

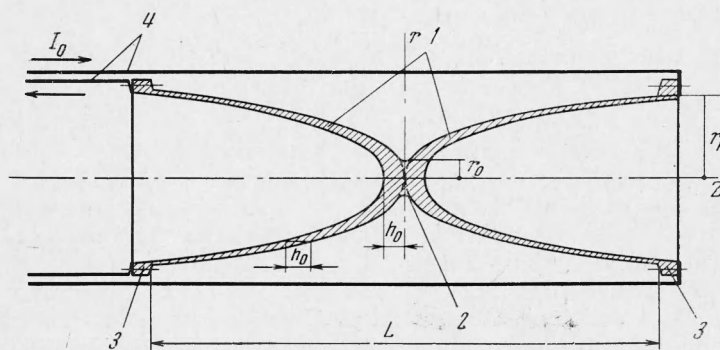
**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, НАХОДЯЩЕЙСЯ
ПОД ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ДАВЛЕНИЕМ**

**Д. Г. Баратов, В. М. Валов, Р. А. Рзаев,
В. Л. Рыков, И. М. Шалаиов**

(Москва)

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженной параболической оболочки, возникающее при протекании по ней сильного электрического тока. Оболочка с током является элементом системы, предназначенной для фокусировки λ - и K -мезонов в нейтринных экспериментах. Задача решается на основе численного интегрирования на ЭВМ уравнений теории оболочек методом двухсторонней матричной прогонки, а также приближенного аналитического решения. Применяемый алгоритм может быть использован для расчета произвольной оболочки вращения переменной толщины. Обсуждаются полученные результаты.

В исследованиях по физике высоких энергий для формирования пучков частиц находят применение системы из токонесущих оболочек. Такие системы обычно представляют собой набор оболочек вращения, обтекаемых импульсным электрическим током в сотни килоампер.



Фиг. 1

В [1] для фокусировки λ - и K -мезонов в нейтринном эксперименте предложена система, состоящая из токовых параболических линз [2]. Для параметров этой системы давление магнитного поля тока достигает нескольких сот атмосфер, и при малой толщине оболочки механические напряжения могут быть весьма велики.

Параболическая линза представляет собой в общем случае тело вращения с переменной толщиной стенок (фиг. 1), нагруженное осесимметричным переменным во времени и неоднородным в пространстве магнитным давлением. Линза состоит из двух параболоидов вращения 1, соединенных вершинами через конструктивную шейку 2, фланцев 3 и коаксиального токоподвода 4 с током I_0 . В рассматриваемом случае переменная вдоль линзы толщина ее стенок h значительно меньше характерного радиуса

кривизны поверхности R , а частоты собственных колебаний линзы превышают частоту изменения тока. В связи с этим для описания напряженно-деформированного состояния будем исходить из системы уравнений теории оболочек вращения при статическом характере нагрузки (см., например, [3]).

Точное аналитическое решение системы известно лишь для некоторых частных типов оболочек [4]. Для решения задачи ниже использованы два метода: численное решение полной системы уравнений теории оболочек и приближенное аналитическое решение.

1. Система уравнений для оболочки вращения, нагруженной осесимметричным давлением, имеет вид [3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} - \frac{Q_1}{R_1} &= 0 \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{dQ_1}{d\theta} + Q_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} &= p_n \\ \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\theta} + (M_1 - M_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} &= Q_1 \\ T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right) + \frac{\mu}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w) \right] \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w) + \frac{\mu}{R_1} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right) \right] \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{\mu \operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) \right] \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) + \frac{\mu}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) \right] \end{aligned}$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; T_1, T_2, M_1, M_2 — погонные усилия и моменты

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 d\xi, \quad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 d\xi, \quad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \xi d\xi, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \xi d\xi$$

σ_1 и σ_2 — меридиональное и кольцевое напряжения; ξ — координаты по толщине оболочки от ее срединной поверхности; ($\xi = h/2$ соответствует внутренней поверхности оболочки, $\xi = -h/2$ — ее внешней поверхности); u и w — смещения точек срединной поверхности по направлениям меридиана и нормали; Q_1 — погонное перерезывающее усилие; R_1 и R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности; θ — угловая координата по меридиану. Положительные направления усилий, моментов и смещений показаны на элементе оболочки (фиг. 2); p_n — нормальное к внешней поверхности оболочки давление магнитного поля, определяемое выражением

$$(1.2) \quad p_n = 10^4 (1/2\pi) I_0^2 r^{-2}$$

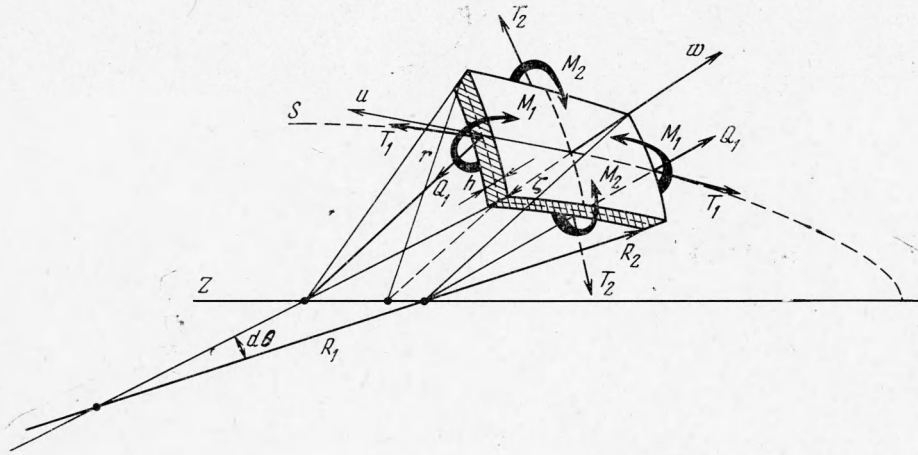
p_n — в $\kappa\Gamma/\text{см}^2$, I_0 — амплитудное значение тока в Ma , r — текущий радиус параллели внешней поверхности оболочки в см .

Задача может быть сведена к решению системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при двухточечных граничных условиях — по три на каждом краю параболической части линзы. Для численного решения краевой задачи, однородные дифференциальные уравнения которой наряду с убывающими имеют и быстро возрастающие решения (к ним относятся, как правило, и задачи теории оболочек), применим метод прогонки. Один из возможных и наиболее эффективных его вариантов — метод двухсторонней матричной прогонки [5, 6] — был применен для решения данной задачи.

Суть метода состоит в следующем. Полный вектор X из $2n$ искомых функций, характеризующий состояние произвольного сечения системы, делится на два вектора (X_1 и X_2) по n функций в каждом. В каждой точке s интервала интегрирования (s_0, s_k) между векторами X_1 и X_2 могут быть найдены два линейных соотношения

$$(1.3) \quad X_1(s) = L_i(s)X_2(s) + R_i(s) \quad (i = 1, 2)$$

где $L_i(s)$ — квадратные ($n \times n$) матрицы и $R_i(s)$ — векторы из n коэффициентов. $L_i(s)$ и $R_i(s)$ определяются путем интегрирования от s_0 до s_k ($ds > 0, i = 1$) и от s_k до s_0 ($ds < 0, i = 2$) соответствующих дифференциальных уравнений, полученных, например, в [7] применительно к варианту односторонней прогонки, с начальными условиями, следующими



Фиг. 2

из условий закрепления краев. Тем самым левые и правые граничные условия переносятся во все точки s интервала интегрирования с учетом геометрии участков соответственно слева и справа от s и приложенной на этих участках внешней нагрузки. Таким образом производится прямая ($i = 1$) и обратная ($i = 2$) прогонки.

Физический смысл L_i и R_i зависит от выбора векторов X_1 и X_2 . Так, при $i = 1$, если X_1 — вектор перемещений, а X_2 — вектор внутренних силовых факторов, то L_1 — матрица податливостей части системы от s_0 до s , а R_1 — перемещения сечения s , вызываемые нагрузкой, приложенной слева от него. Наоборот, если X_1 — вектор силовых факторов, а X_2 — перемещений, то L_1 — матрица жесткостей, а R_1 — силовые факторы в сечении s , вызываемые нагрузкой, приложенной слева от s . При смешанном содержании векторов X_1 и X_2 различные компоненты матрицы L_1 и вектора R_1 будут иметь различный физический смысл.

Выбор векторов X_1 и X_2 определяется условиями закрепления края $s = s_0$, с которого начинается решение задачи, а именно в вектор X_1 включаются заданные на этом краю n -функции. При обратной прогонке содержание векторов X_1 и X_2 остается тем же, поскольку после прямой прогонки на краю $s = s_k$ становятся определенными все $2n$ искомых функций, и для обратной прогонки можно формально использовать в качестве начальных условий те n из них, которые полностью определяют при $s = s_k$ вектор X_1 . Совместное решение полученных при прямой ($i = 1$) и

обратной ($i = 2$) прогонках уравнений (1.3) дает в любой точке s интервала (s_0, s_k) искомые значения $X_1(s)$ и $X_2(s)$.

Рассмотрим далее в общем виде применение данного метода для расчета составных конструкций, что необходимо для расчета сопряженных оболочек вращения. Припишем в зоне стыка двух участков индекс 1 левому из них и индекс 2 правому (верхние индексы). Тогда условия сопряжения двух участков могут быть представлены в форме

$$(1.4) \quad M^+ X^{(1)} = X^{(2)}$$

$$(1.5) \quad M^- X^{(2)} = X^{(1)}$$

где $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ — полные ($2n$) векторы состояния стыкового сечения, M^+ и M^- — квадратные ($2n \times 2n$) матрицы преобразований. Выражения (1.4) и (1.5) представляют собой уравнения равновесия элемента стыка и непрерывности деформаций. Очевидно, что

$$(1.6) \quad M^+ M^- = M^- M^+ = I$$

где I — единичная ($2n \times 2n$) матрица.

Совершая прямую прогонку, имеем в стыке для участка соотношение

$$(1.7) \quad X_1^{(1)} = L_1^{(1)} X_2^{(1)} + R_1^{(1)}$$

которое должно быть преобразовано с помощью (1.4) или (1.5) в соотношение

$$(1.8) \quad X_{1s}^{(2)} = L_1^{(2)} X_2^{(2)} + R_1^{(2)}$$

для участка 2. Преобразование (1.4) запишем в виде

$$(1.9) \quad M_{11}^+ X_1^{(1)} + M_{12}^+ X_2^{(1)} = X_1^{(2)}, \quad M_{21}^+ X_1^{(1)} + M_{22}^+ X_2^{(1)} = X_2^{(2)}$$

где M_{ik}^+ — квадратные ($n \times n$) блоки в матрице M^+ . Подставляя (1.7) в (1.9), получим

$$(1.10) \quad X_1^{(2)} = [M_{11}^+ L_1^{(1)} + M_{12}^+] [M_{21}^+ L_1^{(1)} + M_{22}^+]^{-1} X_2^{(2)} + M_{11}^+ R_1^{(1)} - \\ - [M_{11}^+ L_1^{(1)} + M_{12}^+] [M_{21}^+ L_1^{(1)} + M_{22}^+]^{-1} M_{21}^+ R_1^{(1)}$$

Сопоставление (1.10) с (1.9) дает

$$(1.11) \quad L_1^{(2)} = [M_{11}^+ L_1^{(1)} + M_{12}^+] [M_{21}^+ L_1^{(1)} + M_{22}^+]^{-1} \\ R_1^{(2)} = [M_{11}^+ - L_1^{(2)} M_{21}^+] R_1^{(1)}$$

Если воспользоваться условиями сопряжения в форме (1.5), то для $L_1^{(2)}$ и $R_1^{(2)}$ имеем

$$(1.12) \quad L_1^{(2)} = - [M_{11}^- - L_1^{(1)} M_{21}^-]^{-1} [M_{12}^- - L_1^{(1)} M_{22}^-] \\ R_1^{(2)} = [M_{11}^- - L_1^{(1)} M_{21}^-]^{-1} R_1^{(1)}$$

где M_{ik}^- — квадратные ($n \times n$) блоки в матрице M^- . Выражения для $L_2^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ для перехода от участка 2 к участку 1 при обратной прогонке можно получить аналогичным путем или из выражений (1.11) и (1.12), заменяя при этом индекс прямой прогонки 1 при L_i и R_i на ин-

декс обратной прогонки 2 (нижние индексы). Получим

$$(1.13) \quad L_2^{(1)} = - [M_{11}^+ - L_2^{(2)} M_{21}^+]^{-1} [M_{12}^+ - L_2^{(2)} M_{22}^+]$$

$$R_2^{(1)} = [M_{11}^+ - L_2^{(2)} M_{21}^+]^{-1} R_2^{(2)}$$

$$(1.14) \quad L_2^{(1)} = [M_{11}^- L_2^{(2)} + M_{12}^-] [M_{21}^- L_2^{(2)} + M_{22}^-]^{-1}$$

$$R_2^{(1)} = [M_{11}^- - L_2^{(1)} M_{21}^-] R_2^{(2)}$$

Из выражений (1.11) — (1.14) видно, что для L_1 и R_1 при прямой и обратной прогонках можно пользоваться либо одинаковыми по форме выражениями, одноименные блоки M_{ik} которых принадлежат разным, взаимно обратным матрицам M^+ и M^- , либо разными по форме выражениями, но с использованием блоков только одной из матриц M^+ или M^- при обоих переходах. С помощью соотношений (1.11) — (1.14) методом двухсторонней прогонки могут рассчитываться конструкции, составленные из произвольного числа сопряженных участков.

Таким образом, в методе двухсторонней матричной прогонки решение исходной краевой задачи сводится к решению четырех задач Коши для $L_1(s)$, $R_1(s)$ и $L_2(s)$, $R_2(s)$, решаемых по две слева и справа интервала (s_0, s_k) с соответствующими начальными условиями. Быстро возрастающие функции ни в одной из этих задач не возникают, что можно показать в каждом конкретном случае.

Преимущество метода двухсторонней прогонки по сравнению с методом обычной прогонки [7] состоит в том, что дифференциальные уравнения для L_i и R_i ($i = 1, 2$) интегрируются слева и справа интервала (s_0, s_k) независимо, поэтому матрицы коэффициентов L_i и R_i запоминаются не на каждом шаге интегрирования, а лишь в точках, где необходимо получить решение X_1, X_2 . В результате этого существенно сокращается объем используемой памяти ЭВМ.

2. Для реализации описанного метода были составлены программы, пригодные для расчета произвольной оболочки вращения переменной толщины и состыкованных оболочек. Программы написаны на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6. Дифференциальные матричные уравнения для L_i и R_i интегрировались методом Рунге — Кутты. Исходная система уравнений (1.1), преобразованная к основной системе из шести дифференциальных уравнений первого порядка (осесимметричная задача, $n = 3$) в смешанной форме, приведенная к безразмерному виду, записывается следующим образом:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{du^\circ}{ds^\circ} &= T_1^\circ \frac{B_0}{B} - u^\circ \mu \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta - w^\circ \left(\frac{R_0}{R_1} + \mu \frac{R_0}{R_2} \right) \\ \frac{dw^\circ}{ds^\circ} &= \vartheta_1 + u^\circ \frac{R_0}{R_1}, \quad \frac{d\vartheta_1}{ds^\circ} = M_1^\circ \frac{D_0}{D} - \vartheta_1 \mu \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta \\ \frac{dT_1^\circ}{ds^\circ} &= -T_1^\circ (1 - \mu) \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + Q_1^\circ \frac{R_0}{R_2} + \\ &+ u^\circ (1 - \mu^2) \frac{B}{B_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + w^\circ (1 - \mu^2) \frac{B}{B_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta - q_0^\circ \\ \frac{dQ_1^\circ}{ds^\circ} &= -Q_1^\circ \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta - T_1^\circ \left(\frac{R_0}{R_1} + \mu \frac{R_0}{R_2} \right) - \\ &- u^\circ (1 - \mu^2) \frac{B}{B_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta - w^\circ (1 - \mu^2) \frac{B}{B_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 + q_n^\circ \\ \frac{dM_1^\circ}{ds^\circ} &= -M_1^\circ (1 - \mu) \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + Q_1^\circ \frac{1}{c_0^2} + \vartheta_1 (1 - \mu^2) \frac{D}{D_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$(2.2) \quad dX / ds^\circ = FX + G$$

В (2.2) X — полный ($2n = 6$) вектор искомых функций, причем

$$X_1 = \begin{bmatrix} u^\circ \\ w^\circ \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} T_1^\circ \\ Q_1^\circ \\ M_1^\circ \end{bmatrix}$$

где F — матрица переменных коэффициентов, G — вектор функций нагрузки. В рассматриваемом случае $q_0^\circ = 0$, $q_n^\circ = p_n^\circ$.

Особенностью записи системы в форме (2.1) является отсутствие в явном виде дифференцирования геометрических и жесткостных параметров оболочки, непосредственное получение в результате решения искомых величин, а также простота в задании граничных условий и условий сопряжения. В системе (2.1) за независимую переменную принята длина дуги меридиана s . Остальные искомые величины (T_2 , M_2) вычисляются после решения основной системы (2.1) из дополнительных алгебраических соотношений. Они имеют вид

$$(2.3) \quad T_2^\circ = \mu T_1^\circ + (1 - \mu^2) \frac{B}{B_0} \frac{R_0}{R_2} (u^\circ \operatorname{ctg} \theta + w^\circ) \\ M_2^\circ = \mu M_1^\circ + (1 - \mu^2) \frac{D}{D_0} \frac{R_0}{R_2} \vartheta_1 \operatorname{ctg} \theta$$

В (2.1) — (2.3) приняты обозначения

$$u^\circ = \frac{u}{R_0}, \quad w^\circ = \frac{w}{R_0}, \quad T_1^\circ = \frac{T_1}{B_0}, \quad T_2^\circ = \frac{T_2}{B_0} \\ Q_1^\circ = \frac{Q_1}{B_0}, \quad M_1^\circ = \frac{M_1 R_0}{D_0}, \quad M_2^\circ = \frac{M_2 R_0}{D_0}, \quad c_0^2 = \frac{D_0}{B_0 R_0^2} \\ s^\circ = \frac{s}{R_0}, \quad p_n^\circ = \frac{p_n R_0}{B_0}, \quad B_0 = \frac{E_0 h_0}{1 - \mu^2}, \quad B = \frac{E h}{1 - \mu^2} \\ D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

где ϑ_1 — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки в направлении меридиана; h_0 , h , B_0 , B , D_0 , D — толщины, жесткости на растяжение и изгиб в точке приведения 0 и текущей точке s ; E_0 , E — соответствующие модули упругости, причем в общем случае может быть $E(s) \neq \operatorname{const}$; R_0 — радиус приведения.

Для параболической линзы (фиг. 1) с постоянной параболы a за точку приведения удобно взять точку при $\theta = 0$. При этом $R_0 = 1/2a$ и тогда $R_0/R_1 = \cos^3 \theta$, $R_0/R_2 = \cos \theta$, $B/B_0 = \cos \theta$, $D/D_0 = \cos^3 \theta$ (при $E(s) = \operatorname{const}$). В случае сопряжения двух и более оболочек для всех них можно выбрать общую точку приведения. В решаемой здесь задаче о сопряжении параболической оболочки и шейки линзы в форме цилиндрической оболочки в качестве такой взята точка параболоида при $\theta = 0$.

Блоки матриц M^+ и M^- для сопряжения цилиндрической и параболической оболочек при выбранных векторах X_1 и X_2 имеют вид

$$M_{11}^+ = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{22}^+ = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и $M_{11}^- = M_{22}^+$, $M_{22}^- = M_{11}^+$. Остальные блоки нулевые. Решение задачи при этом начиналось с правого края (s_k , θ_k , r_k). В качестве левых граничных условий принимались условия посередине цилиндрической оболочки, которые следуют из симметрии конструкции. Здесь будут равны нулю

перемещение по оси u° , угол поворота нормали к срединной поверхности по меридиану $\hat{\nu}_1$ и перерезывающее усилие Q_1° .

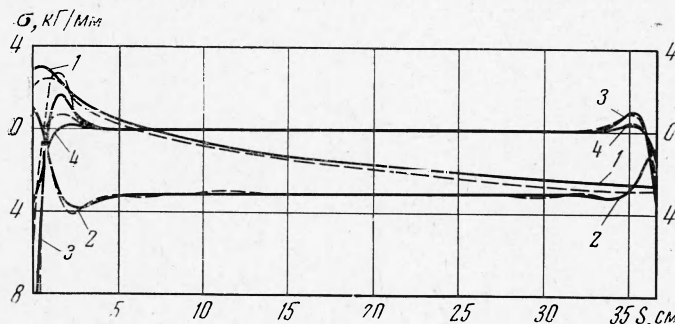
После решения системы (2.1) и вычисления T_2 и M_2 по (2.3) максимальные напряжения в сечении определяются из соотношений [3]

$$(2.4) \quad \sigma_1 = \frac{T_1^{\circ} B_0}{h} \pm \frac{6M_1^{\circ} D_0}{R_0 h^2}, \quad \sigma_2 = \frac{T_2^{\circ} B_0}{h} \pm \frac{6M_2^{\circ} D_0}{R_0 h^2}$$

в которых знак минус соответствует напряжениям сжатия, плюс — растяжения. Так как в оболочках имеет место сложное напряженное состояние, для числовой оценки оно приводится к одноосному эквивалентному напряженному состоянию в соответствии с теорией максимальных касательных напряжений по формуле [6]

$$(2.5) \quad \sigma_e = \max - \sigma_{\min}$$

причем радиальное напряжение, как обычно в теории оболочек, полагается равным нулю. Значения σ_{\max} и σ_{\min} берутся из (2.4).



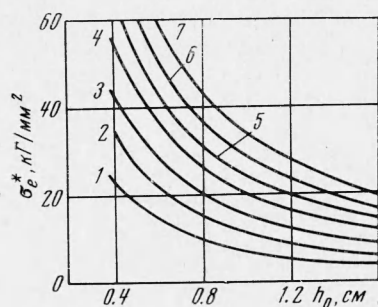
Фиг. 3

Величины напряжений рассчитаны в следующем диапазоне параметров линз, характерном для оптической системы фокусирующего устройства [1]: ток в линзах $I_0 \sim 0.5$ Ма, длина линз $L = (50 \div 170)$ см, конечный радиус $r_k = (7 \div 25)$ см, радиус шейки $r_0 = (0.8 \div 3)$ см, постоянная параболы $a = (0.05 \div 1.5)$ см⁻¹, толщина оболочки в точке $\theta = 0$ $h_0 = (0.4 \div 2)$ см. На фиг. 3 приведены распределения вдоль меридиана s напряжений σ_{T_1} , σ_{T_2} , σ_{M_1} , σ_{M_2} (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно) для линзы с параметрами $I_0 = 0.5$ Ма, $r_k = 9.5$ см, $r_0 = 1.5$ см, $h_0 = 1$ см, $a = 0.404$ см⁻¹. Сплошные кривые — результат численного интегрирования уравнений (2.1), пунктирные — результат аналитического расчета по (3.1), (3.9). Левый край фиг. 3 соответствует шейке, правый — фланцу линзы.

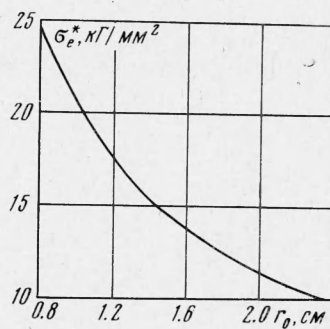
Предполагалось жесткое закрепление концов параболоидальной части у шейки и фланца. Наибольшими во всех рассмотренных вариантах линз оказываются суммарные (по формулам (2.4)) напряжения в зонах сопряжений линзы с шейкой и фланцем. У шейки это — напряжения растяжения на внешней поверхности параболоида, у фланца — напряжения сжатия на внутренней поверхности, причем первые всегда значительно больше. При отходе от мест закрепления суммарные напряжения быстро убывают.

Было выяснено влияние способов закрепления фланца на напряженное состояние. Рассматривались следующие варианты: фланец жестко закреплен; разрешены перемещения по оси линзы; линза имеет предварительное (по подачи тока) поджатие; абсолютно свободный край (без фланца).

В качестве граничных условий у шейки взяты $u^\circ = w^\circ = \dot{v}_1 = 0$. Расчет показал, что во втором случае напряженное состояние у шейки существенно ухудшается по сравнению с первым. Напряжения в четвертом варианте остаются примерно такими же, как и во втором. Ухудшение напряженного состояния во втором и четвертом вариантах по сравнению с первым связано с тем, что при освобождении фланца полная продольная сила магнитного давления $10^4 I_0^2 \ln r_k r_0^{-1}$ (кГ) уравнивается усилиями T_1, Q_1 только у шейки. (Радиальная составляющая силы всегда самоуравновешена.) Отсюда следует, что первый вариант более предпочтителен. Предварительное поджатие линзы (случай третий) ослабляет напряженное состояние у шейки. Но при этом может ухудшиться устойчивость линзы.



Фиг. 4



Фиг. 5

Ниже приводятся результаты расчетов максимального эквивалентного напряжения σ_e^* (приходящегося на область шейки) в зависимости от геометрических параметров a, h_0, r_0 . На фиг. 4 показаны зависимости σ_e^* от h_0 при $I_0 = 0.5 \text{ Ма}$, $r_k = 7.5 \text{ см}$, $r_0 = 1.5 \text{ см}$ и различных значениях постоянной параболы a (кривая 1 соответствует $a = 0.2 \text{ см}^{-1}$, 2 — $a = 0.4 \text{ см}^{-1}$, 3 — $a = 0.6 \text{ см}^{-1}$, 4 — $a = 0.8 \text{ см}^{-1}$, 5 — $a = 1 \text{ см}^{-1}$, 6 — $a = 1.2 \text{ см}^{-1}$, 7 — $a = 1.4 \text{ см}^{-1}$).

Как следует из фиг. 4 (см. также формулы (3.1)), напряжения при неизменном токе и радиусе r_k уменьшаются при уменьшении параметра a и увеличении h_0 . Это связано в основном с изменением нормальной толщины оболочки в зоне сопряжения с шейкой, которая определяется выражением $h = h_0 (1 + 4a^2 r_0^2)^{-1/2}$. В соответствии с этим выражением следовало бы ожидать увеличения напряжений при увеличении радиуса шейки r_0 , так как при этом уменьшается h . Но с увеличением r_0 падает магнитное давление ($\sim r_0^{-2}$), а также уменьшается продольная составляющая силы магнитного давления ($\sim \ln r_k/r_0$), вследствие чего напряжения у шейки при увеличении ее радиуса уменьшаются. Зависимость максимального напряжения от радиуса шейки приведена на фиг. 5 для $I_0 = 0.5 \text{ Ма}$, $r_k = 9.5 \text{ см}$, $h_0 = 1 \text{ см}$, $a = 0.842 \text{ см}^{-1}$.

Переход к параболической линзе с осевым отверстием в шейке приводит к уменьшению максимальных напряжений в зоне сопряжения параболоидов с шейкой. Например, для линзы с параметром $a = 0.1236 \text{ см}^{-1}$, толщиной параболоида вдоль оси $h_0 = 1 \text{ см}$, $r_0 = 3 \text{ см}$ наличие в шейке отверстия с радиусом 2.17 см при условии равнонапряженности шейки и параболоида в стыке снижает σ_e^* с 8 до 5.9 кГ/мм^2 (более подробные числовые данные приведены в [5]).

3. Для приближенного аналитического решения задачи разделим напряженное состояние, следуя, например, [3], на безмоментное и кра-

вой эффект. Полагая в (1.1) $M_1 = M_2 = Q_1 = 0$ и учитывая (1.2), из первых двух уравнений системы (1.1) получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{T_1}^{\circ} &= 10^4 I_0^2 a (\pi h_0)^{-1} [1 + (4a^2 r^2)^{-1}] (\ln r_k r^{-1} - 10^{-4} I_0^{-2} F) \\ \sigma_{T_2}^{\circ} &= -10^4 I_0^2 a (\pi h_0)^{-1} [1 + (\ln r_k r^{-1} + 10^{-4} I_0^{-2} F) (4a^2 r^2)^{-1}] \end{aligned}$$

где $\sigma_{T_1}^{\circ} = T_1/h$, $\sigma_{T_2}^{\circ} = T_2/h$, F — постоянная интегрирования, имеющая смысл силы, действующей на оболочку вдоль оси со стороны фланца и шейки. Она определяется из граничных условий для T_1 или для перемещения u при интегрировании четвертого и пятого уравнений системы (1.1) с учетом (3.1). В случае закрепления оболочки на обоих концах в качестве безмоментного решения нужно взять решение при граничных условиях $u = 0$ на обоих краях. Постоянная интегрирования определяется следующим образом:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 10^{-4} I_0^{-2} F &= [1/2 (1 + 2\mu) (a^2 r_k^2 - a^2 r_0^2 + \ln r_k r_0^{-1}) + 1/2 (1 + \\ &+ \mu) \ln 2 r_k r_0^{-1} + (1 + \mu - 8a^4 r_0^2) (8a^2 r_0^2)^{-1} \ln r_k r_0^{-1}] [a^2 r_k^2 - \\ &- a^2 r_0^2 + (1 + \mu) \ln r_k r_0^{-1} + (1 + \mu) (8a^2 r_0^2)^{-1} - (1 + \\ &+ \mu) (8a^2 r_k^2)^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

Уравнение краевого эффекта

$$(3.3) \quad d^4 w / d\theta^4 + k^4 w = 0, \quad k = [3(1 - \mu^2)]^{1/4} R_1 (R_2 h)^{-1/2}$$

получается из однородной системы (1.1) ($p_n = 0$) при пренебрежении членами порядка $(h/R)^{1/2}$.

Затухающая часть решения этого уравнения имеет вид

$$(3.4) \quad w = e^{-k\theta} (c_1 \sin k\theta + c_2 \cos k\theta)$$

При этом моменты и перерезывающее усилие связаны с перемещением w соотношениями

$$(3.5) \quad M_1 = \frac{D}{R_1^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2}, \quad M_2 = \mu M_1, \quad Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\theta}$$

В случае заделки максимальные изгибные напряжения

$$(3.6) \quad \sigma_{M_1} = \sqrt{3/(1 - \mu^2)} (\sigma_{T_2}^{\circ} - \mu \sigma_{T_1}^{\circ})$$

Здесь $\sigma_{T_1}^{\circ}$ и $\sigma_{T_2}^{\circ}$ берутся из безмоментного решения (3.1) для соответствующего края параболической части линзы ($r = r_0$ у шейки линзы или $r = r_k$ у фланца). Поскольку в этом рассмотрении результирующая сила, действующая на оболочку со стороны закрепления, может иметь лишь радиальную составляющую (продольная составляющая учитывается в безмоментном решении), то

$$(3.7) \quad Q_1 \cos \theta + T_1^k \sin \theta = 0$$

и в области краев необходимо учитывать дополнительное к безмоментному усилию T_1 усилие T_1^k . Соответствующая ему поправка к безмоментному напряжению $\sigma_{T_1}^{\circ}$ непосредственно на краю равна

$$(3.8) \quad \sigma_{T_1}^k = 1/3 (2ah_0)^{1/2} [3(1 - \mu^2)]^{1/4} \sigma_{M_1} \cos^2 \theta / \sin \theta$$

где σ_{M_1} и угол θ берутся на краях оболочки.

Полные напряжения на краях оболочки равны

$$(3.9) \quad \sigma_1 = \pm \sigma_{M_1} + \sigma_{T_1}^{\circ} + \sigma_{T_1}^k, \quad \sigma_2 = \mu \sigma_1$$

где верхний знак соответствует внешней поверхности оболочки, нижний — внутренней.

Из анализа пределов применимости приближенного решения [3] для рассматриваемых параболических оболочек можно получить критерий

$$(3.10) \quad 1/\cos^3 \theta > [3(1 - \mu^2)]^{-1/4} [h_0(2ar^2)^{-1}]^{1/2}$$

Для оболочек, удовлетворяющих критерию (3.10), аналитическое решение должно быть вполне приемлемым и надежным. Это подтверждается сравнением с результатами численного решения полной моментной системы уравнений (1.1) (см., например, фиг. 3).

Авторы благодарны Л. И. Балабуху и А. А. Самойлову за консультации и обсуждения.

Поступила 30 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов В. И., Данильченко И. А., Рзаев Р. А., Самойлов А. В. Фокусирующее устройство для нейтринных экспериментов. Препринт ИФВЭ, ОП/СПК 70—93. Серпухов, 1970.
2. Данилов Л. Л., Родионов С. Н., Сильвестров Г. И. Параболическая линза для аксиально-симметричной фокусировки релятивистских частиц, Ж. техн. физ., 1967, т. 37, вып. 5.
3. Балабух Л. И., Колесников К. С., Зарубин В. С., Алфутов Н. А., Усюкин В. И., Чижов В. Ф. Основы строительной механики ракет. М., «Высшая школа», 1969.
4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лизарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьева В. Н. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 2, М., «Машиностроение», 1958.
5. Баратов Д. Г., Валов В. М., Рзаев Р. А., Рыков В. Л., Шалашов И. М. Напряженное состояние параболических линз, обтекаемых сильным электрическим током. Препринт ИФВЭ, ОП 72—94, Серпухов, 1972.
6. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М., «Высшая школа», 1972.
7. Бидерман В. Л. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. Инж. ж., МТТ, 1967, № 5.