ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЛАБОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВНЕШНИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Э. П. Зимин

(*Москва*)

Методом возмущения найдено решение квазиодномерной системы уравнений, описывающей изменение температуры в несжимаемой жидкости при течении ее между двумя плоскими бесконечными параллельными пластинами при наличии излучения с внешних поверхностей пластин. Найдено также распределение температуры в пластинах.

Пусть c — теплоемкость, R — расстояние между пластинами, T^* — температура жидкости, w — средняя скорость, α — коэффициент теплоотдачи, δ — толщина пластины, ε — коэффициент излучения, θ^* — температура стенки, λ — теплопроводность жидкости, ρ — плотность жидкости, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости между двумя плоскими параллельными бесконечными пластинами $y = \pm {}^1/_2 R$. Направим ось x вдоль градиента давления. С внешних поверхностей пластин происходит передача тепла лучеиспусканием по закону Стефана—Больцмана $q = \sigma\varepsilon\theta^{*4}$ (предполагается, что излучают «серые» поверхности, коэффициент излучения которых не зависит от длины волны).

Задача нахождения поля температур в жидкости и пластинах по существу является плоской, причем профиль скоростей при постоянной вязкости можно считать известным из решения уравнения количества движения, но получение этого решения в замкнутом виде весьма затруднительно. Однако решение легко может быть найдено при некоторых дополнительных упрощениях.

Предположим, что: а) теплопроводность в жидкости в направлении оси x пренебрежимо мала, б) пластины достаточно тонкие, чтобы можно было пренебречь изменением их температуры в направлении оси y, в) количество тепла, передаваемого от жидкости к стенкам, пропорционально только разности средней температуры жидкости $T^*(x)$ и местной температуры стенки канала $\theta^*(x)$ и г) изменением температуры и скорости жидкости в поперечном направлении пренебрегаем.

В этом случае задача является квазиодномерной и функции T^* и θ^* удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda\delta \frac{d^2\theta^*}{dx^2} - \varepsilon\sigma\theta^{*4} + \alpha(T^* - \theta^*) = 0 \qquad (1)$$

$$-c\rho w R \frac{dT^*}{dx} = 2\alpha (T^* - \theta^*) \qquad (2)$$

В качестве граничных условий можно положить

$$T^* = T_a^*, \qquad \theta^* = \theta_a^*, \qquad \frac{d\theta^*}{dx} = 0 \qquad \text{при } x = 0$$

Первый член в левой части уравнения (1) характеризует теплопроводность вдоль пластин, а второй — лучеиспускание с внешней поверхности пластин. Все параметры предполагаются постоянными.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = \frac{x}{R}, \qquad \theta = \frac{\theta^*}{T_a^*}, \qquad T = \frac{T^*}{T_a^*}, \qquad A = \frac{\alpha R^2}{\lambda\delta}, \qquad \gamma = \frac{\varepsilon\sigma T_a^{*3}}{\alpha}, \qquad B = \frac{2\alpha}{\rho c w}$$

Уравнения (1) и (2) в этих величинах примут вид

$$\frac{1}{A}\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \gamma\theta^4 + T - \theta = 0, \qquad -\frac{1}{B}\frac{dT}{d\xi} = T - \theta \qquad (3)$$

Здесь T_α^* — некоторое характерное значение температуры.

Пусть значения параметров таковы, что $\gamma \ll A^{-1}$, где $A \sim 1$, тогда решение системы может быть найдено методом возмущения. Разлагаем θ и T в ряд по параметру γ

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \theta_n, \qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n T_n \qquad (4)$$

Соответствующие уравнения получаются подстановкой выражений (4) в уравнения (3) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях γ. Система для нулевого приближения получается из (3) приравниванием γ нулю и описывает изменение T и θ при условии адиабатической изоляции внешних поверхностей пластин

$$\frac{1}{A}\theta_0'' + T_0 - \theta_0 = 0, \qquad -\frac{1}{B}T_0' = T_0 - \theta_0 \qquad (5)$$

Штрих означает дифференцирование по ξ. Комбинируя эти уравнения, получаем уравнение, первый интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{A}\theta_0' - \frac{1}{B}T_0 = C_3 \tag{6}$$

Определяем T_0 из (6) и подставляем в первое уравнение (5)

$$\theta_0'' + B\theta_0' - A\theta_0 = ABC_3 \tag{7}$$

Так как дискриминант соответствующего характеристического уравнения отрицателен $(-A - {}^1/_4B^2) < 0$, то решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\theta_0 = C_1e^{\beta_1\xi} + C_2e^{\beta_2\xi} - C_3B, \qquad \beta_{1,2} = -\frac{1}{2}(B \pm \sqrt{B^2 + 4A}) \tag{8}$$

Здесь C_1, C_2 и C_3 — постоянные интегрирования.
Подставляя полученное решение для θ_0 в уравнение (6), получаем

$$T_0 = \frac{B}{A}(C_1\beta_1e^{\beta_1\xi} + C_2\beta_2e^{\beta_2\xi}) - C_3B \tag{9}$$

Для величин первого приближения имеем систему

$$\frac{1}{A}\theta_1'' - \theta_0^4 + T_1 - \theta_1 = 0, \qquad -\frac{1}{B}T_1' = T_1 - \theta_1$$

Эта система легко сводится к неоднородному линейному уравнению второго порядка:

$$\theta_1'' + B\theta_1' - A\theta_1 = ABE_3 + A\theta_0^4 + AB\int \theta_0^4 d\xi \tag{10}$$

причем однородное уравнение аналогично однородному уравнению (7). Подставляя θ_0 из (8) в (10), легко найти частное решение неоднородного уравнения, так что общее решение имеет вид

$$\theta_1 = E_1e^{\beta_1\xi} + E_2e^{\beta_2\xi} - E_3B - B^5C_3^4\left(\xi + \frac{B}{A}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{4}\frac{AU_nM^{4-n}C_1^n}{(n\beta_1)^2 + Bn\beta_2 - A}\left(1 + \frac{B}{n\beta_1}\right)e^{n\beta_1\xi} - \sum_{n=1}^{4}\frac{AU_nM^{4-n}C_2^n}{(n\beta_2)^2 + Bn\beta_2 - A}\left(1 + \frac{B}{n\beta_2}\right)e^{n\beta_2\xi} -$$

$$- \sum_{n=1}^{3}\frac{AV_nM^{3-n}C_1^nC_2}{(n\beta_1 + \beta_1)^2 + B(n\beta_1 + \beta_2) - A}\left(1 + \frac{B}{n\beta_1 + \beta_2}\right)e^{(n\beta_1+\beta_2)\xi} -$$

$$- \sum_{n=2}^{3}\frac{AW_nM^{3-n}C_1C_2^n}{(\beta_1 + n\beta_2)^2 + B(\beta_1 + n\beta_2) - A}\left(1 + \frac{B}{\beta_1 + n\beta_2}\right)e^{(\beta_1+n\beta_2)\xi} -$$

$$- \frac{6AC_1^2C_2^2}{4(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2B(\beta_1 + \beta_2) - A}\left[1 + \frac{B}{2(\beta_1 + \beta_2)}\right]e^{2(\beta_1+\beta_2)\xi}$$

$$U_1 = U_3 = V_3 = W_3 = 4, \qquad U_2 = 6,\ U_4 = 1,\ V_1 = V_2 = W_2 = 12,\ M = -BC_3$$

Первое приближение для температуры жидкости не приводится, но его легко получить, подставляя функцию θ_1 в уравнение

$$T_1 = \frac{B}{A}\theta_1' - B\int \theta_0^4 d\xi - E_3B$$

Шесть констант интегрирования C_1, C_2, C_3, E_1, E_2 и E_3 определяются через введенные граничные условия, а именно: температуры жидкости и пластин во входном сечении

$$T_0(0) = 1, \qquad T_1(0) = 0, \qquad \theta_0(0) = \theta_a, \quad \theta_1(0) = 0$$

и условие адиабатической изоляции торцов пластин $\theta_0'(0) = \theta_1'(0) = 0$ в сечении $\xi = 0$.

Поступила 6 I 1963