\Delta - a y_1)} \quad (7.2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2 (\Delta - a y_1)}} \{ y_2 [2\Delta y_1 - 3a y_1^2] - y_1^3 \Delta + y_1^4 b \} \quad \text{и т. д.} \quad (7.3)$$

Задача состоит в определении ограниченных решений. Постоянные, появляющиеся при интегрировании этой системы, должны выбираться из условия того, чтобы начало координат соответствовало вершине горба волны, где касательная горизонтальна. Система уравнений (7.2) — (7.3) интегрируется в замкнутом виде

$$y = \frac{1}{\text{ch}^2 \sqrt{1/4} \Delta x} \left\{ \frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta^2}{a^2} \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + \dots \right\} + \frac{1}{\text{ch}^4 \sqrt{1/4} \Delta x} \left\{ \frac{2b\Delta^2}{a^3} + \dots \right\} + \frac{1}{\text{ch}^6 \sqrt{1/4} \Delta x} \{ \dots \} + \dots \quad (7.4)$$

Отсюда $\lim y(x) = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Это значит, что особое решение имеет вид уединенной волны. При $k = 0$ ряд (7.4) содержит одно первое слагаемое и описывает форму обычной уединенной волны. В этом случае формула (7.4) совпадает с точностью до величин порядка $(1 - v)^2$ с известными приближенными формулами Релея и Буссинеска [10].

Будем называть «амплитудой» уединенной волны максимальное значение функции $y(\alpha)$. Тогда

$$\alpha = \frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta^2}{a^2} + \dots \quad (7.5)$$

Для малых Δ

$$\alpha \sim \frac{\Delta}{a} \left(\Delta = (1 - v) \frac{3}{(1 + k)^2} + \frac{3k^2}{2(1 + k)^2} \right) \quad (7.6)$$

Если k отрицательно, то амплитуда будет всегда больше в вихревом случае, чем амплитуда уединенной волны в безвихревом потоке. Уединенная волна может существовать и в том случае, если $1 - v = 0$, и даже когда $1 - v$ отрицательно для всех значений v , для которых $\Delta > 0$. Этот результат согласуется с результатами качественного исследования.

Таким образом: 1) в вихревом потоке существует критическое значение скорости и это значение всегда меньше критической скорости потенциального потока; 2) на поверхности завихренной жидкости могут существовать уединенные волны (7.4).

Поступила 23 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. До теорії довгих хвиль. Зб. Праці Ін-ту матем. АН УРСР, 1946, № 8.
2. Лаврентьев М. А. О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй. Матем. сб., 1938, т. 4, № 3.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1959.
4. Dubreil-Jacotin. Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'amplitude finie. J. Math., 1934, № 13.
5. Иванчиков Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Об асимптотическом характере формул М. А. Лаврентьева. ДАН, 1958, т. 123, № 2.
6. Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической. Тр. МФТИ, 1959, № 3.
7. Gouyon R. Sur les houles planes en profondeur infinie. C. R., 1958, t. 247, p. 33—35.
8. Gouyon R. Sur les houles planes en profondeur finie. C. R., 1958, t. 247, p. 266—269.
9. Kartevæg and 'de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of lang stationary waves. Philos. Mag., 1895, vol. XXXIX, № 5.
10. Ламб. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.